Tema 10

Series de términos no negativos

Vamos a presentar aquí algunos criterios útiles para estudiar la convergencia de series de términos no negativos. Empezamos con un método básico que consiste en comparar la serie que pretendemos estudiar con una serie conocida. Por comparación con las series geométricas obtendremos el criterio de la raíz o de Cauchy, del que se deduce fácilmente el criterio del cociente o de D'Alembert. Finalmente veremos el llamado criterio de condensación, también debido a Cauchy. Concluimos el tema definiendo el número e y probando que es irracional.

10.1. Criterios de comparación

En lo que sigue sólo vamos a trabajar con series de términos no negativos, es decir, series de la forma $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ con $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El estudio de la convergencia de estas series resulta más sencillo, porque son sucesiones crecientes: $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para una tal serie, tenemos una clara disyuntiva: converge o diverge positivamente. De hecho, *una serie de términos no negativos es convergente si, y sólo si, está mayorada.* Esto hace que, frecuentemente, de la convergencia de una serie podamos deducir la de muchas otras:

Criterio de comparación (Primera versión). *Si* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente y se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

La demostración es casi evidente. Escribimos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $\{B_n\}$ es convergente, luego está mayorada, así que $\{A_n\}$ también está mayorada, luego es convergente. Además, tenemos claramente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n \leqslant \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Intuitivamente, podríamos decir que la desigualdad (1) se obtiene al sumar miembro a miembro infinitas desigualdades: $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que en (1) tendremos desigualdad estricta tan pronto como exista un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < b_m$. En efecto, si en (1) se da la igualdad, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = 0$, de donde claramente, $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para asegurar que se cumple (1), es importante que tengamos $a_n \leqslant b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, a efectos de conseguir solamente la convergencia de una serie, es frecuente aplicar el criterio de comparación con una hipótesis menos restrictiva:

Criterio de comparación (Segunda versión). *Sean* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *dos series de números reales. Supongamos que existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $k > p$ *se tiene* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$*, y que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *es convergente. Entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente.*

En efecto, la hipótesis nos permite asegurar que la serie $\sum_{n\geqslant p+1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} b_{p+n}$ es convergente, y tenemos $0 \leqslant a_{p+n} \leqslant b_{p+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La primera versión de este criterio nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{p+n} = \sum_{n\geqslant p+1} a_n$ es convergente, luego $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ también lo es. ■

Esta segunda versión del criterio de comparación se aprovecha enseguida para obtener una tercera, la que en la práctica se usa con más comodidad:

Comparación por paso al límite. *Sean* $a_n \geqslant 0$ *y* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y supongamos que la sucesión* $\{a_n/b_n\}$ *converge a un límite* $L \in \mathbb{R}$*, que obviamente verifica* $L \geqslant 0$.

(i) *Si* $L > 0$*, la convergencia de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *equivale a la de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

(ii) *Si* $L = 0$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente.*

La demostración no ofrece dificultad. En el primer caso, la definición de sucesión convergente nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene que $|(a_n/b_n) - L| < L/2$. Deducimos claramente que

$$n \geqslant m \implies b_n < \frac{2}{L} a_n \quad \text{y} \quad a_n < \frac{3L}{2} b_n$$

Al multiplicar el término general de una serie convergente por una constante, la convergencia se mantiene, luego aplicando dos veces la segunda versión del criterio de comparación, obtenemos directamente el resultado deseado.

En el caso $L = 0$ tenemos claramente un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $a_n < b_n$, y aplicamos el mismo criterio. ■

Como primer ejemplo sencillo, consideremos la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}$. Tomando $b_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente que $\{a_n/b_n\} \to 1$. Así pues, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no converge, ya que la serie armónica $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

El siguiente ejemplo es mucho más relevante. Fijado $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ se conoce como *serie armónica con exponente* p. Para $p = 1$ tenemos la serie armónica (por antonomasia) que sabemos diverge positivamente. En lo demás casos tenemos convergencia:

- *Para* $p \in \mathbb{N}$ *con* $p > 1$, *la serie armónica con exponente* p *es convergente.*

Como $0 < 1/n^p \leqslant 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la primera versión del criterio de comparación, basta considerar el caso $p = 2$. Recordemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} b_n = \sum_{n \geqslant 1} 1/\big(n(n+1)\big)$ converge. Tomando $a_n = 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos evidentemente $\{a_n/b_n\} \to 1$, y el criterio de comparación por paso al límite nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 1} 1/n^2$ también converge. ■

10.2. Criterios de la raíz y del cociente

Los criterios de comparación típicamente se usan, como hemos hecho hasta ahora, para decidir si una serie converge o no, comparándola con otra conocida. Lógicamente tales criterios serán tanto más efectivos cuanto más amplia sea la gama de series conocidas. Usando la gama de las series geométricas vamos a obtener otro criterio de convergencia muy útil.

Criterio de la raíz para series o criterio de Cauchy. *Sea* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Si la sucesión* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *no está acotada, o bien está acotada con* $\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} > 1$, *entonces* $\{a_n\}$ *no converge a cero, luego la serie* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *diverge.*

(ii) *Si* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *está acotada con* $\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *converge.*

Demostración. (i). Suponiendo que $\{a_n\} \to 0$, bastará ver que $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada con $\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant 1$. En efecto, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $a_n < 1$, luego $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Esto ya prueba que $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada. Pero además, también para $n \geqslant m$, tenemos que 1 es mayorante del conjunto $\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\}$, luego $\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\} \leqslant 1$. Basta entonces usar la definición de límite superior:

$$\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} = \lim_{n \to \infty}\big(\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\}\big) \leqslant 1$$

(ii) Tomamos $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} < \lambda < 1$. Usando de nuevo la definición de límite superior, encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\} < \lambda$ y, por tanto, $\sqrt[n]{a_n} < \lambda$. Así pues, tenemos

$$n \geqslant m \implies a_n < \lambda^n < \lambda^{n-1}$$

Por ser $\lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente, y basta aplicar la segunda versión del criterio de comparación. ■

Resaltamos el caso que no queda cubierto por el criterio de la raíz: si la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada y verifica que $\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$, el criterio no nos da información. Suele decirse que este es el "caso dudoso" del criterio de la raíz, pues veremos enseguida que entonces la serie considerada puede converger, pero también puede ser divergente.

Frecuentemente, al aplicar el criterio de la raíz, nos encontramos con que la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ es convergente, y entonces las cosas son más fáciles:

- *Sea* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que la sucesión* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *es convergente.*
  (i) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *entonces* $\{a_n\}$ *no converge a cero, luego la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*
  (ii) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

Por supuesto, cuando $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to 1$, tenemos $\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$ y estamos en el caso dudoso. Por ejemplo, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n$ diverge, mientras que $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n^2$ es convergente. Queda así claro que, en el caso dudoso, el criterio de la raíz no puede dar información sobre la convergencia de la serie considerada.

Recordemos que, si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ podía estudiarse mediante el criterio de la raíz para sucesiones. Más concretamente, la prueba de dicho criterio se basó en un lema que afirma lo siguiente: si la sucesión de cocientes $\{a_{n+1}/a_n\}$ está acotada, entonces $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ también está acotada y se verifican las siguientes desigualdades:

$$\liminf\{a_{n+1}/a_n\} \leqslant \liminf\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup\{a_{n+1}/a_n\} \qquad (2)$$

Uniendo este lema con el criterio de la raíz para series, deducimos lo siguiente:

Criterio del cociente o de D'Alembert. *Sea* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que la sucesión* $\{a_{n+1}/a_n\}$ *está acotada.*

(i) *Si* $\liminf\{a_{n+1}/a_n\} > 1$, *la sucesión* $\{a_n\}$ *no converge a cero y la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*

(ii) *Si* $\limsup\{a_{n+1}/a_n\} < 1$, *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

La demostración ya se ha sugerido. Sabemos que $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada y podemos usar (2).

(i). En este caso tenemos $1 < \liminf\{a_{n+1}/a_n\} \leqslant \limsup\{\sqrt[n]{a_n}\}$ y el criterio de la raíz nos dice que $\{a_n\}$ no converge a cero.

(ii). Ahora tenemos $\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup\{a_{n+1}/a_n\} < 1$ y el criterio de la raíz nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. ■

Al igual que en el criterio de la raíz, cuando la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ es convergente, las cosas se facilitan:

- *Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ es convergente.*

  (i) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero, luego* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*

  (ii) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, entonces la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

Usemos el criterio del cociente en un ejemplo sencillo. Fijados $q \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, sea $a_n = n^q/x^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q}{n^q x} = \frac{1}{x} < 1$$

y el criterio del cociente nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^q}{x^n}$ converge. Deducimos que $\{n^q/x^n\} \to 0$, cosa que se comprobó en su momento por inducción sobre q, usando el criterio de Stolz.

Merece la pena detenerse a comparar la efectividad de los criterios de la raíz y del cociente. En primer lugar, el criterio del cociente requiere que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $a_n > 0$, de forma que podamos usar la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$, mientras en el criterio de la raíz basta que sea $a_n \geqslant 0$. Ciertamente, esta mayor generalidad del criterio de la raíz es poco relevante. Es fácil adivinar que la presencia de términos nulos no puede afectar a la convergencia de la serie.

La segunda diferencia entre ambos criterios es más importante. Cuando la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ no está acotada, el criterio de la raíz nos asegura que $\{a_n\}$ no converge a cero. En cambio, cuando la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ no está acotada, el criterio del cociente no es aplicable. De hecho, siendo $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, puede ocurrir que $\{a_n\} \to 0$, e incluso que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converja, sin que $\{a_{n+1}/a_n\}$ esté acotada. Consideremos, por ejemplo, la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\big(3+(-1)^n\big)^n}$$

Tenemos claramente que $\sqrt[n]{a_n} = 1/2$ cuando n es impar, mientras que $\sqrt[n]{a_n} = 1/4$ para n par. Por tanto, la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada con $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1/2 < 1$, luego el criterio de la raíz nos dice que la serie considerada es convergente. Sin embargo, para n par, comprobamos fácilmente que $a_{n+1}/a_n = 2^{n-1}$, luego la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ no está mayorada. Tenemos pues un ejemplo en el que el criterio de la raíz resuelve nuestro problema, mientras el del cociente no es aplicable.

Pero supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ está acotada, con lo que ambos criterios son aplicables. Según hemos visto, cuando el criterio del cociente nos permite decidir si la serie converge o diverge es porque el criterio de la raíz también lo permite, algo que quedó muy claro en las desigualdades (2). Dicho equivalentemente, si al intentar aplicar el criterio de la raíz se presenta el caso dudoso, lo mismo ocurrirá con el del cociente. La discusión se completa con un ejemplo en el que el criterio de la raíz resuelve nuestro problema, pero en el del cociente se presenta el caso dudoso. Consideremos la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2} = \begin{cases} \sqrt[n]{2}/2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{4}/2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Deducimos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to 1/2$ y el criterio de la raíz nos dice que nuestra serie es convergente. Por otra parte, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2\big(3+(-1)^n\big)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/4 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

luego $1/4 = \liminf\{a_{n+1}/a_n\} < \limsup\{a_{n+1}/a_n\} = 1$, y el criterio del cociente no nos da información.

En resumen, el criterio de la raíz se aplica en situaciones más generales y es siempre más efectivo que el del cociente. La utilidad del criterio del cociente estriba en que la sucesión de cocientes $\{a_{n+1}/a_n\}$ suele manejarse con más comodidad que la sucesión de raíces $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

10.3. Condensación

Veamos ya un último criterio de convergencia para series de términos no negativos.

Criterio de condensación de Cauchy. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$.*

Demostración. Consideremos las sumas parciales de ambas series:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{y} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que la sucesión $\{A_n\}$ está mayorada si, y sólo si, lo está $\{B_n\}$. Ello se deducirá fácilmente de dos desigualdades que probaremos por inducción:

$$A_{2^n-1} \leqslant B_n \leqslant 2A_{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Para $n=1$ debemos ver que $a_1 \leqslant a_1 \leqslant 2a_1$, lo cual es obvio. Antes de entrar en la etapa de inducción, observamos que, por ser la sucesión $\{a_n\}$ decreciente, para $k \geqslant 2^n \geqslant j$ tenemos $a_k \leqslant a_{2^n} \leqslant a_j$, de donde

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant 2^n a_{2^n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leqslant 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j \tag{4}$$

ya que la suma del primer miembro consta de 2^n sumandos, mientras la del último miembro tiene 2^{n-1}. Suponiendo ya que se verifica (3) para un $n \in \mathbb{N}$, y usando (4), tenemos

$$\begin{aligned} A_{2^{n+1}-1} &= A_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant B_n + 2^n a_{2^n} = B_{n+1} \\ &= B_n + 2^n a_{2^n} \leqslant 2A_{2^{n-1}} + 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j = 2A_{2^n} \end{aligned}$$

Puesto que $A_n \leqslant A_{2^n-1}$, de (3) deducimos que $A_n \leqslant B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{A_n\}$ estará mayorada siempre que lo esté $\{B_n\}$. Recíprocamente, si $\{A_n\}$ está mayorada, también lo estará su sucesión parcial $\{A_{2^{n-1}}\}$, y usando (3) deducimos que $\{B_n\}$ está mayorada. ■

Observando las desigualdades (4) que han sido el paso clave en la demostración anterior, se puede entender en qué consiste el proceso de "condensación" que hemos aplicado. Para la primera desigualdad, la suma que aparece en el primer miembro de (4) se "condensa" al sustituir todos los sumandos por el mayor de ellos, mientras que para la última desigualdad, la expresión $2^{n-1}a_{2^n}$ se "descondensa" al sustituirla por una suma de 2^{n-1} sumandos, siendo a_{2^n} el menor de ellos. En ambos casos se aprovecha la hipótesis clave: la sucesión $\{a_n\}$ decrece. El proceso se visualiza aún mejor si hacemos la demostración directa de (3) para un valor concreto de n, por ejemplo para $n = 4$, que sería la siguiente:

$$\begin{aligned} A_{15} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + \ldots + a_{15}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \,=\, B_4 \,\leqslant\, 2\big(a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8\big) \\ &\leqslant 2\big(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)\big) \,=\, 2A_8 \end{aligned}$$

Obsérvese por ejemplo, que la suma $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ se "condensa" al mayorarla por $4a_4$, y en la última desigualdad, se "descondensa" $4a_8$ al mayorarlo por $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$. Veamos ahora algunos ejemplos que ilustran la utilidad del criterio de condensación.

La convergencia de las series armónicas se podría haber discutido como sigue: fijado $p \in \mathbb{N}$, tomamos $\{a_n\} = \{1/n^p\}$, que es una sucesión decreciente de números positivos, y tenemos $2^n a_{2^n} = (1/2^{p-1})^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $\sum\limits_{n \geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ es la serie geométrica de razón $1/2^{p-1}$, que diverge cuando $p = 1$ y converge para $p > 1$. Por el criterio de condensación, lo mismo le ocurre a la serie armónica con exponente p, como ya sabíamos. La clave ahora ha sido que, al "condensar" una serie armónica, se obtiene una serie geométrica.

Para tener más ejemplos, consideremos la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n \sqrt[q]{n}}$, de nuevo con $q \in \mathbb{N}$ fijo. De nuevo $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos con $2^n a_{2^n} = \big(1/\sqrt[q]{2}\big)^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como la serie geométrica de razón $1/\sqrt[q]{2} < 1$ es convergente, el criterio de condensación nos dice que la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ también converge.

Existen muchos más de criterios de convergencia para series de términos no negativos, pero los aquí estudiados son ya suficientes para dilucidar la convergencia de multitud de series.

10.4. El número e

Vamos a estudiar un número real cuya importancia se pondrá de manifiesto más adelante. Consideremos la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} 1/n!$, cuya convergencia se va a deducir fácilmente del criterio del cociente. En efecto, tomando $a_n = 1/n!$ tenemos claramente $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{a_{n+1}/a_n\} \to 0 < 1$ y el criterio del cociente nos dice que la serie considerada converge.

Pues bien, la suma de dicha serie es, por definición, *el número e*, que debe su nombre al genio matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Así pues, tenemos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \qquad \text{donde} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que, por comodidad en la notación, estamos llamando σ_n, no a la n-ésima, sino a la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie usada para definir e.

Es obvio que $e > \sigma_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$; tomando $p = 1$ obtenemos $e > 2$, con $p = 2$ tenemos $e > 5/2$, $p = 3$ nos da $e > 8/3$, etc. Pero conviene estimar el error que se comete al tomar σ_p como aproximación del número e. Una buena estimación es la siguiente:

- *Para todo* $p \in \mathbb{N}$, *se verifica que:* $\quad e - \sigma_p = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} < \frac{1}{p!\,p}$ (5)

Para probarlo, fijado $p \in \mathbb{N}$, expresamos la diferencia $e - \sigma_p$ como la suma de una serie, usando una idea que se comentó en su momento:

$$e - \sigma_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)!}$$

Pretendemos ahora sustituir la serie que nos ha aparecido, por otra cuya suma podamos calcular. Concretamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $(p+n)! \geqslant p!\,(p+1)^n$, es decir,

$$\frac{1}{(p+n)!} \leqslant \frac{1}{p!}\left(\frac{1}{p+1}\right)^n = \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-1}$$

y la desigualdad es estricta para $n > 1$. Salvo un factor constante, nos ha aparecido la serie geométrica de razón $1/(p+1) < 1$ cuya suma conocemos:

$$\frac{1}{(p+1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{(p+1)!}\,\frac{1}{1-\big(1/(p+1)\big)} = \frac{1}{p!\,p}$$

Así pues, la primera versión del criterio de comparación nos permite escribir:

$$e - \sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{p!\,p} \qquad \blacksquare$$

La desigualdad (5) asegura que la sucesión $\{\sigma_n\}$ converge rápidamente al número e. Por ejemplo, para $p = 7$ se tiene ya $p!\,p > 10^4$ obteniéndose que $2{,}7182 < e < 2{,}7183$. Ponemos aún más de manifiesto la utilidad de (5) probando lo siguiente:

- *El número e es irracional.*

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $e = m/p$ donde $m, p \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $p!\, e = (p-1)!\, m \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es claro que $p!\, \sigma_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!} \in \mathbb{N}$, ya que $p!/k! \in \mathbb{N}$ para $k = 0, 1, \ldots, p$. Obtenemos por tanto que $p!(e - \sigma_p) \in \mathbb{N}$. Pero aplicando (5) tenemos que $p!(e - \sigma_p) < 1/p \leqslant 1$, y hemos llegado a una contradicción. ■

Completamos este estudio preliminar del número e viéndolo como límite de una sucesión sencilla, que a veces se usa para dar una definición alternativa.

- *Se verifica que* $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, poniendo $u_n = (1 + 1/n)^n$, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!\, n^k} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \tag{6}$$

Resulta ahora fácil comprobar que la sucesión $\{u_n\}$ es creciente. En efecto, fijados $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$, es claro que

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$$

y usando dos veces (6) deducimos claramente que

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)\right] = u_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver que $\{u_n\}$ está mayorada, observamos que en el último miembro de (6) todos los productos que aparecen son menores o iguales que 1, luego

$$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sigma_n < e \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, $\{u_n\}$ es convergente y, llamando L a su límite, sabemos ya que $L \leqslant e$. En busca de la otra desigualdad, fijamos $p \in \mathbb{N}$ y volvemos a usar (6) para obtener:

$$u_{p+n} = 1 + \sum_{k=1}^{p+n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right) = v_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

donde la sucesión $\{v_n\}$ se define mediante la última igualdad. Vemos que $\{v_n\}$ es convergente, ya que se obtiene mediante una suma de productos de sucesiones convergentes. De hecho:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 1 + \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right)\right] = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} = \sigma_p$$

No nos debe extrañar que este límite dependa del número natural p que hemos fijado, puesto que la propia sucesión $\{v_n\}$ dependía de p.

Puesto que $\{u_{p+n}\} \to L$, de la desigualdad (7) deducimos que $L \geqslant \sigma_p$, pero esto ocurre para todo $p \in \mathbb{N}$, así que $L \geqslant \lim_{p \to \infty} \sigma_p = e$. ■

10.5. Ejercicios

1. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente de términos no negativos. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ también es convergente.

2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales no negativos. Supongamos que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^2$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n^2$ son convergentes. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ también es convergente.

3. Sea $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} n^q a_n = 1$, donde $q \in \mathbb{N}$ y $q > 1$. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

4. Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

5. Dado $a \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n(n^2+1)}{n^n}$

7. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+3n+1}{n!}$ es convergente y calcular su suma.

8. Estudiar la convergencia de las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{2^n\, n!}$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{3^n\, n!}$