Tema 14

Continuidad y monotonía

Generalizando lo que se hizo en su momento para sucesiones, definiremos la monotonía de una función, en forma bien fácil de adivinar. Probaremos entonces dos resultados importantes que relacionan la continuidad de una función con su monotonía. Como consecuencia veremos que, si una función definida en un intervalo es continua e inyectiva, su inversa es continua.

14.1. Funciones monótonas

Las definiciones que siguen son tan intuitivas que no precisan ninguna motivación. Diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

- *creciente* cuando: $x, y \in A\,,\ \ x < y \ \ \Rightarrow \ \ f(x) \leqslant f(y)$
- *decreciente* cuando: $x, y \in A\,,\ \ x < y \ \ \Rightarrow \ \ f(x) \geqslant f(y)$, es decir, cuando $-f$ es creciente
- *monótona* cuando es creciente o decreciente.

Puesto que las sucesiones de números reales son funciones reales de variable real, conviene observar que las definiciones anteriores generalizan claramente a las que dimos en su momento para sucesiones.

Volviendo al caso general, obsérvese que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es a la vez creciente y decreciente si, y sólo si, es constante. También es claro que, suponiendo que A tiene al menos tres puntos, existen funciones $f : A \to \mathbb{R}$ que no son monótonas. Pero la propiedad que más nos interesa es la monotonía estricta, que se define como sigue. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

- *estrictamente creciente* cuando: $x, y \in A\,,\ \ x < y \ \ \Rightarrow \ \ f(x) < f(y)$
- *estrictamente decreciente* cuando: $x, y \in A\,,\ \ x < y \ \ \Rightarrow \ \ f(x) > f(y)$, es decir, cuando $-f$ es estrictamente creciente
- *estrictamente monótona* cuando es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Nótese que una función es estrictamente creciente si, y sólo si, es creciente e inyectiva. Análogamente, el decrecimiento estricto equivale a decrecimiento más inyectividad, luego una función es estrictamente monótona si, y sólo si, es monótona e inyectiva.

Sin duda, las propiedades recién definidas son bastante exigentes. Lo más frecuente es que el conjunto de definición de una función pueda expresarse como unión finita de subconjuntos, de forma que la restricción de la función a cada uno de ellos sí verifique alguna de esas propiedades. Para tratar esta situación con comodidad, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$, decimos que f es *creciente en* B, cuando la restricción $f|_B$ es una función creciente, es decir, cuando para cualesquiera $x, y \in B$ con $x \leqslant y$, se tiene que $f(x) \leqslant f(y)$. Análogo criterio se sigue para las otras cinco propiedades antes definidas.

Como ejemplo, veamos las *funciones potencia de exponente natural*. Más concretamente, fijado $q \in \mathbb{N}$, la *función potencia de exponente* q viene dada por

$$f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando propiedades bien conocidas de las potencias, comprobamos fácilmente lo siguiente:

- *Si q es impar, f_q es estrictamente creciente.*
- *Si por el contrario q es par, la función f_q no es monótona, pero es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$ y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_0^-$.*

Otro ejemplo destacable es la función valor absoluto: es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_0^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$, luego no es monótona en $\mathbb{R}$.

Nuestro objetivo es relacionar la continuidad de una función con su monotonía. Conviene resaltar que, al definir ambas propiedades para un subconjunto del conjunto de definición, no hemos seguido exactamente el mismo criterio: decir que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto $B \subset A$ no es lo mismo que decir que $f|_B$ es continua.

14.2. De la continuidad a la monotonía

Sabemos que toda función estrictamente monótona es inyectiva y, en ciertas condiciones, vamos a probar el recíproco. Es el resultado clave sobre funciones continuas e inyectivas:

Teorema. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.*

Demostración. Basta probar que f es monótona, pues de la inyectividad se deduce que la monotonía es estricta. Empezamos con el caso en que I es un intervalo cerrado y acotado no trivial. En un primer paso probamos lo siguiente:

$(*)$ *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, tal que $f(a) < f(b)$, entonces $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ para todo $x \in [a,b]$.*

En efecto, usando el teorema del valor intermedio veremos que no puede ser $f(x) < f(a)$ y tampoco $f(x) > f(b)$. Concretamente, si $f(x) < f(a)$, aplicamos dicho teorema a la restricción de f al intervalo $[x,b]$ que es continua y toma los valores $f(x)$ y $f(b)$, luego debe tomar también el valor intermedio $f(a)$. Por tanto, existe $z \in [x,b]$ tal que $f(z) = f(a)$, pero esto contradice la inyectividad de f, ya que $a < z$. Análogamente, si fuese $f(x) > f(b)$ aplicaríamos el teorema del valor intermedio a la restricción de f al intervalo $[a,x]$, obteniendo $z \in [a,x]$ tal que $f(z) = f(b)$, lo que contradice otra vez la inyectividad de f.

Deducimos fácilmente que la función f que aparece en $(*)$ ha de ser creciente. Dados $x,y \in [a,b]$ con $x < y$, aplicando $(*)$ tenemos $f(x) \leqslant f(b)$, de hecho $f(x) < f(b)$, ya que $x < b$ y f es inyectiva. Pero ahora podemos aplicar $(*)$ a la restricción de f al intervalo $[x,b]$, que es continua e inyectiva, con $f(x) < f(b)$, obteniendo $f(x) \leqslant f(y)$, como queríamos.

Si en $(*)$, en lugar de $f(a) < f(b)$, suponemos $f(a) > f(b)$, el razonamiento anterior se aplica a la función $-f$, continua e inyectiva con $-f(a) < -f(b)$. Obtenemos que $-f$ es creciente, luego f es decreciente. Queda así demostrado el teorema para el caso de un intervalo cerrado y acotado no trivial.

Vamos al caso general: I es un intervalo arbitrario y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva. Razonando por reducción al absurdo, si f no es monótona, existen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in I$ tales que:

$$x_1 < y_1\,, \quad x_2 < y_2\,, \quad f(x_1) > f(y_1)\,, \quad f(x_2) < f(y_2)$$

Escribiendo $a = \min\{x_1, x_2\} < \max\{y_1, y_2\} = b$, por ser I un intervalo, tenemos $[a,b] \subset I$, lo que permite considerar la restricción de f al intervalo $[a,b]$, que es continua e inyectiva. Como $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [a,b]$, dicha restricción no puede ser monótona, lo cual es una flagrante contradicción con lo demostrado en el caso de un intervalo cerrado y acotado no trivial. ■

El teorema anterior, combinado con el del valor intermedio, permite a menudo determinar la imagen de una función. Dados $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, supongamos que, para una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, queremos determinar su imagen: $J = f\big([a,b]\big)$. Sean $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ y supongamos de momento que $\alpha < \beta$. Por el teorema del valor intermedio, sabemos que J es un intervalo, y es obvio que $\alpha, \beta \in J$, luego $[\alpha, \beta] \subset J$, pero obviamente esta inclusión no tiene por qué ser una igualdad. Sin embargo, si f es inyectiva, el teorema anterior nos dice que f es creciente, luego $\alpha = f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = \beta$ para todo $x \in [a,b]$ y concluimos que $J = [\alpha, \beta]$. Por supuesto, de haber sido $\alpha > \beta$, f habría sido decreciente y habríamos obtenido $J = [\beta, \alpha]$. En general, para una función monótona definida en un intervalo, no es difícil adivinar su imagen. La principal ventaja del teorema anterior estriba en que la inyectividad de una función suele ser más fácil de comprobar que su monotonía.

Como ejemplo concreto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que es continua, por ser una función racional. Para $x,y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; 2x(1+y^2) = 2y(1+x^2) \;\Leftrightarrow\; (1-xy)(x-y) = 0$$

luego $f(x) = f(y)$ si, y sólo si, $x = y$ o $xy = 1$.

Así pues, f no es inyectiva, ya que $f(x) = f(1/x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Sin embargo, si tomamos $x,y \in [-1,1]$, es claro que la condición $xy = 1$ implica entonces que $x = y$. Lo mismo ocurre para $x,y \in]-\infty,-1]$ o $x,y \in [1,+\infty[$. Por tanto, la restricción de f a cualquiera de los tres intervalos mencionados es inyectiva, luego estrictamente monótona.

Como $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, f es creciente en $[-1,1]$ con $f\big([-1,1]\big) = [-1,1]$. Como $f(2) = 4/5 < 1 = f(1)$, sabemos que f es estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$, pero del intervalo $J = f\big([1,+\infty[\big)$ esto sólo nos dice que $\max J = f(1) = 1$ y que J no tiene mínimo. Sin embargo, por una parte es claro que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego J está minorado con $\inf J \geqslant 0$. Por otra, tenemos $\inf J \leqslant f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{f(n)\}$ converge a cero, luego $\inf J \leqslant 0$. Concluimos claramente que $J =]0,1]$. Para la semirrecta $]-\infty,-1]$ podemos razonar de manera similar, o bien observar que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde deducimos que $f\big(]-\infty,-1]\big) = \{-y : y \in J\} = [-1,0[$. De todo lo dicho se deduce claramente que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

14.3. De la monotonía a la continuidad

Aplicando la caracterización de la continuidad mediante sucesiones monótonas, conseguimos enseguida una útil condición suficiente para la continuidad de una función monótona:

Teorema. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función monótona, y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua.*

Demostración. Podemos evidentemente suponer que f es creciente, pues en otro caso bastaría usar la función $-f$, cuya imagen también es un intervalo. Fijado $x \in A$, para probar que f es continua en el punto x, tomamos una sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$ y bastará ver que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

Suponiendo primero que $\{x_n\}$ es creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x$, luego $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1}) \leqslant f(x)$, ya que f es creciente. Por tanto, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es creciente y mayorada, luego convergente. Poniendo $L = \lim\{f(x_n)\}$ tenemos $L \leqslant f(x)$ y, suponiendo que $L < f(x)$, llegaremos a contradicción.

Tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $L < y < f(x)$, tenemos claramente $f(x_1) < y < f(x)$ y, usando que $f(A)$ es un intervalo, deberá existir $a \in A$ tal que $f(a) = y$. Si fuese $x \leqslant a$ el crecimiento de f nos daría $f(x) \leqslant f(a) = y$ cosa que no es cierta. Pero si fuese $a < x$, puesto que $\{x_n\} \to x$, podríamos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_m$, con lo que $y = f(a) \leqslant f(x_m) \leqslant L$, cosa que tampoco es cierta. Hemos demostrado que $L = f(x)$, es decir, $\{f(x_n)\} \to f(x)$ como queríamos.

Si la sucesión $\{x_n\}$ hubiese sido decreciente, un razonamiento enteramente análogo nos hubiera llevado a la misma conclusión. ■

Conviene resaltar que, en el teorema anterior, el conjunto A no tiene por qué ser un intervalo. Toda función monótona, cuya imagen sea un intervalo, es continua.

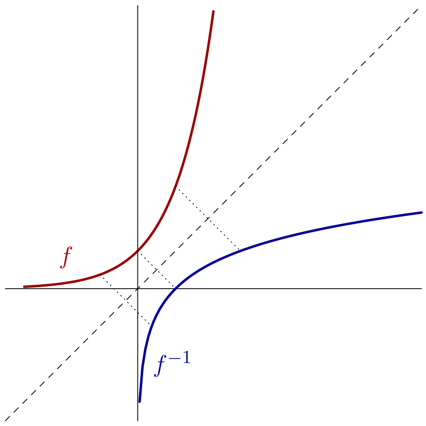
14.4. Continuidad de la inversa

Para una función continua e inyectiva, es natural preguntarse si la función inversa también es continua. Para tener una visión intuitiva del problema, observemos la relación entre la gráfica de una función inyectiva $f : A \to \mathbb{R}$ y la de su inversa, la función $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ que se caracteriza por verificar que $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ para todo $x \in A$. Tenemos claramente

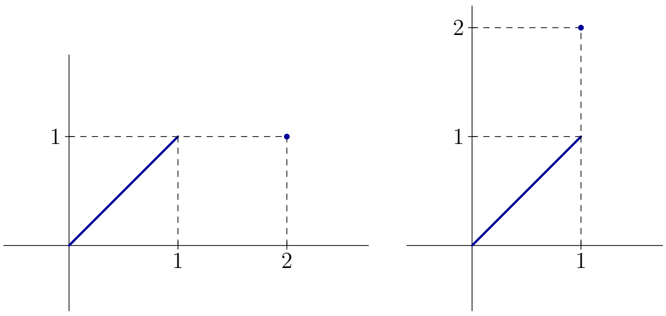
$$\operatorname{Gr} f^{-1} = \Big\{ \big(y, f^{-1}(y)\big) \, : \, y \in f(A) \Big\} = \Big\{ \big(f(x), x\big) \, : \, x \in A \Big\}$$

Observamos que las gráficas de f y f^{-1} se obtienen cada una a partir de la otra mediante la simetría que tiene como eje la recta de ecuación $y = x$, puesto que dicha simetría es la transformación $(x,y) \mapsto (y,x)$, de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

Un sencillo dibujo ayuda a entender esta relación entre las gráficas de f y f^{-1}:



Con la interpretación geométrica comentada, se comprende muy bien el siguiente ejemplo de una función continua e inyectiva cuya inversa no es continua. Consideremos el conjunto $A = [0,1[\cup \{2\}$ y la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1[$ y $f(2) = 1$. El carácter local de la continuidad nos permite comprobar fácilmente que f es continua. Por otra parte, es claro que f es inyectiva con $f(A) = [0,1]$ y que $f^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ viene dada por $f^{-1}(x) = x$ para todo $x \in [0,1[$ y $f^{-1}(1) = 2$. Como $\big\{ f^{-1}\big(1 - (1/n)\big) \big\} \to 1 \neq f^{-1}(1)$, vemos f^{-1} no es continua en 1. Las gráficas de f y f^{-1} permiten visualizar claramente que f es continua mientras que f^{-1} no lo es:



Sin embargo, conviene observar que esta situación ha sido posible porque el conjunto A no es un intervalo. Para una función continua e inyectiva en un intervalo, la relación entre las gráficas de la función y de su inversa permite intuir que dicha inversa debe ser continua, y eso es lo que vamos a probar. Para ello usaremos los dos teoremas obtenidos anteriormente, junto con una sencilla observación:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ también es estrictamente creciente. Si f es estrictamente decreciente, f^{-1} también lo es.*

La comprobación de este hecho es inmediata. Supongamos que f es estrictamente creciente, sean $u, v \in f(A)$ con $u < v$ y sean $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$. Si fuese $y \leqslant x$, aplicando que f es creciente tendríamos $v = f(y) \leqslant f(x) = u$, que es una contradicción, luego deberá ser $x < y$, es decir, $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. Esto prueba que f^{-1} es estrictamente creciente, como queríamos. En el caso de que f sea estrictamente decreciente, se razona de forma enteramente análoga. ■

Damos ya una respuesta al problema de continuidad de la función inversa:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona, entonces f^{-1} es continua.*

En efecto, acabamos de ver que $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ también es estrictamente monótona, pero su imagen es un intervalo, ya que $f^{-1}\big(f(I)\big) = I$, luego f^{-1} es continua. ■

Como consecuencia inmediata obtenemos:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f^{-1} es continua.*

En efecto: sabemos que f es estrictamente monótona y basta aplicar el resultado anterior. ■

Como ejemplo muy ilustrativo de todos los resultados anteriores, vamos a trabajar con las funciones potencia de exponente natural. Obtendremos abundante información sobre raíces de números reales, que es esencialmente conocida, pero ahora la conseguimos de forma mucho más clara y elegante que la usada anteriormente. Fijado $q \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que sabemos es continua, luego su imagen es un intervalo.

Cuando q es impar, tenemos que $\{n^q\} \to +\infty$ y $\{(-n)^q\} \to -\infty$, luego $f_q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Además, como f_q es inyectiva, de hecho sabemos que es estrictamente creciente, concluimos que f_q es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre sí mismo. Así pues, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^q = y$. Esto prueba la existencia y unicidad de la raíz q-ésima de todo número real. Compárese este razonamiento con el método (artesanal) usado en su momento para conseguir el mismo resultado. Pero consideremos la función inversa de f_q, a la que obviamente debemos llamar *función raíz q-ésima* (con q impar):

$$f_q^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_q^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Esta nueva función es también biyectiva y estrictamente creciente pero, como su imagen es un intervalo, es continua. Esto significa que si $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$ entonces $\left\{\sqrt[q]{x_n}\right\} \to \sqrt[q]{x}$, cosa que también sabíamos, pero con una demostración más laboriosa.

Cuando q es par, razonamos de forma análoga, pero restringiendo la función potencia a $\mathbb{R}_0^+$, donde es inyectiva, de hecho estrictamente creciente. Así pues consideramos la función:

$$g_q : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ , \quad g_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Ahora 0 es el mínimo del intervalo $g_q(\mathbb{R}_0^+)$, que no está mayorado, luego g_q es una biyección de $\mathbb{R}_0^+$ sobre sí mismo. De nuevo hemos probado, de forma muy expeditiva, que todo número real no negativo tiene una única raíz q-ésima no negativa, y podemos considerar la *función raíz q-ésima* (con q par):

$$g_q^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ , \quad g_q^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+$$

Es también una biyección, continua y estrictamente creciente, de $\mathbb{R}_0^+$ sobre sí mismo.

A modo de repaso, concluimos este tema destacando en un solo enunciado la información obtenida sobre una función continua en un intervalo. Por razones fáciles de adivinar, es el caso más interesante desde el punto de vista de su aplicación en diversas ciencias.

- *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:*
  - (i) *$f(I)$ es un intervalo.*
  - (ii) *Si I es cerrado y acotado, lo mismo le ocurre a $f(I)$.*
  - (iii) *Si f es inyectiva, entonces f es estrictamente monótona y f^{-1} es continua.*

14.5. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}}$ es monótona, entonces f es monótona.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. Probar que
$$\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(y) : y > a\}$$

3. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Analizar la relación existente entre las siguientes afirmaciones:
   (i) f es continua
   (ii) $f(I)$ es un intervalo
   (iii) f es estrictamente monótona
   (iv) f^{-1} es continua

4. Calcular la imagen de la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

5. Sea $f :]-2,2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \forall x \in]-2,2[$$

Calcular $f\big(]-2,2[\big)$, $f\big([0,2[\big)$, $f\big(]-1,1[\big)$ y $f\big([-1,1]\big)$.

6. Sea $f : [-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall x \in [-1,1[$$

Calcular $f\big([-1,1[\big)$ y $f\big([-1/2,1/2]\big)$.

7. Sea $f : [-2,2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[4]{2-x}} \quad \forall x \in [-2,2[$$

Calcular $f\big([-2,2[\big)$ y $f\big([-2,0]\big)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Calcular $f\big(\mathbb{R}\big)$ y $f\big([-1,2]\big)$.

9. Sea $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)} \quad \forall x \in]0,1[$$

Calcular $f\big(]0,1[\big)$ y $f\big([1/3,1/2]\big)$.

10. Probar que, para cada $y \in \mathbb{R}_0^+$, la ecuación $x^5 + x^4 + x = y$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}_0^+$, y que denotando por $g(y)$ a dicha solución, se obtiene una función continua $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Deducir que si $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n^5 + x_n^4 + x_n\} \to 3$, entonces $\{x_n\} \to 1$.