

Tema 12

Continuidad

El Análisis Real es la parte del Análisis Matemático que se ocupa de las funciones de una o varias variables reales. Iniciamos aquí el estudio del caso más sencillo: funciones reales de una variable real, es decir, aplicaciones definidas en un subconjunto de \mathbb{R} , con valores en \mathbb{R} .

Nos interesa una propiedad importante que dichas funciones pueden tener: la *continuidad*. Tras definir las funciones continuas, obtendremos algunas propiedades básicas. Concretamente veremos que la continuidad se conserva mediante varias operaciones: suma, producto, cociente y composición. Aparecerán de esta forma abundantes ejemplos de funciones continuas. También estudiaremos el carácter local de la continuidad, explicando con detalle en qué consiste.

12.1. Funciones reales de variable real

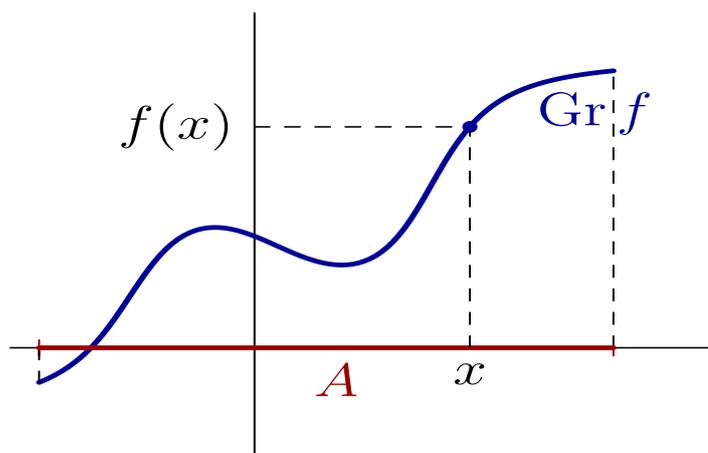
Llamamos *función real de variable real* a cualquier aplicación $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R} . Puesto que sólo vamos a trabajar con este tipo de funciones, cuando usemos la palabra *función*, nos referimos siempre a una función real de variable real.

Para definir correctamente una función f , concretamos primero su *conjunto de definición*, digamos A , que puede ser cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{R} , y entonces explicamos, para cada $x \in A$, cómo se obtiene el número real $f(x)$, que ha de estar determinado de manera única. Suele decirse que $f(x)$ es el *valor* que toma la función f en el punto x , o simplemente el valor de f en x . Está claro que dos funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ sólo son iguales cuando $A = B$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Toda función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se interpreta geoméricamente mediante un subconjunto de \mathbb{R}^2 que recibe el nombre de *gráfica* de la función f y viene definido por

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Viendo cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como el punto de un plano que, en coordenadas cartesianas, tiene abscisa x y ordenada y , la gráfica de la función f consta de los puntos (x, y) que verifican dos condiciones: $x \in A$ e $y = f(x)$.



Intuitivamente, para cada $x \in A$, la recta vertical formada por todos los puntos de abscisa x contiene un único punto de la gráfica, el que tiene ordenada $f(x)$, mientras que si $x \notin A$, dicha recta tiene intersección vacía con la gráfica de f .

Obsérvese que la gráfica de una función determina perfectamente a dicha función, definir una función f es exactamente lo mismo que definir el conjunto $\text{Gr } f$. Geométricamente, al proyectar el conjunto $\text{Gr } f$ sobre el eje de abscisas, obtenemos el conjunto A en el que f está definida y, para cada $x \in A$, $f(x)$ es el único $y \in \mathbb{R}$ que verifica la condición $(x, y) \in \text{Gr } f$.

Por tanto es natural preguntarse qué condición (necesaria y suficiente) debe cumplir un conjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^2$ para ser la gráfica de una función real de variable real. La respuesta es fácil de adivinar: para cada $x \in \mathbb{R}$ la intersección de E con la recta vertical de abscisa x debe contener a lo sumo un punto, es decir, debe ser vacía o reducirse a un punto. Hemos visto antes la necesidad de esta condición, puesto que la gráfica de una función siempre la verifica, pero la suficiencia también está muy clara.

Junto con la interpretación geométrica ya comentada, en el estudio de las funciones reales de variable real, conviene tener presente la que suele llamarse interpretación *física*, pues es la que da lugar a las aplicaciones de estas funciones en Física, o en cualquier otra ciencia.

Para explicarla, recordemos la interpretación física de los números reales: permiten *medir* ciertas magnitudes físicas, es decir, expresar la relación que guarda cualquier cantidad de una tal magnitud, con una fija que se toma como unidad. Son las magnitudes que se suelen llamar *escalares*, como longitud, masa, tiempo, temperatura, carga eléctrica, etc. Fijada la unidad de medida, el conjunto de los valores que una magnitud escalar puede tomar en un problema físico concreto, es un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$.

Pues bien, sea $A \subset \mathbb{R}$ el conjunto de posibles valores de una magnitud P , involucrada en un proceso físico. Si a cada valor $x \in A$, corresponde un único valor $y \in \mathbb{R}$ de otra magnitud Q , podemos definir $f(x) = y$, para todo $x \in A$, obteniendo una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, que nos permite obtener el valor de Q siempre que conozcamos el valor de P . Es por ello que suele decirse que Q es función de P . Así pues, una función real de variable real es el modelo matemático que permite describir la relación entre dos magnitudes escalares, siempre que el valor de una de ellas esté determinado en forma única por el valor de la otra.

Por ejemplo, en un movimiento rectilíneo, es claro que la posición del móvil es función del tiempo. Fijado un origen de tiempo y una unidad para medirlo, el periodo de observación del movimiento se describe mediante un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, así que cada $t \in A$ representa un instante. Típicamente, elegimos como origen el instante inicial de la observación y el conjunto A suele ser un intervalo $[0, T]$ con $T \in \mathbb{R}^+$. Si en la recta donde se produce el movimiento hemos fijado también un origen y una unidad de longitud, es claro que en cada instante $t \in A$ el móvil ocupará una posición bien determinada sobre la recta, que se corresponde con un número real s . Puesto que s está determinado por t en forma única, podemos definir $f(t) = s$ para todo $t \in A$, y tenemos una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ que describe perfectamente el movimiento, puesto que nos dice, en cada instante $t \in A$, la posición del móvil $s = f(t)$. Por ello suele decirse que $s = f(t)$ es la *ecuación del movimiento*.

12.2. Suma y producto de funciones

Las operaciones con números reales dan lugar fácilmente a operaciones con funciones, que ahora vamos a comentar. Para mayor comodidad, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en \mathbb{R} .

Pues bien, para dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$, definimos su *suma* $f + g \in \mathcal{F}(A)$ escribiendo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$$

Nótese que usamos el mismo nombre y el mismo signo para denotar dos operaciones distintas, que no debemos confundir: a la derecha tenemos la suma en \mathbb{R} (suma de números reales), mientras en el primer miembro tenemos la suma en el conjunto $\mathcal{F}(A)$ (suma de funciones).

Las propiedades de la suma de números reales se trasladan automáticamente a la suma de funciones. En concreto, la suma de funciones es asociativa y conmutativa, y admite como elemento neutro a la función $f_0 \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_0(x) = 0$ para todo $x \in A$, la función *constantemente igual a cero* en A . Es usual denotar por 0 a esta función, por lo que conviene aclarar que, para $f \in \mathcal{F}(A)$, la igualdad $f = 0$ significa que $f(x) = 0$ para *todo* $x \in A$, mientras que $f \neq 0$ significa que *existe* un $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

Además, todo elemento $f \in \mathcal{F}(A)$ admite un elemento simétrico respecto de la suma, la función $-f \in \mathcal{F}(A)$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in A$. Naturalmente, decimos que $-f$ es la *función opuesta* de f . Para $g \in \mathcal{F}(A)$, podemos por tanto considerar la *diferencia* $g - f = g + (-f) \in \mathcal{F}(A)$, y es claro que $(g - f)(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in A$.

En resumen, al igual que le ocurría a \mathbb{R} , el conjunto $\mathcal{F}(A)$, con la suma recién definida, es un grupo abeliano.

Para dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$, definimos ahora su *producto* $fg \in \mathcal{F}(A)$, escribiendo

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in A$$

Este producto es asociativo, conmutativo y distributivo con respecto a la suma. Además, admite como elemento neutro a la función $f_1 \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_1(x) = 1$ para todo $x \in A$, la función *constantemente igual a uno* en A . Así pues el conjunto $\mathcal{F}(A)$, con las operaciones de suma y producto recién definidas, es un anillo conmutativo con unidad.

Es claro que una función $f \in \mathcal{F}(A)$ admite un elemento simétrico respecto del producto si, y sólo si, verifica que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, en cuyo caso dicho elemento simétrico es la función $1/f \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in A$$

No es conveniente usar la notación f^{-1} para la función $1/f$ recién definida, ya que dicha notación se reserva para la función inversa de f en un sentido completamente diferente. Ni que decir tiene, si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, podemos considerar la función *cociente* $g/f \in \mathcal{F}(A)$, dada por

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad \forall x \in A$$

Ha aparecido aquí la primera diferencia importante entre el producto de números reales y el producto de funciones. Recordemos si $f \in \mathcal{F}(A)$ y $f \neq 0$, sólo sabemos que existe $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$. Salvo en el caso trivial de que el conjunto A se reduzca a un punto, esto no implica que se tenga $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, que es lo que f ha de cumplir para admitir un elemento simétrico con respecto al producto. Así pues, salvo que el conjunto A se reduzca a un punto, $\mathcal{F}(A)$ no es un cuerpo.

Para el conjunto $\mathcal{F}(A)$ cabe considerar una tercera operación, el producto de un número real α por una función $f \in \mathcal{F}(A)$, para obtener la función $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in A$$

Se comprueba rutinariamente que, con la suma ya conocida y el *producto por escalares* así definido, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} . Ahora bien, dicho producto por escalares puede verse como caso particular del producto de funciones. Para ello, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, basta usar la función *constantemente igual a α* en A , es decir, la función $f_\alpha \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_\alpha(x) = \alpha$ para todo $x \in A$. Para cualquier función $f \in \mathcal{F}(A)$, es evidente que el producto de funciones $f_\alpha f$ coincide con la función αf . Así pues, la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$ queda de alguna forma englobada en su estructura de anillo. Ello no es óbice para que en ciertos casos, sea útil considerar en $\mathcal{F}(A)$ nociones típicas de los espacios vectoriales (combinaciones lineales, subespacios, etcétera).

12.3. Composición, función inversa, restricción

Veremos ahora otras operaciones importantes con funciones reales de variable real, que involucran funciones definidas en conjuntos que pueden ser diferentes. Conviene previamente resaltar que la *imagen* de una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, es decir, el conjunto de los valores que toma la función f .

La interpretación geométrica está bien clara: del mismo modo que al proyectar la gráfica de f sobre el eje de abscisas obteníamos el conjunto A en el que f está definida, al proyectarla sobre el eje de ordenadas obtenemos el conjunto $f(A)$, la imagen de f .

Frecuentemente será útil considerar a f como una aplicación *sobreyectiva* de A en $f(A)$. Sin embargo, conviene comentar que, en general, calcular explícitamente la imagen de una función, puede ser difícil. Baste pensar que, dado $y \in \mathbb{R}$, saber si $y \in f(A)$ es tanto como saber si la ecuación $f(x) = y$ tiene al menos una solución $x \in A$, pero dicha ecuación puede ser bastante complicada.

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones verificando que $f(A) \subset B$, podemos definir la *composición de f con g* , que es la función $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Para tener un ejemplo concreto, podemos usar la *función valor absoluto*, es decir, la función $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, la inclusión $f(A) \subset \mathbb{R}$ es obvia, luego tiene sentido considerar la función $V \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(V \circ f)(x) = V(f(x)) = |f(x)|$ para todo $x \in A$, que suele denotarse por $|f|$. Así pues, $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in A$.

Recordemos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es *inyectiva* cuando nunca toma el mismo valor en dos puntos distintos del conjunto A , es decir, cuando

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

Geométricamente, esto significa que la gráfica de f no puede contener dos puntos distintos que tengan la misma ordenada, es decir, que la intersección de la gráfica de f con cualquier recta horizontal contiene, a lo sumo, un punto.

Si una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva, siempre podemos verla como aplicación *biyectiva* de A sobre $f(A)$, y considerar la *función inversa*, que es la función $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ definida como sigue: para cada $y \in f(A)$, $f^{-1}(y)$ es el único $x \in A$ que verifica $f(x) = y$. Obsérvese que tiene sentido considerar la composición $f^{-1} \circ f$ y también $f \circ f^{-1}$, verificándose que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(A)$$

Decimos que $f^{-1} \circ f$ es la función *identidad* en el conjunto A y $f \circ f^{-1}$ es la identidad en $f(A)$. Obsérvese que f^{-1} también es inyectiva y su inversa es f , es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ya se ha comentado que dos funciones definidas en conjuntos diferentes son distintas. En ocasiones resulta útil modificar precisamente el conjunto de definición de una función, para obtener *otra* función, definida en un subconjunto del de partida. Esto es lo que se entiende por restringir una función.

Concretamente, dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$, la *restricción de f a B* es la función $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$$

Si ponemos $g = f|_B$, podemos decir que g es una restricción de f y también es frecuente decir que f es una *extensión* de g .

12.4. Funciones continuas

De manera informal, una función f será continua en un punto x , cuando al acercarnos al punto x , los valores de la función se acerquen a $f(x)$. Esta idea intuitiva se puede concretar de diversas formas, que veremos son equivalentes. Como definición de función continua usamos una condición que nos resultará muy manejable, porque conocemos bien la convergencia de sucesiones. Se basa en que una forma natural de acercarnos a un punto x consiste en usar una sucesión convergente a x .

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x \in A$. Se dice que f es *continua en el punto x* cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converja a x , se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Simbólicamente:

$$x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$$

Obsérvese que no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición.

Para un subconjunto no vacío $B \subset A$, diremos que f es *continua en B* cuando sea continua en todos los puntos de B . En particular puede ser $B = A$, así que f será continua en A cuando sea continua en cada punto de A . En tal caso es frecuente decir simplemente que f es *continua*, aunque con ello no se abrevia demasiado. Así pues, cuando decimos sin más que una función es continua, queremos decir que es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.

Para mayor generalidad y para evitar repeticiones, en varios resultados sobre la continuidad de una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, trabajaremos preferentemente con la continuidad en un conjunto $B \subset A$, aunque nos interesan principalmente los casos extremos: el caso en que B se reduce a un punto y el caso $B = A$.

Como primeros ejemplos de funciones continuas, tenemos las constantes. Decimos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es *constante* cuando existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$ para todo $x \in A$. Es obvio que tales funciones son continuas. Claramente, la función *identidad* en un conjunto A , definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$, también es continua. Las reglas de cálculo de límites nos permitirán operar con funciones continuas para obtener nuevos ejemplos.

- Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en un conjunto no vacío $B \subset A$. Entonces, la suma $f + g$ y el producto fg también son funciones continuas en B .

La comprobación de este hecho es inmediata: si $x \in B$ y $\{x_n\} \rightarrow x$, con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por ser f y g continuas en el punto x , sabemos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ y $\{g(x_n)\} \rightarrow g(x)$, luego

$$\begin{aligned} \{(f + g)(x_n)\} &= \{f(x_n) + g(x_n)\} \rightarrow f(x) + g(x) = (f + g)(x) & \text{y} \\ \{(fg)(x_n)\} &= \{f(x_n)g(x_n)\} \rightarrow f(x)g(x) = (fg)(x) \end{aligned}$$

Por tanto, $f + g$ y fg son continuas en el punto x , lo cual ocurre para todo $x \in B$. ■

Así pues, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, y recordando el anillo $\mathcal{F}(A)$ de todas las funciones definidas en A , vemos que las funciones continuas forman un subanillo, y también un subespacio vectorial, de $\mathcal{F}(A)$.

A partir de las funciones constantes y la función identidad, mediante sumas y productos obtenemos funciones definidas por polinomios. Mas concretamente, se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *polinómica* cuando existen $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p = \sum_{k=0}^p a_kx^k \quad \forall x \in A$$

Como hemos comentado, *toda función polinómica es continua*, pero estudiando el cociente de funciones continuas conseguiremos algo mejor.

- Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, y sea B un subconjunto no vacío de A . Si f y g son continuas en B , entonces la función cociente f/g también es continua en B .

En efecto, si $x \in B$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow x$, se tiene:

$$\left\{ \frac{f}{g}(x_n) \right\} = \left\{ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right\} \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x) \quad \blacksquare$$

Los cocientes de funciones polinómicas son las funciones racionales. Más concretamente, se dice que $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *racional*, cuando existen funciones polinómicas $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ y $h = \frac{f}{g}$. Como ya sabemos que las funciones polinómicas son continuas, tenemos:

- *Toda función racional es continua.*

Un nuevo ejemplo es la función valor absoluto. Si una sucesión $\{x_n\}$ converge, digamos $\{x_n\} \rightarrow x \in \mathbb{R}$, entonces $\{|x_n|\} \rightarrow |x|$. Así que *la función valor absoluto es continua*. Es fácil comprobar que no es una función racional, aunque sus restricciones a \mathbb{R}_0^+ y a \mathbb{R}_0^- son funciones polinómicas bien sencillas.

Veamos ahora que la composición de funciones conserva la continuidad:

- Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset C$. Si f es continua en un conjunto $B \subset A$ y g es continua en $f(B)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en B . En particular, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Sea $x \in B$ y $\{x_n\} \rightarrow x$ con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser f continua en x , tenemos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$, luego $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de puntos de C que converge a $f(x)$. Como g continua en el punto $f(x)$, concluimos que $\{g(f(x_n))\} \rightarrow g(f(x))$. ■

Componiendo con la función valor absoluto, obtenemos nuevas funciones continuas:

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y B un subconjunto no vacío de A . Si f es continua en B , entonces la función $|f|$ también es continua en B .

El recíproco del resultado anterior no es cierto, como se verá con nuestro primer ejemplo de una función que está muy lejos de ser continua. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ y consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \beta & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dado un $x \in \mathbb{R}$, la densidad de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} nos asegura que existen una sucesión $\{y_n\}$ de números racionales y una sucesión $\{z_n\}$ de números irracionales, ambas convergentes a x . Puesto que, evidentemente, $\{f(y_n)\} \rightarrow \alpha$ y $\{f(z_n)\} \rightarrow \beta$, si f fuese continua en el punto x , se tendría $\alpha = f(x) = \beta$, lo cual es una contradicción. Por tanto f no es continua en ningún punto de \mathbb{R} . En el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, la función f recién definida se conoce como *función de Dirichlet*. Tomando $\beta = -\alpha \neq 0$, es claro que la función $|f|$ es constante, luego continua en \mathbb{R} , mientras que, como hemos visto, f no es continua en ningún punto de \mathbb{R} .

Relacionada con la composición de aplicaciones, está la inversa de una función inyectiva. Veremos más adelante que la inversa de una función continua e inyectiva puede no ser continua. Encontraremos también hipótesis adicionales que nos permitan obtener la continuidad de la función inversa.

12.5. Carácter local de la continuidad

Vamos a discutir brevemente la relación entre la continuidad de una función y la de sus restricciones. En primer lugar es claro que, al restringir una función, se conserva la continuidad:

- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $B \subset A$ y $x \in B$. Si f es continua en el punto x , entonces $f|_B$ también es continua en x .

En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a x , evidentemente $\{x_n\}$ es también una sucesión de puntos de A . Por ser f continua en x , tenemos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$, es decir, $\{f|_B(x_n)\} \rightarrow f|_B(x)$, como queríamos. ■

El recíproco del resultado anterior es claramente falso, basta pensar lo que ocurre cuando B se reduce a un punto: $B = \{x\}$. Trivialmente, cualquier función definida en B es continua (es constante). Por tanto, si A es cualquier conjunto que contenga al punto x y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función, $f|_B$ siempre será continua en el punto x y eso no puede implicar que f sea continua en x . Simplemente ocurre que el conjunto B es demasiado pequeño.

Considerando la función de Dirichlet, nos orientaremos mejor sobre lo que puede ocurrir, aunque el conjunto B no sea tan reducido. Si f es la función de Dirichlet, es claro que $f|_{\mathbb{Q}}$ es constante, luego continua, pero f no es continua en ningún punto de \mathbb{Q} . Considerando la restricción de f a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tenemos la misma situación. Esta vez no podemos argumentar que el conjunto \mathbb{Q} , no digamos $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sea pequeño. Lo que ocurre es que para la continuidad de $f|_{\mathbb{Q}}$ sólo consideramos sucesiones de números racionales, mientras que para la continuidad de f debemos usar sucesiones de números reales cualesquiera.

En general, si de la continuidad de la restricción $f|_B$ en un punto $x \in B$ queremos deducir que f es continua en x , el conjunto B no debe reducir significativamente las posibilidades de aproximarnos al punto x . Ello se consigue con una hipótesis muy natural:

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $x \in B \subset A$. Supongamos que existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$]x - \delta, x + \delta[\cap A \subset B$$

Si $f|_B$ es continua en el punto x , entonces f también es continua en x .

La demostración de este hecho es bien sencilla. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow x$. Por definición de sucesión convergente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > m$ se tiene $|x_n - x| < \delta$ y, por tanto, $x_n \in]x - \delta, x + \delta[\cap A \subset B$. Entonces $\{x_{m+n}\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a x y la continuidad de $f|_B$ en x nos dice que $\{f|_B(x_{m+n})\} \rightarrow f|_B(x)$, es decir, $\{f(x_{m+n})\} \rightarrow f(x)$. Deducimos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$, luego f es continua en x . ■

Es frecuente aludir al resultado recién obtenido diciendo que la continuidad es una propiedad que tiene carácter *local*. Conviene resaltar con más detalle lo que esto significa.

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, para cualquier $x \in A$, siempre podemos tomar en el resultado anterior $B =]x - \delta, x + \delta[\cap A$, donde $\delta > 0$ se puede elegir con total libertad. Obtenemos que f es continua en x si, y sólo si, $f|_B$ es continua en x . Al pasar de f a $f|_B$, lo que hacemos es olvidar los valores de f en los puntos de $A \setminus B$, es decir, considerar solamente los valores de f en puntos suficientemente próximos a x , a distancia menor que un $\delta > 0$ arbitrariamente fijado. Por tanto, vemos que la continuidad de una función en cada punto x sólo depende de los valores de la función en puntos suficientemente próximos a x . A esto nos referimos al hablar del carácter local de la continuidad. Veamos un ejemplo en que este carácter local nos ayuda a estudiar la continuidad de una función interesante.

Consideremos la *función parte entera*, es decir, la función $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \text{máx} \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y recordemos que, para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene $E(x) = k$ si, y sólo si, $k \leq x < k + 1$.

Fijado $x \in \mathbb{Z}$, tomemos $x_n = x - (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que claramente $\{x_n\} \rightarrow x$. Puesto que $x - 1 \leq x_n < x$, tenemos $E(x_n) = x - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{E(x_n)\} \rightarrow x - 1$. Como $E(x) = x \neq x - 1$, vemos que E no es continua en el punto x . Así pues, la función parte entera no es continua en ningún punto de \mathbb{Z} .

Usando el carácter local de la continuidad, veremos fácilmente que E es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Fijado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, por ser $E(x) < x < E(x) + 1$ podemos tomar $\delta > 0$ de forma que se tenga $E(x) < x - \delta < x + \delta < E(x) + 1$. Considerando el conjunto $B =]x - \delta, x + \delta[$, es claro que, para todo $y \in B$, se tiene $E(x) < y < E(x) + 1$, luego $E(y) = E(x)$. Así pues, la función $E|_B$ es constante, luego es continua en el punto x , y el carácter local de la continuidad nos asegura que E también lo es.

12.6. Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Dar un ejemplo de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en 0 pero no sea continua en ningún otro punto de \mathbb{R} .
3. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y supongamos que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Probar que $f = g$.
4. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y deducir que f es continua.

5. Estudiar la continuidad de las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = E(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(0) = 1$$

6. Dadas dos funciones $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos las funciones $\varphi, \psi: A \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in A$$

Probar que si f y g son continuas en un conjunto no vacío $B \subset A$, entonces φ y ψ también son continuas en B .