

Cálculo I

Capítulo 1: Números Reales

1 Definición de \mathbb{R}

- Axiomas de cuerpo conmutativo
- Axiomas de orden
- Valor absoluto

2 Subconjuntos destacados de \mathbb{R}

- Números naturales
- Números enteros
- Números racionales

3 Tamaño de conjuntos

- Conjuntos finitos
- Conjuntos numerables

4 Principales resultados

- Esquema resumen
- Supremo e ínfimo
- Raíz n -ésima. Números irracionales
- Propiedad arquimediana. Densidad de \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- Intervalos
- No numerabilidad de \mathbb{R}

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ **Producto:** $(x,y) \mapsto xy$

- **A1. Asociatividad:** $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- **A2. Conmutatividad:** $x+y = y+x$, $xy = yx$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$
- **A3. Distributividad:** $x(y+z) = xy+xz$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- **A4. Neutros:** $0 \neq 1$, $x+0 = x$, $x1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- **A5. Simétricos:** $x+(-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $xx^{-1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resumen: \mathbb{R} es un cuerpo conmutativo

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de \mathbb{R}
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leq y \iff y-x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies x+z \leq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad xw \leq yw \quad \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: \mathbb{R} es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

- A8. Axioma del continuo:

$$\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}, \quad a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

\mathbb{R} es un cuerpo conmutativo ordenado, verificando el axioma del continuo.

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x \leq |x|$, $|x| = |-x|$, $|x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$; $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

Números naturales. Inducción

Definición de \mathbb{N}

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **inductivo** cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

\mathbb{N} es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de \mathbb{R}

\mathbb{N} es inductivo y $n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Principio de inducción

$A \subset \mathbb{N}$, A inductivo $\implies A = \mathbb{N}$

Operaciones con números naturales

$m, n \in \mathbb{N}$:

- $m+n, mn \in \mathbb{N}$
- $m-n \in \mathbb{N} \iff n < m$
- $1/n \in \mathbb{N} \iff n = 1$

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, n < m \implies n + 1 \leq m$$

Máximo y mínimo

$$A \subset \mathbb{R}, a \in A$$

- $a = \text{máx}A \iff a \geq x \forall x \in A$
- $a = \text{mín}A \iff a \leq x \forall x \in A$

Buena ordenación

\mathbb{N} está bien ordenado

es decir,

Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n$; $x^{mn} = (x^m)^n$; $(xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x, n < m \implies x^n < x^m$; $0 \leq x < y \implies x^n < y^n$
- **Binomio de Newton:** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- **Suma de potencias:** $x \neq 1, \alpha \in \mathbb{R} \implies \sum_{k=0}^n \alpha x^k = \frac{\alpha x^{n+1} - \alpha}{x - 1}$
- **Consecuencia:** $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$

Números enteros

Definición de \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$$p, q \in \mathbb{Z}$$

- $p \pm q, pq \in \mathbb{Z}$
- $p^{-1} \in \mathbb{Z} \iff p = \pm 1$

Orden de los números enteros

- Siguiente: $p, q \in \mathbb{Z}, p < q \implies p + 1 \leq q$
- \mathbb{Z} no tiene mínimo, luego no está bien ordenado

Números racionales

Definición de \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s, rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

\mathbb{Q} es un cuerpo conmutativo

Orden de los números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q}, r < s \implies \frac{r+s}{2} \in \mathbb{Q}, r < \frac{r+s}{2} < s$
- \mathbb{Q} es un cuerpo conmutativo ordenado

Conjuntos equipotentes

$A \sim B \iff \exists f: A \rightarrow B$ biyectiva
relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N}, I_n \sim I_m \implies m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es **finito**, con n elementos

\emptyset es finito con 0 elementos

A es **infinito** cuando no es finito

Subconjuntos finitos de \mathbb{R}

Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.

Propiedades de los conjuntos finitos

- A finito, $f: B \rightarrow A$ inyectiva $\implies B$ finito
- A finito, $f: A \rightarrow B \implies f(A)$ finito

Definición de conjunto numerable

A es **numerable** cuando existe $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, n < m \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a \mathbb{N}

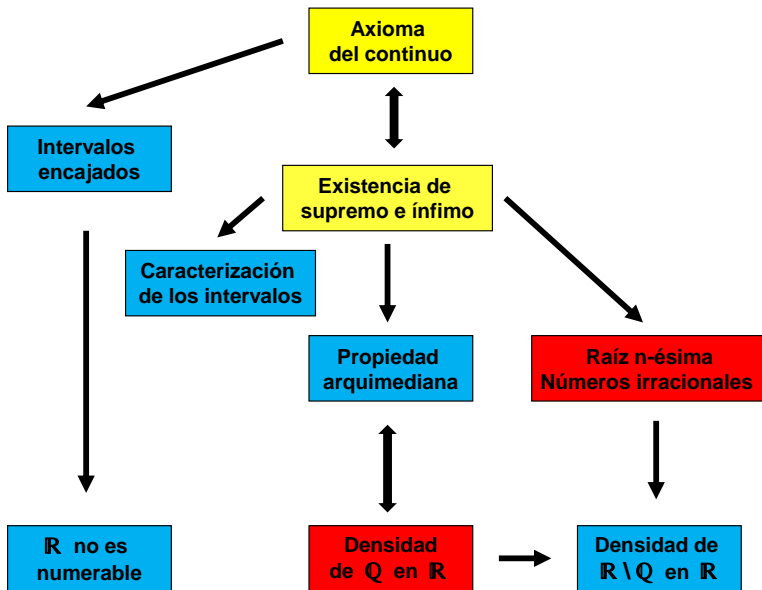
Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \rightarrow A$ inyectiva $\implies B$ numerable
- A numerable, $f : A \rightarrow B \implies f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies A \times B$ numerable
- Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable:
 $\emptyset \neq I$ numerable, A_i numerable $\forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i$ numerable

Ejemplos de conjuntos numerables

- $\mathbb{N} \sim \{2n : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n \in \mathbb{N} : n \text{ primo}\}$
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

Esquema resumen



Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \Leftrightarrow x \geq a, \forall a \in A$
- x minorante de $A \Leftrightarrow x \leq a, \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado = mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo, es decir, el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo y máximo, ínfimo y mínimo

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, A$ mayorado:
 A tiene máximo $\Leftrightarrow \sup A \in A$, en cuyo caso: $\text{máx}A = \sup A$
- A minorado:
 A tiene mínimo $\Leftrightarrow \inf A \in A$, en cuyo caso: $\text{mín}A = \inf A$

Raíz n -ésima. Números irracionales

Raíz n -ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n -ésima de x : $y = \sqrt[n]{x}$

Existencia de irracionales

$$n, m \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{7} \dots$ son irracionales
- $r, s \in \mathbb{Q}, s \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies r + s\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana. Densidad de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

 $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies A$ tiene máximo.

Por tanto, \mathbb{N} no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

- A minorado $\implies A$ tiene mínimo.
- A acotado $\implies A$ es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente: $E(x)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leq x < k+1$

Densidad de \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en \mathbb{R}

- \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} : $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en \mathbb{R} : $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < \beta < y$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama **intervalos** a los subconjuntos de \mathbb{R} de los siguientes tipos:

- \emptyset y \mathbb{R}
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$:
 - Cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
 - Abierto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
 - Semiabierto por la izquierda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
 - Semiabierto por la derecha: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
 - Hacia la derecha, cerrada: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
 - Hacia la derecha, abierta: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
 - Hacia la izquierda, cerrada: $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
 - Hacia la izquierda, abierta: $] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Caracterización de los intervalos

Para un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, son equivalentes:

- I es un intervalo
- $x, y \in I, x < y, z \in \mathbb{R}, x < z < y \implies z \in I$

No numerabilidad de \mathbb{R}

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n ,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

\mathbb{R} no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, \mathbb{R} no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número **algebraico** cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.
Un número real es **trascendente** cuando no es algebraico.

Abundancia de números trascendentes

El conjunto \mathbb{A} de los números algebraicos es numerable.
Por tanto, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ de los números trascendentes no es numerable.