Cálculo I

Capítulo 1: Números Reales

1. Definición de $\mathbb{R}$
   - Axiomas de cuerpo conmutativo
   - Axiomas de orden
   - Valor absoluto

2. Subconjuntos destacados de $\mathbb{R}$
   - Números naturales
   - Números enteros
   - Números racionales

3. Tamaño de conjuntos
   - Conjuntos finitos
   - Conjuntos numerables

4. Principales resultados
   - Esquema resumen
   - Supremo e ínfimo
   - Raíz n-ésima. Números irracionales
   - Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - Intervalos
   - No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A2. Conmutatividad: $x+y = y+x\,,\quad xy = yx\,,\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A2. Conmutatividad: $x+y = y+x\,, \quad xy = yx\,, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
- A3. Distributividad: $x(y+z) = xy+xz\,, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A2. Conmutatividad: $x+y = y+x\,,\quad xy = yx\,,\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
- A3. Distributividad: $x(y+z) = xy+xz\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A4. Neutros: $0 \neq 1\,,\quad x+0 = x\,,\quad x1 = x\,,\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A2. Conmutatividad: $x+y = y+x\,,\quad xy = yx\,,\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
- A3. Distributividad: $x(y+z) = xy+xz\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A4. Neutros: $0 \neq 1\,,\quad x+0 = x\,,\quad x1 = x\,,\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- A5. Simétricos: $x+(-x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R};\quad xx^{-1} = 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Axiomas de cuerpo conmutativo

Operaciones algebraicas

Suma: $(x,y) \mapsto x+y$ Producto: $(x,y) \mapsto xy$

- A1. Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z)\,,\ (xy)z = x(yz)\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A2. Conmutatividad: $x+y = y+x\,,\quad xy = yx\,,\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
- A3. Distributividad: $x(y+z) = xy+xz\,,\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
- A4. Neutros: $0 \neq 1\,,\quad x+0 = x\,,\quad x1 = x\,,\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- A5. Simétricos: $x+(-x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R};\quad xx^{-1} = 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resumen: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo

Axiomas de orden

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y, xy \in \mathbb{R}^+$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ **Negativos**: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- **A6. Tricotomía**: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- **A7. Estabilidad**: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x + y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ **Negativos**: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- **A6. Tricotomía**: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- **A7. Estabilidad**: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z \ \ \forall z \in \mathbb{R}, \ \ xw \leqslant yw \ \ \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x + y, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad xw \leqslant yw \quad \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z \ \ \forall z \in \mathbb{R}, \ \ xw \leqslant yw \ \ \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x + y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z \ \ \forall z \in \mathbb{R},\ \ xw \leqslant yw \ \ \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

- A8. Axioma del continuo:

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad xw \leqslant yw \quad \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

- A8. Axioma del continuo:

$$\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z \quad \forall z \in \mathbb{R},\quad xw \leqslant yw \quad \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

- A8. Axioma del continuo:

$$\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R},\quad a \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$
$$\Downarrow$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \ :\ a \leqslant x \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Axiomas de orden

Números positivos y negativos

Positivos: $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Negativos: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

- A6. Tricotomía: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$, partición de $\mathbb{R}$
- A7. Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x+y,\, xy \in \mathbb{R}^+$

Relación de orden total: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z \ \ \forall z \in \mathbb{R},\ \ xw \leqslant yw \ \ \forall w \in \mathbb{R}^+$$

Resumen A1-A7: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Axioma del continuo

- A8. Axioma del continuo:

$$\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R},\ \ a \leqslant b \ \ \forall a \in A,\ \forall b \in B$$
$$\Downarrow$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \ :\ a \leqslant x \leqslant b \ \ \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

$\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado, verificando el axioma del continuo.

Valor absoluto

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0\,; \qquad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0\,; \qquad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $x \leqslant |x|\,, \quad |x| = |-x|\,, \quad |x|^2 = x^2$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0\,; \qquad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $x \leqslant |x|\,, \quad |x| = |-x|\,, \quad |x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x|\,|y|$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0\,; \qquad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $x \leqslant |x|\,, \quad |x| = |-x|\,, \quad |x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y\,; \quad |x| < y \;\Leftrightarrow\; -y < x < y$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0; \quad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $x \leqslant |x|, \quad |x| = |-x|, \quad |x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y; \quad |x| < y \;\Leftrightarrow\; -y < x < y$
- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x| \geqslant 0\,; \qquad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $x \leqslant |x|\,, \quad |x| = |-x|\,, \quad |x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y\,; \quad |x| < y \;\Leftrightarrow\; -y < x < y$
- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$
- $|x + y| = |x| + |y| \;\Leftrightarrow\; xy \geqslant 0$

Números naturales. Inducción

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ es inductivo y $n \geqslant 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ es inductivo y $n \geqslant 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Principio de inducción

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \ \ A \ \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \ \ A \ \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Operaciones con números naturales

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \quad A \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Operaciones con números naturales

$m, n \in \mathbb{N}$:

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \ \ A \ \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Operaciones con números naturales

$m,n \in \mathbb{N}$:

- $m+n\,,\, mn \in \mathbb{N}$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \ \ A \ \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Operaciones con números naturales

$m, n \in \mathbb{N}$:

- $m+n\,,\, mn \in \mathbb{N}$
- $m-n \in \mathbb{N} \iff n < m$

Números naturales. Inducción

Definición de $\mathbb{N}$

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando:

- $1 \in A$
- $x \in A \implies x+1 \in A$

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \text{ es inductivo} \quad \text{y} \quad n \geqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Principio de inducción

$$A \subset \mathbb{N}, \quad A \ \text{ inductivo} \implies A = \mathbb{N}$$

Operaciones con números naturales

$m, n \in \mathbb{N}$:

- $m+n\,,\, mn \in \mathbb{N}$
- $m-n \in \mathbb{N} \iff n < m$
- $1/n \in \mathbb{N} \iff n = 1$

Orden de los números naturales

Orden de los números naturales

Siguiente

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n + 1 \leqslant m$$

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n + 1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}, \ a \in A$

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n+1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}, \; a \in A$

- $a = \text{máx} A \iff a \geqslant x \;\; \forall x \in A$

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n+1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}, \ a \in A$

- $a = \max A \iff a \geqslant x \ \forall x \in A$
- $a = \min A \iff a \leqslant x \ \forall x \in A$

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n + 1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$

- $a = \max A \iff a \geqslant x \ \forall x \in A$
- $a = \min A \iff a \leqslant x \ \forall x \in A$

Buena ordenación

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n+1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}, \; a \in A$

- $a = \max A \iff a \geqslant x \;\; \forall x \in A$
- $a = \min A \iff a \leqslant x \;\; \forall x \in A$

Buena ordenación

$\mathbb{N}$ está bien ordenado

Orden de los números naturales

Siguiente

$$n,m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies n+1 \leqslant m$$

Máximo y mínimo

$A \subset \mathbb{R}, \ a \in A$

- $a = \text{máx} A \iff a \geqslant x \ \forall x \in A$
- $a = \text{mín} A \iff a \leqslant x \ \forall x \in A$

Buena ordenación

$\mathbb{N}$ está bien ordenado

es decir,

Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo

Potencias de exponente natural

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \; m, n \in \mathbb{N}$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \ m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n$;

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R},\; m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \;;\quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \;;$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \ m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \ ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \ ; \quad (xy)^n = x^n y^n$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \ ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \ ; \quad (xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x,\ n < m \implies x^n < x^m \ ;$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \ m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \ ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \ ; \quad (xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x, \ n < m \implies x^n < x^m \ ; \quad 0 \leqslant x < y \implies x^n < y^n$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \; m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \; ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \; ; \quad (xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x, \; n < m \implies x^n < x^m \; ; \quad 0 \leqslant x < y \implies x^n < y^n$
- Binomio de Newton: $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \; m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \; ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \; ; \quad (xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x, \; n < m \implies x^n < x^m \; ; \quad 0 \leqslant x < y \implies x^n < y^n$
- Binomio de Newton: $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- Suma de potencias: $x \neq 1, \; \alpha \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow \;\; \displaystyle \sum_{k=0}^{n} \alpha x^k = \frac{\alpha x^{n+1} - \alpha}{x - 1}$

Potencias de exponente natural

Definición de las potencias

Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define x^n por inducción:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se define también $x^0 = 1$.

Propiedades de las potencias

$x, y \in \mathbb{R}, \ m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n \ ; \quad x^{mn} = \left(x^m\right)^n \ ; \quad (xy)^n = x^n y^n$
- $1 < x, \ n < m \implies x^n < x^m \ ; \quad 0 \leqslant x < y \implies x^n < y^n$
- Binomio de Newton: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- Suma de potencias: $x \neq 1, \ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha x^k = \frac{\alpha x^{n+1} - \alpha}{x - 1}$
- Consecuencia: $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k$

Números enteros

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

- $p \pm q\, , \, pq \in \mathbb{Z}$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

- $p \pm q\,,\, pq \in \mathbb{Z}$
- $p^{-1} \in \mathbb{Z} \iff p = \pm 1$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

- $p \pm q\,,\ pq \in \mathbb{Z}$
- $p^{-1} \in \mathbb{Z} \iff p = \pm 1$

Orden de los números enteros

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

- $p \pm q \, , \, pq \in \mathbb{Z}$
- $p^{-1} \in \mathbb{Z} \iff p = \pm 1$

Orden de los números enteros

- Siguiente: $p, q \in \mathbb{Z} \, , \; p < q \implies p + 1 \leqslant q$

Números enteros

Definición de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Operaciones con números enteros

$p, q \in \mathbb{Z}$

- $p \pm q\,,\, pq \in \mathbb{Z}$
- $p^{-1} \in \mathbb{Z} \iff p = \pm 1$

Orden de los números enteros

- Siguiente: $p, q \in \mathbb{Z}\,,\; p < q \implies p + 1 \leqslant q$
- $\mathbb{Z}$ no tiene mínimo, luego no está bien ordenado

Números racionales

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s\,,\, rs \in \mathbb{Q}$

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s\, , rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s\,,\, rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s\,,\ rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo

Orden de los números racionales

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s\,, rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo

Orden de los números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q},\ r < s \implies \dfrac{r+s}{2} \in \mathbb{Q},\quad r < \dfrac{r+s}{2} < s$

Números racionales

Definición de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Operaciones con números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q} \implies r \pm s,\ rs \in \mathbb{Q}$
- $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0 \implies r^{-1} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo

Orden de los números racionales

- $r, s \in \mathbb{Q},\ r < s \implies \dfrac{r+s}{2} \in \mathbb{Q},\quad r < \dfrac{r+s}{2} < s$
- $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo ordenado

Conjuntos equipotentes

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow \ m = n$$

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow\ m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow \ m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow\ m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists\, f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow\ m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Subconjuntos finitos de ℝ

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N}, \; I_n \sim I_m \;\Rightarrow\; m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$

Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N}, \; I_n \sim I_m \;\Rightarrow\; m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$

Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.

Propiedades de los conjuntos finitos

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N}, \; I_n \sim I_m \;\Rightarrow\; m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$

Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.

Propiedades de los conjuntos finitos

- A finito, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B finito

Conjuntos equipotentes

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B \quad \text{biyectiva}$$

relación reflexiva, simétrica y transitiva

Conjuntos finitos e infinitos

$$n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$n, m \in \mathbb{N},\ I_n \sim I_m \ \Rightarrow\ m = n$$

Si $A \sim I_n$ decimos que A es finito, con n elementos

$\emptyset$ es finito con 0 elementos

A es infinito cuando no es finito

Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$

Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.

Propiedades de los conjuntos finitos

- A finito, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B finito
- A finito, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ finito

Definición de conjunto numerable

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:

$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n,m \in \mathbb{N},\ n < m \ \Rightarrow\ \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\Longrightarrow$ B numerable

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies$ $A \times B$ numerable

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N},\ n < m \ \Rightarrow\ \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies$ $A \times B$ numerable
- Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable:
$$\emptyset \neq I \text{ numerable},\ A_i \text{ numerable } \ \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \ \text{ numerable}$$

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies$ $A \times B$ numerable
- Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable:
$$\emptyset \neq I \text{ numerable}, \; A_i \text{ numerable } \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \text{ numerable}$$

Ejemplos de conjuntos numerables

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \; n < m \;\Rightarrow\; \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies$ $A \times B$ numerable
- Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable:
$$\emptyset \neq I \text{ numerable, } A_i \text{ numerable } \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \text{ numerable}$$

Ejemplos de conjuntos numerables

- $\mathbb{N} \sim \{2n : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n \in \mathbb{N} : n \text{ primo}\}$

Definición de conjunto numerable

A es numerable cuando existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

Conjuntos infinitos numerables

- Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es infinito, existe $\sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, verificando:
$$n, m \in \mathbb{N}, \ n < m \ \Rightarrow \ \sigma(n) < \sigma(m)$$
- Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o equipotente a $\mathbb{N}$

Propiedades de los conjuntos numerables

- A numerable, $f : B \to A$ inyectiva $\implies$ B numerable
- A numerable, $f : A \to B$ $\implies$ $f(A)$ numerable
- A, B numerables $\implies$ $A \times B$ numerable
- Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable:
$$\emptyset \neq I \text{ numerable, } A_i \text{ numerable } \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \text{ numerable}$$

Ejemplos de conjuntos numerables

- $\mathbb{N} \sim \{2n : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \sim \{n \in \mathbb{N} : n \text{ primo}\}$
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

Esquema resumen

Axioma del continuo

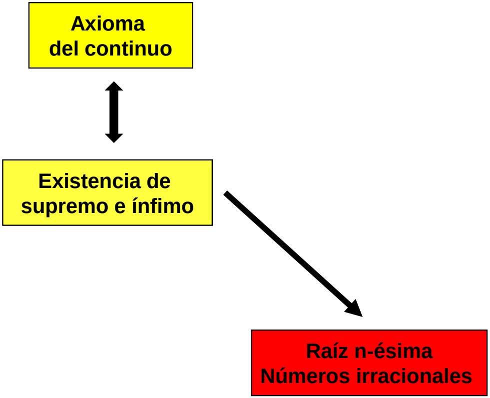
Esquema resumen

Axioma del continuo

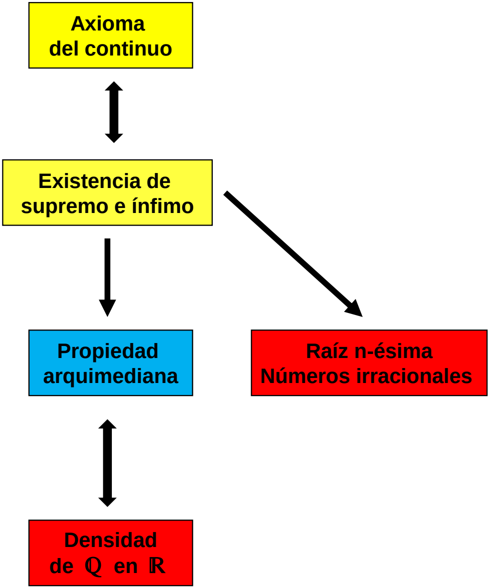
$\Updownarrow$

Existencia de supremo e ínfimo

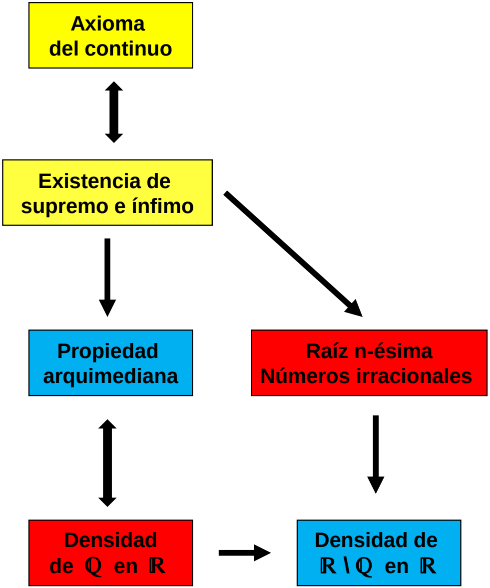
Esquema resumen



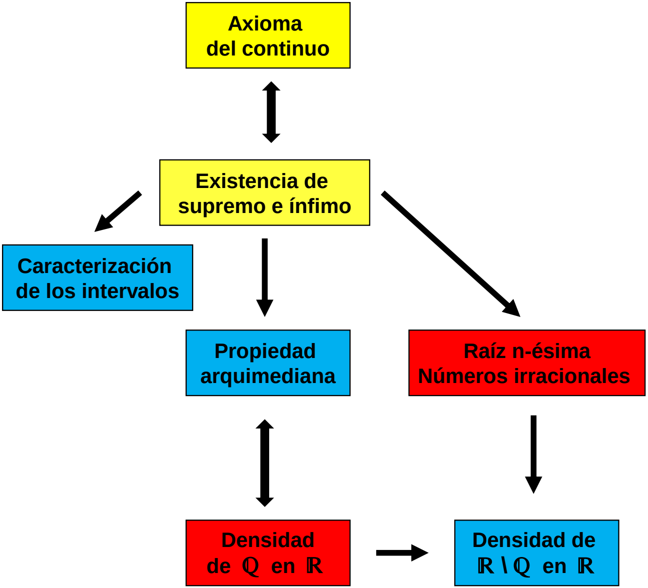
Esquema resumen



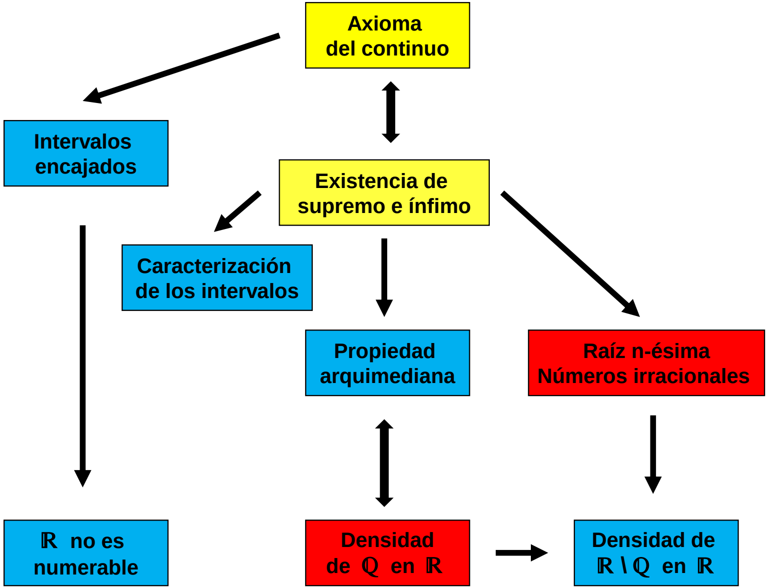
Esquema resumen



Esquema resumen



Esquema resumen



Supremo e ínfimo

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}$

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a, \ \forall a \in A$

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a, \; \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a, \; \forall a \in A$

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a, \ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a, \ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante.

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a\,,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a\,,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo,

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a\,,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a\,,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a, \; \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a, \; \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo,

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a, \ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a, \ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo, es decir, el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \iff x \geqslant a, \ \forall a \in A$
- x minorante de $A \iff x \leqslant a, \ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo, es decir, el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo y máximo, ínfimo y mínimo

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo, es decir, el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo y máximo, ínfimo y mínimo

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, A mayorado:

  A tiene máximo $\quad \Leftrightarrow \quad \sup A \in A$, en cuyo caso: $\max A = \sup A$

Supremo e ínfimo

Mayorantes y minorantes

$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- x mayorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a,\ \forall a \in A$
- x minorante de $A \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a,\ \forall a \in A$
- A está mayorado cuando admite un mayorante, minorado cuando admite un minorante. Acotado $=$ mayorado y minorado.

Existencia de supremo e ínfimo

- Todo conjunto de números reales, no vacío y mayorado tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.
- Todo conjunto de números reales, no vacío y minorado tiene ínfimo, es decir, el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo y máximo, ínfimo y mínimo

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, A mayorado:
  A tiene máximo $\quad \Leftrightarrow \quad \sup A \in A$, en cuyo caso: $\max A = \sup A$
- A minorado:
  A tiene mínimo $\quad \Leftrightarrow \quad \inf A \in A$, en cuyo caso: $\min A = \inf A$

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$

Existencia de irracionales

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$

Existencia de irracionales

$$n, m \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$

Existencia de irracionales

$$n, m \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{7}\ldots$ son irracionales

Raíz n-ésima. Números irracionales

Raíz n-ésima

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$.

Se dice que y es la raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$

Existencia de irracionales

$$n, m \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{7} \ldots$ son irracionales
- $r, s \in \mathbb{Q},\ s \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies r + s\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Parte entera de un número real

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\Longrightarrow$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\Longrightarrow$ A tiene mínimo.
- A acotado $\Longrightarrow$ A es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente: $E(x)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k+1$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente: $E(x)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k+1$

Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente: $E(x)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k+1$

Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Propiedad arquimediana. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Propiedad arquimediana

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- A mayorado $\implies$ A tiene máximo.
  Por tanto, $\mathbb{N}$ no está mayorado: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; x < n$
- A minorado $\implies$ A tiene mínimo.
- A acotado $\implies$ A es finito.

Parte entera de un número real

$$E(x) = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente: $E(x)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k+1$

Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < \beta < y$

Intervalos

Intervalos

Definición de intervalo

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
  - Hacia la izquierda, abierta: $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
  - Hacia la izquierda, abierta: $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Caracterización de los intervalos

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
  - Hacia la izquierda, abierta: $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Caracterización de los intervalos

Para un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, son equivalentes:

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
  - Hacia la izquierda, abierta: $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Caracterización de los intervalos

Para un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, son equivalentes:

(i) I es un intervalo

Intervalos

Definición de intervalo

Se llama intervalos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de los siguientes tipos:

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$
- Intervalos acotados de extremos $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$:
  - Cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
  - Abierto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - Semiabierto por la izquierda: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
  - Semiabierto por la derecha: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Semirrectas con origen $a \in \mathbb{R}$:
  - Hacia la derecha, cerrada: $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
  - Hacia la derecha, abierta: $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - Hacia la izquierda, cerrada: $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
  - Hacia la izquierda, abierta: $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Caracterización de los intervalos

Para un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, son equivalentes:

(i) I es un intervalo

(ii) $x,y \in I, x < y,\ z \in \mathbb{R},\ x < z < y \implies z \in I$

No numerabilidad de ℝ

No numerabilidad de ℝ

Principio de los intervalos encajados

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n, verificando que $J_{n+1} \subset J_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$,

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n, verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n, verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n, verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable

En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable

Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número algebraico cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número algebraico cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.
Un número real es trascendente cuando no es algebraico.

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $\quad J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número algebraico cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.
Un número real es trascendente cuando no es algebraico.

Abundancia de números trascendentes

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número algebraico cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.
Un número real es trascendente cuando no es algebraico.

Abundancia de números trascendentes

El conjunto $\mathbb{A}$ de los números algebraicos es numerable.

No numerabilidad de $\mathbb{R}$

Principio de los intervalos encajados

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado J_n,
verificando que $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ no es numerable

Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable
En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable
Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable

Números algebraicos y trascendentes

$x \in \mathbb{R}$ es un número algebraico cuando existe un polinomio P con coeficientes enteros, no constante, tal que $P(x) = 0$.
Un número real es trascendente cuando no es algebraico.

Abundancia de números trascendentes

El conjunto $\mathbb{A}$ de los números algebraicos es numerable.
Por tanto, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ de los números trascendentes no es numerable.