Tema 13

Propiedades de las funciones continuas

Estudiamos en este tema los dos resultados fundamentales sobre la continuidad de funciones reales de variable real, que se refieren a funciones continuas en intervalos. Primero veremos que si una función continua en un intervalo toma dos valores, ha de tomar en dicho intervalo todos los valores intermedios. Equivalentemente, las funciones continuas transforman intervalos en intervalos. En general, el intervalo de partida y su imagen pueden ser muy diferentes, pero hay un caso particular importante, que nos lleva al segundo resultado fundamental: cuando el intervalo de partida es cerrado y acotado, lo mismo le ocurre al intervalo imagen, con lo que la función toma un valor máximo y un valor mínimo.

13.1. Caracterización de la continuidad

Antes de probar los resultados anunciados, conviene obtener una importante caracterización de la continuidad, que podríamos haber usado, y frecuentemente se usa, como definición de función continua. De paso observaremos que para estudiar la continuidad de una función, basta trabajar con sucesiones monótonas, siempre más manejables.

Caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y fijemos $x \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La función f es continua en el punto x.*
- (ii) *Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, que sea monótona y converja a x, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.*
- (iii) *Para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ verifica que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Simbólicamente:*

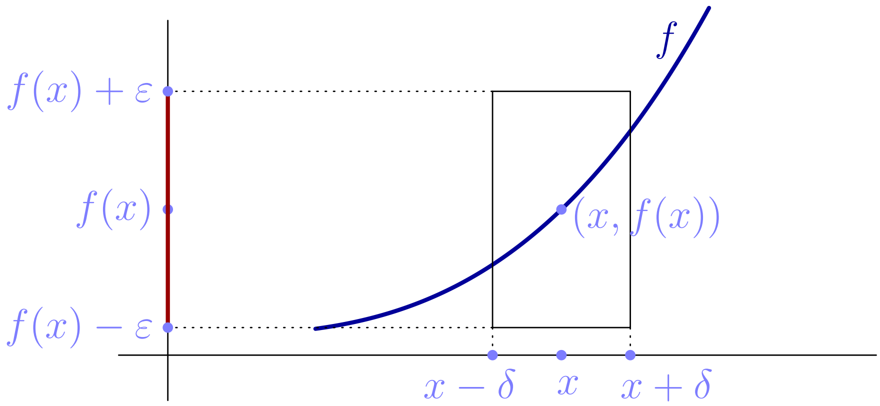
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in A, \ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Demostración. Que $(i) \Rightarrow (ii)$ es evidente: lo que por (i) sabemos que se cumple para todas las sucesiones de puntos de A que converjan a x, se cumplirá en particular para todas las sucesiones monótonas de puntos de A que converjan a x.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Probaremos que si no se verifica (iii) tampoco se puede cumplir (ii). Si la afirmación (iii) no es cierta, existirá un $\varepsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$ puede encontrarse $y \in A$ (evidentemente y dependerá de δ) tal que $|y - x| < \delta$ y, sin embargo, $|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces tomar $\delta = 1/n$, para obtener un $y_n \in A$ verificando que $|y_n - x| < 1/n$, mientras que $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Como toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona, existe una sucesión monótona $\{x_n\}$ que es una sucesión parcial de $\{y_n\}$. Es evidente que $\{y_n\} \to x$, luego $\{x_n\} \to x$, pero de ser $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que también $|f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En resumen, $\{x_n\}$ es una sucesión monótona de puntos de A que converge a x, pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$, luego no se cumple (ii), como queríamos.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a x, deberemos probar que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la afirmación (iii), y usemos que $\{x_n\} \to x$ para encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tenga $|x_n - x| < \delta$. Entonces, también para $n \geqslant m$, tenemos $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$, como queríamos. ∎

La caracterización de la continuidad que más nos interesa es la dada por la condición (iii), cuya interpretación geométrica merece un comentario. Fijada la función $f : A \to \mathbb{R}$ y el punto $x \in A$, para cada $\varepsilon > 0$, podemos considerar las rectas horizontales de ordenadas $f(x) - \varepsilon$ y $f(x) + \varepsilon$ que delimitan una banda horizontal formada por los puntos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $f(x) - \varepsilon < v < f(x) + \varepsilon$. Pues bien, f es continua en el punto x cuando, para todo $\varepsilon > 0$ (es decir, por muy "estrecha" que sea la banda recién descrita), siempre podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que el conjunto $\big\{\big(y, f(y)\big) : y \in A,\ |y - x| < \delta\big\}$, un subconjunto de la gráfica de f, esté contenido en dicha banda.



Con respecto a las aplicaciones en otras ciencias, esta caracterización de la continuidad también tiene un significado interesante. Podemos pensar que nuestra función f describe la forma en que una magnitud física P depende de otra T. Entonces A es el conjunto de valores posibles de la magnitud T y, a cada uno de esos valores, es decir, a cada $x \in A$, corresponde un único valor de la magnitud P, dado por $f(x)$. Típicamente T es una magnitud "independiente" que medimos de forma experimental, y de dicha medición deducimos el valor de P mediante la función f. Por ejemplo P puede representar la presión ejercida por un gas encerrado en un recipiente de volumen fijo, que depende de la temperatura T.

En realidad, nunca podemos medir T con total exactitud, en lugar de su valor exacto x medimos un valor aproximado y, cometiendo un error $|y-x|$. Como consecuencia, cuando calculamos el valor de la magnitud "dependiente" P, no obtenemos su valor exacto $f(x)$, sino el valor $f(y)$, cometiendo un error $|f(y)-f(x)|$. La continuidad de la función f en el punto x nos garantiza que podemos controlar el error en la magnitud P siempre que podamos medir T con suficiente exactitud. Más concretamente, podemos asegurar que el error en la magnitud P sea tan pequeño como queramos, $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$, siempre que el error al medir la magnitud T sea suficientemente pequeño, $|y-x|<\delta$. Se comprenderá que, en caso contrario, describir la dependencia entre las magnitudes P y T mediante la función f tendría muy poca utilidad.

Vamos ahora a ilustrar con un ejemplo la utilidad de la condición (ii) que aparece en la caracterización de la continuidad, es decir, la ventaja de usar sucesiones monótonas a la hora de comprobar la continuidad de una función.

Consideremos dos funciones continuas $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tales que $g(0)=h(0)$, y definamos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ escribiendo

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\leqslant 0 \\ h(x) & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

Nótese que la condición $g(0)=h(0)$ hace que f esté bien definida. Vemos que $f|_{\mathbb{R}_0^+}=h|_{\mathbb{R}_0^+}$ y $f|_{\mathbb{R}_0^-}=g|_{\mathbb{R}_0^-}$ son funciones continuas. Para cada $x\in\mathbb{R}^+$ existe $\delta>0$ tal que $]x-\delta,x+\delta[\subset\mathbb{R}_0^+$, basta tomar $\delta=x$. El carácter local de la continuidad nos dice entonces que f es continua en $\mathbb{R}^+$ y, análogamente, f es continua en $\mathbb{R}^-$. Para $x=0$ esta forma de razonar no es válida: cualquiera que sea $\delta>0$, el intervalo $]-\delta,\delta[$ no está contenido en $\mathbb{R}_0^+$ y tampoco en $\mathbb{R}_0^-$.

Sin embargo, veamos que f también es continua en 0. Tomamos una sucesión $\{x_n\}\to 0$ para probar que $\{f(x_n)\}\to f(0)$, pero, gracias a la caracterización de la continuidad antes probada, podemos suponer que $\{x_n\}$ es monótona. Si $\{x_n\}$ es creciente, tenemos $x_n\leqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, con lo que la continuidad de g nos dice que $\{f(x_n)\}=\{g(x_n)\}\to g(0)=f(0)$. En otro caso, $\{x_n\}$ es decreciente, $x_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y la continuidad de h nos dice que $\{f(x_n)\}=\{h(x_n)\}\to h(0)=f(0)$. Sin suponer que $\{x_n\}$ es monótona, habríamos podido llegar a la misma conclusión, pero con un razonamiento más engorroso.

13.2. Teorema del valor intermedio

Vamos ya con la primera propiedad clave de las funciones continuas: transforman intervalos en intervalos. Preparamos el terreno con una sencilla observación:

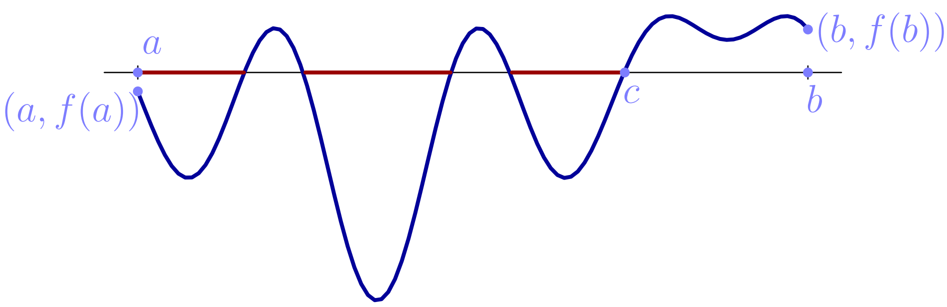
Conservación del signo. *Sea $f:A\to\mathbb{R}$ una función continua en un punto $x\in A$. Si $f(x)>0$, entonces existe $\delta>0$ tal que, para todo $y\in A$ que verifique $|y-x|<\delta$, se tiene $f(y)>0$. Análogamente, si $f(x)<0$, existe $\delta>0$ tal que: $y\in A$, $|y-x|<\delta\Rightarrow f(y)<0$.*

En efecto, si $f(x)>0$, tomando $\varepsilon=f(x)$, la caracterización $(\varepsilon-\delta)$ de la continuidad nos proporciona un $\delta>0$ tal que, para $y\in A$ con $|y-x|<\delta$ se tiene $|f(y)-f(x)|<f(x)$, de donde $-f(x)<f(y)-f(x)$, es decir, $f(y)>0$. En el caso $f(x)<0$ aplicamos lo ya demostrado a la función $-f$, que también es continua en el punto x y verifica $(-f)(x)>0$. ■

Podemos ya demostrar fácilmente un resultado que se aproxima a nuestro objetivo, aunque de momento en una situación muy concreta:

Teorema de los ceros de Bolzano. *Sean* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua, verificando que* $f(a) < 0$ *y* $f(b) > 0$. *Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demostración. Un sencillo dibujo nos sugiere una forma de encontrar el punto c y nos hace ver que la existencia de supremo debe ser un ingrediente clave en la demostración.



Consideramos el conjunto $C = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$, que no es vacío, porque $a \in C$, y está acotado, por estar incluido en el intervalo $[a,b]$. Tomando $c = \sup C$, tenemos claramente que $c \in [a,b]$ y la demostración se concluirá probando que $f(c) = 0$, pues ello también implicará que $c \neq a$ y $c \neq b$. Veremos que, tanto si $f(c) < 0$ como si $f(c) > 0$, se llega a contradicción.

Supongamos primeramente que $f(c) < 0$. Como por hipótesis f es continua en el punto c, la propiedad de conservación del signo antes demostrada nos proporciona un $\delta > 0$ verificando que, para $x \in [a,b]$ con $|x-c| < \delta$ se tiene $f(x) < 0$. Es claro que $b \geqslant c+\delta$, pues en otro caso sería $|b-c| = b-c < \delta$ y $f(b) < 0$ en contra de la hipótesis. Tomando entonces $x \in]c, c+\delta[$ tenemos $x \in [a,b]$ y $|x-c| = x-c < \delta$ luego $f(x) < 0$ y $x \in C$. Esto es una contradicción, ya que $x > c = \sup C$.

Supongamos entonces que $f(c) > 0$. Aplicando la conservación del signo obtenemos $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0$ siempre que $x \in [a,b]$ verifique $|x-c| < \delta$. Entonces, para $x \in C$ se deberá tener $\delta \leqslant |x-c| = c-x$, de donde $x \leqslant c-\delta$. Obtenemos así que $c-\delta$ es mayorante de C, lo cual es una contradicción, pues $c-\delta < c = \sup C$. ■

Pasamos ahora a obtener la forma general del teorema anterior, sustituyendo el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ por un intervalo arbitrario y dejando que el papel del cero lo pueda hacer cualquier otro número real.

Teorema del Valor Intermedio. *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función continua. Si* I *es un intervalo contenido en* A, *entonces* $f(I)$ *también es un intervalo.*

Demostración. Usando la caracterización de los intervalos, deberemos comprobar que si $\alpha, \beta \in f(I)$, y $\alpha < \lambda < \beta$, entonces $\lambda \in f(I)$. Queda así claramente de manifiesto la propiedad de f que estamos demostrando: si toma en I dos valores distintos, ha de tomar, también en I, todos los valores intermedios. Si $x, y \in I$ son tales que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$, distinguiremos dos casos, según la relación entre x e y.

Si $x < y$, consideramos el intervalo cerrado y acotado $[x,y]$, observando que, por ser I un intervalo, se tiene $[x,y] \subset I \subset A$. Podemos entonces definir una función $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = f(t) - \lambda \quad \forall t \in [x,y]$$

Claramente g es continua, con $g(x) = \alpha - \lambda < 0$ y $g(y) = \beta - \lambda > 0$. Por el teorema anterior, existe $c \in]x,y[\subset I$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$.

En el caso $y < x$ usamos el intervalo $[y,x] \subset I \subset A$ y la función $g : [y,x] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \lambda - f(t) \quad \forall t \in [y,x]$$

que es continua, con $g(y) = \lambda - \beta < 0$ y $g(x) = \lambda - \alpha > 0$, obteniendo de nuevo un punto $c \in]y,x[\subset I$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$. ■

Nótese que los dos teoremas recién obtenidos son equivalentes, el del valor intermedio se ha deducido fácilmente del de Bolzano, pero éste a su vez es clara consecuencia de aquél.

Antes de comentar con más detalle el teorema del valor intermedio, conviene observar que no se pierde generalidad suponiendo que $A = I$, pues en otro caso usaríamos la restricción $f|_I$, que también es continua, obteniendo que $f|_I(I)$ es un intervalo, pero es claro que $f|_I(I) = f(I)$. Así pues, el teorema se enuncia equivalentemente como sigue:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

También es claro que este resultado sólo tiene interés cuando el intervalo I no es trivial, pues en otro caso I se reduce a un punto y obviamente lo mismo le ocurre a $f(I)$. Finalmente, no conviene olvidar que, para cualquier otro intervalo $J \subset I$, también se tiene que $f(J)$ es un intervalo, puesto que $f|_J$ también es continua. Esto motiva la siguiente definición:

Si I es un intervalo no trivial, se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene la *propiedad del valor intermedio* cuando, para todo intervalo $J \subset I$, se verifica que $f(J)$ es un intervalo.

Al hilo de los comentarios anteriores, merece la pena resaltar que, para que f tenga la propiedad del valor intermedio, no es suficiente que $f(I)$ sea un intervalo. En efecto, tomando por ejemplo $I = [0,1]$, la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - x \quad \forall x \in]0,1[\,, \quad f(0) = 0$$

verifica claramente que $f(I) = [0,1[$ es un intervalo. Sin embargo, f no tiene la propiedad del valor intermedio, pues tomando $J = [0,1/2]$ tenemos un intervalo $J \subset I$, para el cual, $f(J) = \{0\} \cup [1/2,1[$ no es un intervalo.

Quedó claro anteriormente que el teorema del valor intermedio se puede reformular como sigue:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene la propiedad del valor intermedio.*

Surge inmediatamente la pregunta de si es cierto el recíproco. La respuesta es negativa, pero en este momento sería bastante laborioso dar un ejemplo de una función definida en un intervalo, que tenga la propiedad del valor intermedio, pero no sea continua. Queda pues prometido este ejemplo para más adelante.

Para poder discutir la otra hipótesis del teorema del valor intermedio, el hecho de que el conjunto I sea un intervalo, leemos el teorema de la siguiente forma: *si I es un intervalo, entonces $f(I)$ es un intervalo para toda función continua $f : I \to \mathbb{R}$*. Viendo así el teorema, la hipótesis de que I sea un intervalo, no sólo es suficiente para obtener la tesis, sino que también es necesaria. Esto es evidente: si un conjunto A no es un intervalo, basta tomar como f la función identidad en A para tener una función continua en A tal que $f(A) = A$ no es un intervalo. Veamos otro ejemplo en el que se consigue algo más llamativo:

- *Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(A)$ tiene exactamente dos elementos.*

Para probarlo, usamos de nuevo la caracterización de los intervalos: si A no es un intervalo, deberán existir $x, y \in A$ y $z \in \mathbb{R} \setminus A$ tales que $x < z < y$. Definimos entonces una función $f : A \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{t - z}{|t - z|} \quad \forall t \in A$$

El denominador no se anula, puesto que $z \notin A$, y f es continua, como cociente de dos funciones continuas. Pero también es claro que $|f(t)| = 1$, es decir, $f(t) \in \{-1, 1\}$, para todo $t \in A$. Como quiera que $f(y) = 1$ y $f(x) = -1$, vemos que $f(A) = \{-1, 1\}$. ■

13.3. Teorema de Weierstrass

Como motivación para la segunda propiedad fundamental de las funciones continuas, nos planteamos si, en el teorema del valor intermedio, será posible averiguar de qué tipo es el intervalo $f(I)$, según de qué tipo sea el intervalo I. Empezamos observando que, en general, no hay relación entre la acotación de I y la de $f(I)$.

Obviamente, f puede ser constante, con lo que $f(I)$ está acotado sin necesidad de que I lo esté. Un ejemplo menos trivial es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claramente f es continua, como cociente de dos funciones continuas. También es claro que $|f(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que el intervalo $f(\mathbb{R})$ está acotado, a pesar de que $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado. De hecho es fácil comprobar que f es inyectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ y su inversa es la función $f^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(y) = 1/(1 - |y|)$, para todo $y \in]-1, 1[$. De nuevo f^{-1} es continua, como cociente de dos funciones continuas, y tenemos una función continua que transforma el intervalo acotado $]-1, 1[$ en el intervalo $\mathbb{R}$, que no está mayorado ni minorado.

El hecho de que un intervalo sea abierto o cerrado tampoco se conserva al transformarlo mediante una función continua. Observemos de nuevo que una función constante transforma cualquier intervalo en un intervalo cerrado. Otro ejemplo: la función valor absoluto transforma el intervalo abierto $]-1,1[$ en el intervalo semiabierto $[0,1[$. Tomando $I = [1,+\infty[$ tenemos una semirrecta cerrada y definiendo $f(x) = 1/x$ para todo $x \in I$, tenemos una función continua en I cuya imagen $f(I) =]0,1]$ no es un intervalo cerrado.

A la vista de los ejemplos anteriores, se podría pensar que para una función continua en un intervalo I, el tipo del intervalo I no nos permite deducir nada sobre el tipo del intervalo $f(I)$. Sin embargo, hay un tipo de intervalo que sí se conserva: cuando I es cerrado y acotado, podemos asegurar que lo mismo le ocurre a $f(I)$.

Teorema de Weierstrass. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, el intervalo $f\big([a,b]\big)$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Empezamos probando que $f\big([a,b]\big)$ es un conjunto acotado, es decir, que el conjunto $\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ está mayorado. En otro caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a,b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos proporciona una sucesión parcial convergente: $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}$. Es claro que $x \in [a,b]$, lo que nos permite usar que f es continua en x, para concluir que $\big\{f\big(x_{\sigma(n)}\big)\big\} \to f(x)$. Pero esto es una contradicción, ya que $|f(x_{\sigma(n)})| > \sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\big\{f\big(x_{\sigma(n)}\big)\big\}$ diverge.

Sabido que el intervalo $J = f\big([a,b]\big)$ está acotado, tomamos $\alpha = \inf J$, $\beta = \sup J$ y tenemos $]\alpha,\beta[\subset J \subset [\alpha,\beta]$, luego bastará probar que $\alpha,\beta \in J$ para concluir que $J = [\alpha,\beta]$, un intervalo cerrado y acotado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\alpha + 1/n$ no es minorante del conjunto $f\big([a,b]\big)$, existirá un $y_n \in [a,b]$ verificando que $f(y_n) < \alpha + 1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tal que $\{f(y_n)\} \to \alpha$. Aplicando igual que antes el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una sucesión parcial $\{y_{\tau(n)}\}$ convergente a un $y \in [a,b]$. Puesto que f es continua en el punto y, deducimos que $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\} \to f(y)$. Ahora bien, $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\}$ es una sucesión parcial de $\{f(y_n)\}$, luego $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\} \to \alpha$ y concluimos que $\alpha = f(y) \in f\big([a,b]\big)$, como queríamos. Para comprobar que también $\beta \in f\big([a,b]\big)$ se razona de manera completamente análoga. ■

Conviene introducir una terminología que pondrá más claramente de manifiesto el interés del resultado anterior. Como ya hicimos al definir las sucesiones acotadas, podemos estudiar nociones de acotación para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$ usando su imagen, $f(A)$. Para mayor generalidad, podemos considerar solamente los valores de f en un subconjunto de A. Así pues, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$, decimos que f está

- *minorada en B*, cuando el conjunto $f(B)$ está minorado: $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant f(x) \;\; \forall x \in B$
- *mayorada en B*, cuando el conjunto $f(B)$ está mayorado: $\exists \beta \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant \beta \;\; \forall x \in B$
- *acotada en B*, cuando está mayorada y minorada en B, equivalentemente, cuando la función $|f|$ está mayorada en B: $\exists K \in \mathbb{R} : |f(x)| \leqslant K \;\; \forall x \in B$

En el caso $B = A$ decimos simplemente que f está *mayorada, minorada* o *acotada*.

Nos puede interesar también que un conjunto de valores de f tenga máximo o mínimo:

- Decimos que f *alcanza su mínimo en* B, cuando el conjunto $f(B)$ tiene mínimo, es decir: $\exists y \in B : f(y) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in B$
- Análogamente, se dice que f *alcanza su máximo* en B cuando el conjunto $f(B)$ tiene máximo: $\exists z \in B : f(x) \leqslant f(z) \ \ \forall x \in B$

Nótese que, aunque aquí sólo trabajemos con funciones reales de variable real, las nociones anteriores tendrían perfecto sentido para funciones definidas en un conjunto arbitrario A, con valores en $\mathbb{R}$. El problema de averiguar si una tal función alcanza o no su máximo o su mínimo, en A o en cierto subconjunto, es lo que se conoce como un *problema de optimización*. Existe toda una rama de la Matemática, la Teoría de Optimización, dedicada al estudio de este tipo de problemas, que por razones fáciles de adivinar, tiene importantes aplicaciones en otras ciencias, particularmente la Economía.

Pues bien, el Teorema de Weierstrass puede considerarse como el primer resultado, el más básico y elemental, en la Teoría de Optimización, pues puede enunciarse de la siguiente forma: *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo*.

13.4. Ejercicios

1. Sea A un conjunto de números reales y $x \in A$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $]x-\delta, x+\delta[\cap A = \{x\}$. Cuando esto ocurre se dice que x es un punto *aislado* de A. Probar que toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto x.

2. Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y finito, toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua. Probar también que toda función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ es continua.

3. Sean $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $A = B \cup \{0\}$. Probar que toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en B. Probar también que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en 0 si, y sólo si, $\{f(1/n)\} \to f(0)$.

4. Sea I un intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Probar que f es constante.

5. Probar que si P es un polinomio de grado impar, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 0$.

6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Probar que f deja un punto *fijo*, es decir, que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

7. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, probar que en cada instante, existen dos puntos antípodas en el Ecuador que se encuentran a la misma temperatura.

8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ un función continua y supongamos que, para cada $x \in [0,1]$ existe $y \in [0,1]$ tal que $|f(y)| \leqslant |f(x)|/2$. Probar que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$.