Tema 11

Convergencia absoluta y series alternadas

Una vez que disponemos de diversos criterios de convergencia para series de términos no negativos, abordamos el estudio de la convergencia de series de números reales cualesquiera. Introducimos para ello la noción de convergencia absoluta y, usando el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, probamos que toda serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco no es cierto y para probarlo estudiamos las series alternadas, así llamadas porque el signo de sus términos va alternando. Presentamos un criterio de convergencia muy útil para el estudio de este tipo de series, el criterio de Leibniz, que permite mostrar abundantes ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes. Finalmente abordamos la pregunta de si la convergencia de una serie se conserva al permutar sus términos, lo que nos lleva a la noción de convergencia incondicional, que resulta ser equivalente a la convergencia absoluta.

11.1. Convergencia absoluta

Nos planteamos ya el problema general de estudiar la convergencia de cualquier serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ de números reales. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ es finito, existirá un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geqslant 0$ para $n \geqslant m$. Considerando entonces la serie $\sum_{n\geqslant m} x_n$, cuya convergencia equivale como sabemos a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, podemos usar los criterios de convergencia para series de términos no negativos. Por otra parte, si es finito el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$, la observación anterior se aplica a la serie $\sum_{n\geqslant 1} (-x_n)$ cuya convergencia equivale como sabemos a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Por tanto, nos interesa ahora el caso en que ambos conjuntos mencionados son infinitos, dicho de manera intuitiva, queremos estudiar las series "con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos".

La estrategia consiste en usar la serie de valores absolutos $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es *absolutamente convergente* cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$ es convergente.

Por ejemplo, puesto que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x^n| = \sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$, la serie geométrica de razón x converge absolutamente si, y sólo si, $|x| < 1$. Así pues, para las series geométricas, convergencia y convergencia absoluta son nociones equivalentes.

En general, como la nomenclatura sugiere, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Este hecho es una consecuencia directa del teorema de complitud de $\mathbb{R}$:

Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más concretamente, dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, si la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} |x_n|$ es convergente, entonces $\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n$ también es convergente y se verifica que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \tag{1}$$

Demostración. Consideremos las sumas parciales de ambas series:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos de momento que $q < p$. Tenemos claramente

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=q+1}^{p} x_k \right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|$$

La desigualdad así obtenida es obvia cuando $p = q$ y no se altera al intercambiar p y q, luego es válida para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis, $\{\sigma_n\}$ es convergente, luego es una sucesión de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geqslant m$, se tiene $|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$. La desigualdad recién probada nos dice que para $p, q \geqslant m$ tendremos $|S_p - S_q| < \varepsilon$, luego $\{S_n\}$ también es una sucesión de Cauchy. El teorema de complitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que $\{S_n\}$ es convergente, como queríamos.

Para obtener la desigualdad (1), pongamos $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Sabemos entonces que $\{|S_n|\} \to |S|$, pero es claro que $|S_n| \leqslant \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| = |S| = \lim_{n \to \infty} |S_n| \leqslant \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que, una vez más, la suma de una serie se comporta como si se tratase de una suma finita. Según (1), el valor absoluto de la suma de una serie absolutamente convergente es menor o igual que la suma de la serie de los valores absolutos de sus términos.

El recíproco del teorema anterior no es cierto, enseguida veremos abundantes ejemplos de series convergentes que no convergen absolutamente.

11.2. Series alternadas

Volviendo en cierto modo a los comentarios hechos al principio, si queremos que una serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converja sin hacerlo absolutamente, los conjuntos $\{n\in\mathbb{N} : x_n<0\}$ y $\{n\in\mathbb{N} : x_n>0\}$ habrán de ser infinitos, pues en otro caso, o bien existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|=x_n$ para $n\geqslant m$, o bien existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|=-x_n$ para $n\geqslant m$. En ambos casos, la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1}|x_n|$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Es lógico, por tanto, pensar en series cuyos términos en lugares pares sean positivos y los de lugar impar negativos, o viceversa.

Una *serie alternada* es una serie de la forma $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$, o bien $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1} a_n$, donde $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ recibe el nombre de *serie armónica alternada* y está claro que esta serie no converge absolutamente. Sin embargo, es convergente, como se deduce del siguiente criterio de convergencia para series alternadas.

Criterio de Leibniz. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y $\{a_n\}\to 0$, entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración. Debemos probar que la sucesión $\{S_n\}=\Big\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\Big\}$ converge. Usando que $\{a_n\}$ es decreciente y que $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, conseguimos la siguiente cadena de desigualdades, válidas para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leqslant S_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n+1}=S_{2n+1}\\ &\leqslant S_{2n+1}+a_{2n+2}=S_{2n+2}=S_{2n}-a_{2n+1}+a_{2n+2}\leqslant S_{2n}\end{aligned}$$

Destacando lo que nos interesa, hemos visto que

$$S_{2n-1}\leqslant S_{2n+1}\leqslant S_{2n+2}\leqslant S_{2n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por tanto, la sucesión $\{S_{2n-1}\}$ es creciente y $\{S_{2n}\}$ es decreciente. Pero, como consecuencia también tenemos

$$S_1\leqslant S_{2n-1}\leqslant S_{2n}\leqslant S_2\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

de modo que las sucesiones $\{S_{2n-1}\}$ y $\{S_{2n}\}$ están acotadas y, por tanto, ambas convergen. Puesto que $\{S_{2n}\}=\{S_{2n-1}+a_{2n}\}$ y $\{a_{2n}\}\to 0$, deducimos que $\text{lím}\{S_{2n}\}=\text{lím}\{S_{2n-1}\}$, luego $\{S_n\}$ es convergente, como se quería. ■

Así pues, la serie armónica alternada es convergente, pero no absolutamente convergente. Igual le ocurre, por ejemplo, a la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[q]{n}}$, para cualquier $q\in\mathbb{N}$.

11.3. Convergencia incondicional

Completamos este tema discutiendo una pregunta que tenemos planteada desde el principio del estudio de las series: hasta qué punto es prudente dejarnos llevar por la intuición e interpretar la suma de una serie convergente como la suma de "todos" los términos de una sucesión, cual si de una suma finita se tratara.

Hemos visto en algún caso que la suma de una serie tiene propiedades análogas a las de una suma finita. Por ejemplo, hemos visto ciertas formas de distributividad y de asociatividad. Vamos a preguntarnos ahora por la posible conmutatividad, en un sentido muy general, de la suma de una serie. Si tal propiedad fuese cierta, al permutar de cualquier forma los sumandos, la convergencia de la serie debería mantenerse y la suma de la serie debería seguir siendo la misma. Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, aunque sin entrar en las demostraciones. Empezamos planteando el problema con precisión.

En general una *permutación* de los elementos de un conjunto es una aplicación biyectiva del conjunto en sí mismo. Así pues, una *permutación de los números naturales* será una aplicación biyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dada una sucesión $\{x_n\}$, usando una permutación π de los números naturales, podemos formar la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$ que intuitivamente se obtiene permutando los términos de $\{x_n\}$.

Pues bien, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente y la suma de series tuviese la conmutatividad que pretendemos discutir, la serie *reordenada* $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que la relación entre las sumas parciales de ambas series no es sencilla.

Se dice que una serie de números reales $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación π de los números naturales, la serie reordenada $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ converge. Según la motivación anterior, deberíamos haber exigido también que la serie reordenada tenga la misma suma que la de partida, pero acabaremos viendo que esto ocurre automáticamente: si una serie converge incondicionalmente, la suma de la serie no depende de la reordenación que podamos considerar.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar $\pi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema. *Una serie de números reales es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente.*

Como ya se ha dicho, no vamos a exponer con detalle la demostración de esta equivalencia, pero sí vamos a enunciar y comentar por separado ambas implicaciones, para resaltar alguna información adicional. Para comprobar que la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia incondicional, es natural empezar considerando series de términos no negativos, para las que la convergencia equivale a la acotación de las sumas parciales. No es difícil obtener el siguiente resultado, que sería el primer paso en la demostración del teorema anterior:

- *Toda serie convergente de términos no negativos es incondicionalmente convergente. Más concretamente, si* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente, entonces, para cualquier permutación* π *de los números naturales, se tiene que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ *es convergente, verificándose además que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

El siguiente paso es ya casi inmediato, conseguimos una de las implicaciones del teorema anterior, con una información adicional: la suma de una serie absolutamente convergente no se altera al reordenarla:

- *Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Además, si la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *es absolutamente convergente, entonces, para toda permutación* π *de los números naturales, se tiene que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Para completar la discusión del teorema antes enunciado, comentamos la otra implicación, sobre la que también habrá información adicional. Para probarla, deberíamos ver que si una serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ no converge absolutamente, tampoco puede converger incondicionalmente, es decir, ha de existir una permutación π de los números naturales, tal que la serie reordenada $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ no sea convergente. Si la propia serie de partida $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ no es convergente, esto es evidente, luego el problema se concentra en las series convergentes que no son absolutamente convergentes. Efectivamente, tales series se pueden reordenar para que dejen de ser convergentes, pero peor aún, incluso para las reordenaciones que dan lugar a series convergentes, la suma que se obtiene depende de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado se debe al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) y puede enunciarse como sigue.

Teorema de Riemann. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *una serie convergente, que no converja absolutamente, y fijemos* $s \in \mathbb{R}$. *Entonces existen permutaciones* π_+, π_- *y* π_s *de los números naturales, tales que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_+(n)}$ *diverge positivamente, la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_-(n)}$ *diverge negativamente y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_s(n)}$ *converge, con* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s$.

Dicho de forma más intuitiva, toda serie convergente que no converja absolutamente, puede reordenarse para que diverja positivamente, para que diverja negativamente, y también para que converja a cualquier número real prefijado.

Podría hacerse un estudio de la asociatividad para la suma de una serie convergente, análogo al que hemos hecho para la conmutatividad, llegando a una conclusión similar: cuando una serie converge absolutamente, se puede decir que la suma de la serie verifica tal asociatividad en un sentido muy general, pero cuando la convergencia no es absoluta, las cosas se complican.

Como conclusión genérica, podemos decir que si la serie de término general $\{x_n\}$ converge absolutamente, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, de hecho se dice en este caso que la sucesión $\{x_n\}$ es *sumable*. Ello se aplica en particular a las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando la serie de término general $\{x_n\}$ es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva, aunque siga siendo útil, debe manejarse con gran precaución.

11.4. Ejercicios

1. Sea $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ una serie absolutamente convergente y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Suponiendo sólo que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, ¿se puede asegurar que $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ también converge?

2. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{x^n + n^2}$

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$