Tema 5

Sucesiones convergentes

Aparece por primera vez en este tema una de las nociones fundamentales del Análisis Matemático, la noción de *convergencia*. Estudiamos la convergencia de sucesiones de números reales, que nos permitirá mejorar nuestro conocimiento de la recta real y será posteriormente una herramienta clave para estudiar las funciones reales de variable real.

5.1. Concepto de sucesión

Si A es un conjunto no vacío, se llama *sucesión* de elementos de A a cualquier aplicación de $\mathbb{N}$ en A. En particular, una *sucesión de números reales* es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. En lo que sigue trabajaremos siempre con sucesiones de números reales. Cuando hablemos de una sucesión, sin más explicaciones, se entenderá que se trata de una sucesión de números reales.

Es habitual usar para las sucesiones una notación más acorde con su interpretación intuitiva, "números que se suceden", aunque esta idea debe usarse con precaución. Concretamente, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un número real $x_n = \varphi(n)$ y denotamos entonces por $\{x_n\}$ a la sucesión φ. Una ventaja de esta notación es su brevedad: por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ es la sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero con sólo escribir $\{1/n\}$ entendemos perfectamente la sucesión a la que nos referimos.

Intuitivamente, interpretamos la sucesión $\{x_n\}$ como una lista infinita de números

$$x_1 \,, x_2 \,, \ldots \,, x_n \,, \ldots$$

y es habitual decir que estos números son *términos* de la sucesión: x_1 será el primer término, x_2 el segundo y, en general, x_n será el n-ésimo término de la sucesión. Debe quedar claro que esto es sólo una idea intuitiva, una forma de hablar. No es necesario dar significado matemático riguroso a la palabra "término".

Conviene resaltar la diferencia entre una sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \varphi(\mathbb{N})$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la imagen de la aplicación φ. Por ejemplo, este conjunto puede muy bien ser finito aunque tengamos una aplicación definida en todo el conjunto $\mathbb{N}$. No hay nada de extraño en que la imagen de una aplicación definida en un conjunto infinito sea un conjunto finito.

Veamos algunos ejemplos en los que, junto a una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, damos la notación con la que se representa y la idea intuitiva que nos sugiere:

- Una sucesión puede ser *constante*. Más concretamente, fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos tomar $\varphi(n) = \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos una sucesión bastante aburrida: $\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots$
- La *sucesión de los números naturales* viene definida por $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se denota simplemente por $\{n\}$. Intuitivamente pensamos en: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$
- Ya ha aparecido anteriormente la *sucesión de los inversos de los números naturales*, es decir, la sucesión $\{1/n\}$ definida por $\varphi(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Visualizamos esta sucesión en la forma: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$
- Las *potencias* de -1, con exponente natural, nos dan una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(n) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que se denota simplemente por $\{(-1)^n\}$ y nos hace pensar en: $-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$

5.2. Sucesiones convergentes

La definición que sigue es una de las más útiles en Matemáticas. Preferimos exponerla formalmente y luego comentarla detenidamente para su mejor comprensión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ *converge* a x, y escribimos $\{x_n\} \to x$, cuando, para cada número real y positivo ε, puede encontrarse un número natural m, de forma que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ que verifique $n \geqslant m$. Así pues, simbólicamente:

$$\{x_n\} \to x \iff \left[\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \;\Rightarrow\; |x_n - x| < \varepsilon \,\right] \qquad (*)$$

Nótese que escribimos $\varepsilon > 0$ en lugar de $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se sobreentiende que ε es un número real y se enfatiza que es positivo. Igualmente se sobreentiende que $n \in \mathbb{N}$ y se enfatiza que $n \geqslant m$.

Antes que nada conviene resaltar que el número natural m que aparece en $(*)$ dependerá usualmente del número positivo ε mencionado previamente. Para probar que $\{x_n\} \to x$ debemos precisamente encontrar alguna regla que a cada número positivo ε asocie un número natural m con la propiedad requerida: que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$.

La desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ es tanto más exigente cuanto más pequeño sea ε y equivale a que se tenga $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Por tanto, en $(*)$ se afirma que, por muy pequeño que sea $\varepsilon > 0$, el intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contiene a todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante o, si se quiere, a todos los términos suficientemente avanzados. También debemos recordar que $|x_n - x|$ es la distancia entre los puntos x_n y x de la recta real, luego $\{x_n\} \to x$ cuando podemos asegurar que x_n está tan cerca de x como queramos (a distancia menor que un $\varepsilon > 0$ dado) para todo número natural n suficientemente grande.

Podemos también reformular la definición de convergencia, pensando en los términos que no verifican la desigualdad que en ella aparece. Más concretamente, para cada $\varepsilon > 0$ podemos pensar en el conjunto $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Decir que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$ equivale a decir que $A_\varepsilon \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$, lo que a su vez equivale a decir que A_ε es finito.

En resumen, tenemos que $\{x_n\} \to x$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto A_ε es finito. Esta forma de expresar la convergencia es útil cuando queremos negar que la haya: tendremos que $\{x_n\}$ no converge a x cuando A_ε sea infinito para algún $\varepsilon > 0$.

Lógicamente, diremos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es *convergente* cuando existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_n\} \to x$. Veamos que entonces x es único:

- *Si una sucesión $\{x_n\}$ verifica que $\{x_n\} \to x$ y que $\{x_n\} \to y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x = y$.*

Para comprobarlo, fijamos $\varepsilon > 0$ y usamos la definición de convergencia para encontrar $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m_1$ y $|x_n - y| < \varepsilon$ para $n \geqslant m_2$. Tomando entonces $n = \max\{m_1, m_2\}$ tenemos claramente

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leqslant |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, hemos demostrado que $|x - y|/2$ es un minorante de $\mathbb{R}^+$, luego $|x - y| \leqslant 0$, es decir, $x = y$. ■

Podemos ya usar la siguiente nomenclatura: si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un $x \in \mathbb{R}$, se dice que x es el *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y se escribe $x = \lim\{x_n\}$, o bien, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Veamos los primeros ejemplos de sucesiones convergentes y de sucesiones no convergentes:

- Una sucesión constante es convergente. Si, para $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos $x_n = \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, la desigualdad $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que en este caso podemos tomar siempre $m = 1$, sea cual sea ε. En cualquier otro caso, la situación no será tan favorable.

- Vamos a comprobar que $\{1/n\} \to 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, la propiedad arquimediana nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$ y, para $n \geqslant m$, tenemos entonces

  $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m} < \varepsilon$$

  Resaltamos la regla que nos ha permitido asociar a cada número positivo ε el número natural m requerido: basta que sea $m > 1/\varepsilon$; por ejemplo, podemos tomar $m = E(1/\varepsilon) + 1$. Obsérvese que, recíprocamente, de $\{1/n\} \to 0$ se deduce la propiedad arquimediana.

- La sucesión $\{n\}$ no es convergente. En efecto, si para algún $x \in \mathbb{R}$ se tuviese $\{n\} \to x$, tomando $\varepsilon = 1$ encontraríamos $m \in \mathbb{N}$ verificando que $|n - x| < 1$, y por tanto $n < x + 1$, para $n \geqslant m$; pero esto es imposible, porque entonces $x + 1$ sería un mayorante de $\mathbb{N}$, contradiciendo la propiedad arquimediana.

- La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente. Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que $\{(-1)^n\} \to x \in \mathbb{R}$ y tomemos otra vez $\varepsilon = 1$ para obtener $m \in \mathbb{N}$ tal que $|(-1)^n - x| < 1$ para $n \geqslant m$. Usando $n = 2m$ tenemos $|1 - x| < 1$, de donde $x > 0$. Pero también podemos tomar $n = 2m + 1$ para obtener $|(-1) - x| = |x + 1| < 1$, de donde $x < 0$ y hemos llegado a una contradicción.

5.3. Sucesiones parciales

Acabamos de ver que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente, pero es intuitivamente claro que con los términos que ocupan un lugar impar podemos formar una sucesión convergente, e igual ocurre con los términos que ocupan un lugar par. Pues bien, vamos a formalizar la idea intuitiva consistente en seleccionar términos de una sucesión dada, para obtener una nueva sucesión, de la que diremos que es una "sucesión parcial" de la de partida.

Veamos pues en qué consiste la idea de seleccionar términos de una sucesión. Si llamamos $\sigma(n)$ al lugar que ocupa en la sucesión de partida el n-ésimo término de la sucesión parcial, está claro que nuestra selección queda determinada por una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Siguiendo con nuestra idea intuitiva, el $(n+1)$-ésimo término de la sucesión parcial debe ocupar en la sucesión de partida un lugar posterior al n-ésimo, es decir, debe ser $\sigma(n) < \sigma(n+1)$, de forma que los términos que vayamos seleccionando no aparezcan en la sucesión parcial permutados ni repetidos. Finalmente es claro que si $\{x_n\}$ era la sucesión de partida, la selección descrita mediante la aplicación σ produce la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$. Quedan así explicadas las definiciones que hacemos a continuación.

Se dice que una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es *estrictamente creciente*, cuando verifica que

$$\sigma(n) < \sigma(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones, se dice que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ cuando existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$y_n = x_{\sigma(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dicho de forma equivalente, las sucesiones parciales de una sucesión $\{x_n\}$ son las de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$, donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. Obsérvese que la definición anterior tiene perfecto sentido para sucesiones de elementos de un conjunto arbitrario, aunque aquí sólo nos interesen las de números reales.

Para presentar ejemplos de sucesiones parciales basta mostrar aplicaciones estrictamente crecientes de $\mathbb{N}$ en sí mismo, cosa bien fácil. En los ejemplos que siguen, $\{x_n\}$ puede ser cualquier sucesión de números reales y explicamos la selección de sus términos determinada por la aplicación σ que se considera, que siempre es estrictamente creciente.

- Tomando $\sigma(n) = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, observamos que $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\}$ es una sucesión parcial de sí misma. Obviamente, una forma de seleccionar términos de una sucesión consiste en seleccionarlos todos, aunque este ejemplo de sucesión parcial sea poco interesante.

- Fijado $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $\sigma(n) = k+n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Aparece así la sucesión $\{x_{k+n}\}$, que es la sucesión parcial de $\{x_n\}$ obtenida al suprimir los k primeros términos y conservar los restantes.

- Tomando $\sigma(n) = 2n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos la sucesión parcial $\{x_{2n}\}$, en la que aparecen los términos de $\{x_n\}$ que ocupan los lugares pares.

- Para seleccionar los términos en lugares impares, tomamos $\sigma(n) = 2n-1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, con lo que obtenemos la sucesión parcial $\{x_{2n-1}\}$.

Vamos a ver enseguida que la convergencia de una sucesión obliga a todas sus sucesiones parciales a converger al mismo límite. Conviene hacer previamente la siguiente observación, sencilla pero importante:

- *Toda aplicación estrictamente creciente* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *verifica que* $\sigma(n) \geqslant n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

La prueba por inducción es clara: $\sigma(1) \in \mathbb{N}$, luego $\sigma(1) \geqslant 1$ y, suponiendo $\sigma(n) \geqslant n$, tenemos $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geqslant n$, luego $\sigma(n+1) \geqslant n+1$. Podemos ya probar fácilmente lo siguiente:

- *Si* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *es una sucesión parcial de una sucesión convergente* $\{x_n\}$, *entonces* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *también es convergente, con* $\lim\{x_{\sigma(n)}\} = \lim\{x_n\}$.

Si $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Pero entonces, la observación previa nos dice que para $n \geqslant m$ tenemos también $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, luego $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$. Hemos demostrado que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, como se quería. Nótese que, para conseguir la convergencia de cualquier sucesión parcial, podemos asociar a cada $\varepsilon > 0$ el mismo $m \in \mathbb{N}$ que nos proporciona la convergencia de la sucesión de partida. ■

Como clara consecuencia, si $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial que no es convergente, o admite dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes, entonces $\{x_n\}$ no puede ser convergente. Por ejemplo, el hecho ya conocido de que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no converge se puede explicar rápidamente, observando lo que les ocurre a dos sucesiones parciales suyas: $\{(-1)^{2n}\} \to 1$ y $\{(-1)^{2n+1}\} \to -1$.

En ocasiones, se puede deducir la convergencia de una sucesión usando la convergencia de una o varias sucesiones parciales. En lugar de hacer un enunciado general, que no será difícil adivinar, consideramos un par de ejemplos ilustrativos. El primero nos dice que la convergencia de una sucesión no depende para nada de sus primeros k términos, por muy grande que sea k:

- *Fijado* $k \in \mathbb{N}$, *para toda sucesión* $\{x_n\}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$, *se tiene:* $\{x_n\} \to x \ \Leftrightarrow \ \{x_{k+n}\} \to x$

Basta obviamente probar la implicación hacia la izquierda. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{k+n} - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Para $n \geqslant k+m$ será $n-k \geqslant m$ luego $|x_n - x| = |x_{k+n-k} - x| < \varepsilon$. ■

En un segundo ejemplo, usaremos dos sucesiones parciales, las formadas por los términos pares y por los impares:

- *Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$, *se tiene:* $\{x_{2n}\} \to x\,,\ \{x_{2n-1}\} \to x \implies \{x_n\} \to x$

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ verificando que $|x_{2k} - x| < \varepsilon$ para $k \geqslant m_1$ y $|x_{2k-1} - x| < \varepsilon$ para $k \geqslant m_2$. Tomando $m = \max\{2m_1, 2m_2 + 1\}$, para $n \geqslant m$ podrán darse dos casos. Si n es par, tendremos $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant m_1$, luego $|x_n - x| = |x_{2k} - x| < \varepsilon$. Si n es impar, será $n = 2k-1$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant m_2$, con lo que obtenemos también $|x_n - x| = |x_{2k-1} - x| < \varepsilon$. ■

5.4. Sucesiones acotadas

Ya se ha comentado la distinción que debemos tener presente entre una sucesión $\{x_n\}$ y el conjunto de sus términos $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ello no impide, como vamos a hacer ahora, considerar propiedades de una sucesión que sólo dependen del conjunto de sus términos:

Decimos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ está *mayorada o minorada* cuando lo esté el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Simbólicamente:

$$\{x_n\} \text{ mayorada} \iff \exists\, \beta \in \mathbb{R} : x_n \leqslant \beta \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\{x_n\} \text{ minorada} \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Naturalmente decimos que la sucesión $\{x_n\}$ está *acotada* cuando está mayorada y minorada. Es fácil ver que esto equivale a que la sucesión $\{|x_n|\}$ esté mayorada:

$$\{x_n\} \text{ acotada} \iff \exists\, K \in \mathbb{R} : |x_n| \leqslant K \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Rápidamente relacionamos convergencia y acotación:

- *Toda sucesión convergente está acotada.*

La demostración no es difícil. Si $\{x_n\} \to x$, la definición de convergencia nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geqslant m$. Tenemos por tanto:

$$n \geqslant m \implies |x_n| = |x_n - x + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Por otra parte, el conjunto $\{|x_n| : n \leqslant m\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y finito, luego tendrá un máximo, digamos A. Tenemos claramente $|x_n| \leqslant 1 + |x| + A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, como queríamos demostrar. ■

La implicación recíproca es falsa: la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no es convergente.

Conviene resaltar una idea que ha aparecido claramente en la demostración anterior y que se usa muy a menudo. Dada una sucesión $\{x_n\}$, si para cierto $m \in \mathbb{N}$ probamos que el conjunto $\{x_n : n \geqslant m\}$ está acotado, entonces podemos asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada.

De la implicación recién demostrada podemos deducir claramente algo que ya sabíamos: la sucesión $\{n\}$ no es convergente, puesto que no está acotada.

5.5. Operaciones con sucesiones convergentes

Vamos a presentar ahora algunas reglas prácticas para el cálculo de límites. Empezamos con una observación inmediata: la convergencia de una sucesión siempre equivale a que otra sucesión, de números no negativos, converja a cero.

- *Dada una sucesión $\{x_n\}$, para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{|x_n - x|\} \to 0$. En particular, $\{x_n\} \to 0 \Leftrightarrow \{|x_n|\} \to 0$.*

En efecto, basta usar la definición de convergencia para ver que ambas afirmaciones se expresan exactamente de la misma forma.

Conviene observar que la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ siempre implica la de $\{|x_n|\}$:

- *Dada una sucesión* $\{x_n\}$*, para* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene:* $\{x_n\} \to x \ \Rightarrow \ \{|x_n|\} \to |x|$.

En efecto, basta tener en cuenta que $\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En general, el recíproco no es cierto: tomando $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es evidente que $\{|x_n|\} \to 1$ pero la sucesión $\{x_n\}$ no es convergente.

Pasamos a discutir la relación entre la convergencia de sucesiones y la estructura de $\mathbb{R}$: suma, producto y orden. Para la suma, la situación es diáfana:

- *Si* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *son sucesiones convergentes, entonces* $\{x_n + y_n\}$ *es convergente y se verifica que* $\lim\{x_n + y_n\} = \lim\{x_n\} + \lim\{y_n\}$.

En efecto, suponiendo que $\{x_n\} \to x$ y que $\{y_n\} \to y$, debemos probar que $\{x_n + y_n\} \to x + y$. Dado $\varepsilon > 0$ existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m_1$, mientras que $|y_n - y| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m_2$. Entonces, tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, para $n \geqslant m$ tenemos

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Para el producto, esperamos un resultado análogo, pero conviene probar previamente lo siguiente:

- *Si una sucesión* $\{y_n\}$ *está acotada y* $\{z_n\} \to 0$*, entonces* $\{y_n z_n\} \to 0$.

En efecto, existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que $|z_n| < \varepsilon/K$ para $n \geqslant m$, luego para $n \geqslant m$ tenemos

$$|y_n z_n| = |y_n|\,|z_n| \leqslant K\,|z_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Lo que ocurre con un producto de sucesiones convergentes es ya fácil de comprobar:

- *Si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *son sucesiones convergentes, entonces la sucesión* $\{x_n y_n\}$ *es convergente y se verifica que* $\lim\{x_n y_n\} = \lim\{x_n\} \cdot \lim\{y_n\}$.

Suponiendo que $\{x_n\} \to x$ y que $\{y_n\} \to y$, debemos probar que $\{x_n y_n\} \to xy$. Empezamos observando que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x y_n + x y_n - xy = (x_n - x) y_n + x(y_n - y)$$

Puesto que $\{x_n - x\} \to 0$, e $\{y_n\}$ está acotada (por ser convergente), será $\{(x_n - x) y_n\} \to 0$, pero también es claro que $\{x(y_n - y)\} \to 0$. El resultado anterior sobre sumas de sucesiones convergentes nos dice que $\{x_n y_n - xy\} \to 0$, luego $\{x_n y_n\} \to xy$, como queríamos. $\blacksquare$

Para aproximarnos al cociente de dos sucesiones convergentes, empecemos viendo lo que ocurre al invertir los términos de una sucesión convergente:

- *Si* $x_n \in \mathbb{R}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^*$, *entonces* $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} \to \dfrac{1}{x}$

Puesto que $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x_n}{x_n x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, bastará ver que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ está acotada. Ahora bien, tomando $\varepsilon = |x|/2 > 0$ encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - x| < |x|/2$ para $n \geqslant m$. Entonces, también para $n \geqslant m$, tenemos

$$|x_n| = |x - (x - x_n)| \geqslant |x| - |x - x_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}, \quad \text{luego} \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leqslant \frac{2}{|x|} \qquad \blacksquare$$

La hipótesis $x \in \mathbb{R}^*$ del resultado anterior es esencial. Si $x = 0$, entonces la sucesión $\{1/x_n\}$ no está acotada, pues si lo estuviera, tendríamos $\{x_n \cdot 1/x_n\} \to 0$, lo cual es absurdo. Lo que se puede afirmar sobre un cociente de sucesiones convergentes es ya inmediato:

- *Sea* $\{y_n\}$ *una sucesión convergente y* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales no nulos que converja a un número real no nulo. Entonces la sucesión* $\{y_n/x_n\}$ *es convergente y se verifica que:* $\lim\{y_n/x_n\} = \lim\{y_n\}/\lim\{x_n\}$

Pasamos ahora a discutir brevemente la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden de los números reales. Dicho de forma más intuitiva, queremos saber si las desigualdades entre los límites de dos sucesiones convergentes dan lugar a desigualdades entre los términos y viceversa. La respuesta es bien sencilla:

- *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones convergentes. Si* $\lim\{y_n\} < \lim\{x_n\}$, *entonces existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n < x_n$ *para* $n \geqslant m$.

Para comprobarlo, sea $y = \lim\{y_n\} < \lim\{x_n\} = x$. Tomamos $\varepsilon = (x - y)/2$ y encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ y también $|y_n - y| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Entonces, para $n \geqslant m$ tenemos claramente

$$y_n < y + \varepsilon = y + \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2} = x - \frac{x - y}{2} = x - \varepsilon < x_n \qquad \blacksquare$$

Si queremos que las desigualdades entre los términos de las dos sucesiones se reflejen en sus límites, basta enunciar equivalentemente el último resultado:

- *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones convergentes. Si el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ *es infinito, entonces:* $\lim\{x_n\} \leqslant \lim\{y_n\}$.

En efecto, si fuese $\lim\{y_n\} < \lim\{x_n\}$, el resultado anterior nos daría un $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para $n \geqslant m$, luego el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ sería finito. $\blacksquare$

Obviamente, si $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tendrá también $\lim\{x_n\} \leqslant \lim\{y_n\}$. Conviene sin embargo resaltar que de la desigualdad estricta $x_n < y_n$, aunque sea válida para todo $n \in \mathbb{N}$, no podemos deducir $\lim\{x_n\} < \lim\{y_n\}$. Basta observar, por ejemplo, lo que ocurre cuando $x_n = 0$, $y_n = 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Destacamos el caso particular del resultado anterior que se utiliza con más frecuencia.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- *Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant \beta\}$ es infinito, entonces* $\lim\{x_n\} \leqslant \beta$.
- *Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \alpha \leqslant x_n\}$ es infinito, entonces* $\alpha \leqslant \lim\{x_n\}$.
- *En particular, se tiene:* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \lim\{x_n\} \leqslant \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En los resultados anteriores se supone que las sucesiones involucradas son convergentes. En la situación que ahora vamos a considerar se consigue la convergencia de una sucesión que, por así decirlo, está "emparedada" entre dos sucesiones convergentes al mismo límite.

- *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ sucesiones tales que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ convergen a un mismo límite, entonces $\{y_n\}$ también converge a dicho límite.*

En efecto, sea $x = \lim\{x_n\} = \lim\{z_n\}$ y vamos a probar que $\{y_n\} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $|x_n - x| < \varepsilon$ y también $|z_n - x| < \varepsilon$. Entonces, para $n \geqslant m$ será $x - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < x + \varepsilon$, luego $|y_n - x| < \varepsilon$ como queríamos. ■

Obsérvese que el resultado anterior sigue siendo cierto si se supone solamente que la doble desigualdad $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ se verifica para todo n suficientemente grande. Sin embargo, para asegurar la convergencia de $\{y_n\}$, no basta que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\}$ sea infinito.

Concluimos este tema mostrando que algunas propiedades de $\mathbb{R}$ pueden interpretarse de forma muy clara e intuitiva, mediante la convergencia de sucesiones. Un primer ejemplo ya se ha comentado: la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ equivale a decir que $\{1/n\} \to 0$. La siguiente observación clarifica las nociones de supremo e ínfimo:

- *Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\{x_n\} \to \sup A$. Análogamente, si A es no vacío y minorado, existe una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de A tal que $\{y_n\} \to \inf A$.*

En efecto, si A está mayorado, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in A$ verificando que

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \sup A$$

Formamos así una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que evidentemente converge a $\sup A$. Para el ínfimo de un conjunto minorado se razona de forma análoga. ■

La relación entre supremo y máximo, o entre ínfimo y mínimo, puede entenderse ahora con más claridad. El supremo de un conjunto no vacío y mayorado, puede no pertenecer al conjunto, pero siempre es el límite de una sucesión de puntos del conjunto y, de hecho, es el único mayorante del conjunto que tiene esa propiedad. Análogamente, el ínfimo de un conjunto no vacío y minorado es el único minorante del conjunto que puede obtenerse como límite de una sucesión de puntos del conjunto. Por ejemplo, es ahora evidente que $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Podemos también interpretar la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Recordando que

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = x = \inf\{s \in \mathbb{Q} : s > x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deducimos claramente lo siguiente:

- *Para todo $x \in \mathbb{R}$, existen sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ de números racionales, tales que:*

$$r_n < x < s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad x = \text{lím}\{r_n\} = \text{lím}\{s_n\}$$

La misma idea puede usarse con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ obteniendo, para cada $x \in \mathbb{R}$, sendas sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ de números irracionales que convergen a x y verifican que $\alpha_n < x < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se puede hacer el mismo razonamiento con cualquier conjunto denso en $\mathbb{R}$.

5.6. Ejercicios de revisión

1. Probar que un conjunto A es numerable si, y sólo si, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A tal que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En particular, $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ para conveniente sucesión $\{r_n\}$. ¿Puede $\{r_n\}$ ser convergente?

2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$, definir una sucesión $\{x_n\}$ de puntos del conjunto $\{\alpha, \beta\}$ tal que los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \alpha\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \beta\}$ sean infinitos.

3. Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ pongamos $\{y_n\} \preceq \{x_n\}$ cuando $\{y_n\}$ sea una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Probar que la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva.¿Es antisimétrica?

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva. Probar que $\{x_{\phi(n)}\}$ converge al mismo límite que $\{x_n\}$. ¿Es $\{x_{\phi(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$?

5. Probar que las sucesiones $\{1/n^2\}$, $\{1/2^n\}$ y $\{1/n!\}$ convergen a cero.

6. En cada uno de los siguientes casos, probar que la sucesión dada es convergente y calcular su límite:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right\} \qquad \text{(b)} \quad \left\{ \frac{2n+5(-1)^n}{n+1} \right\} \qquad \text{(c)} \quad \left\{ \frac{(-1)^n n^2 - 3n + 4}{n^3+1} \right\}$$

7. Sea D un conjunto denso en $\mathbb{R}$.

   a) Probar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existen sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ verificando:

   $$\alpha_n, \beta_n \in D\,, \ \alpha_n < x < \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \ x = \text{lím}\{\alpha_n\} = \text{lím}\{\beta_n\}$$

   b) Recíprocamente, sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ verificando que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de elementos de A que converge a x. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.