

## Análisis Matemático II

### Tema 2: Ejercicios propuestos

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n} \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1 [$  y uniformemente en cada compacto  $K \subset ] - 1, 1 [$ , pero no converge uniformemente en  $] - 1, 1 [$ .

2. Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y que, si  $\alpha > 1$ , dicha serie converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se considera la función  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \log \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ .

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de potencias:

$$(a) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)} \qquad (b) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$$