Tema 10

Teorema Fundamental del Cálculo

Volvemos a la integral de Lebesgue, ahora para funciones reales de *una* variable real, con el fin de analizar la relación entre integral y derivada, lo que nos llevará a estudiar el que se conoce como *Teorema Fundamental del Cálculo*, denominación que indica su importancia. Viendo la derivación y la integración como dos operaciones con funciones, el teorema pone de manifiesto que cada una de ellas es la inversa de la otra.

Este resultado admite una versión particular mucho más sencilla, y probablemente conocida, en la que sólo intervienen integrales de funciones continuas. Sin embargo, este resultado más elemental, es suficiente para muchas aplicaciones prácticas. Por eso lo repasamos previamente, ya que admite una demostración mucho más sencilla que la del teorema general.

10.1. La integral indefinida

En todo lo que sigue, vamos a trabajar con integrales de funciones definidas en un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, que se suelen llamar *integrales simples*. Para este tipo de integrales, cambiamos la notación que hasta ahora venimos manejando, para usar la más clásica, que conocemos bien.

Para recordar dicha notación, escribimos $\alpha = \inf J$ cuando J está minorado, y en otro caso tomamos $\alpha = -\infty$. De manera análoga, escribimos $\beta = \sup J$ o $\beta = +\infty$, según que J esté mayorado o no.

Pues bien, tanto para $f \in \mathcal{L}^+(J)$, como para $f \in \mathcal{L}_1(J)$, escribiremos

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_J f \tag{1}$$

Esta notación parece ambigua, por indicar sólo los *límites de integración* α y β, que no varían al sustituir J por su interior J°, o por su cierre $\overline{J}$. Sin embargo, puesto que $\lambda\big(\overline{J} \setminus J^\circ\big) = 0$, es obvio que la integral que aparece en el segundo miembro de (1) sigue teniendo sentido, y su valor se mantiene, al sustituir J por J°. Lo mismo ocurre cuando sustituimos J por $\overline{J}$, dando a f cualquier valor en los puntos de $\overline{J} \setminus J$.

Así pues, cuando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, podemos entender que la integral del primer miembro de (1) se refiere a cualquiera de los cuatro intervalos cuyos extremos son α y β, según nos pueda convenir. Análogamente, si $\alpha = -\infty$ y $\beta \in \mathbb{R}$, o bien $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta = +\infty$, podemos pensar que dicha integral se refiere a una semirrecta abierta o cerrada según convenga.

Para abreviar ciertos razonamientos, convendrá usar integrales cuyos límites aparecen en posición invertida. Concretamente para una función integrable $f \in \mathcal{L}_1(J)$ escribimos

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{2}$$

También aparecerán integrales cuyos límites de integración coinciden, en cuyo caso se entiende que la integral se anula:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \forall a \in J \tag{3}$$

Estos convenios se usarán enseguida para introducir una noción que será clave en todo lo que sigue. La definimos para funciones que verifican una condición más débil que la integrabilidad.

Diremos que una función medible $f \in \mathcal{L}(J)$ es **localmente integrable** en J, cuando f sea integrable en todo intervalo compacto $K \subset J$, y denotaremos por $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ al conjunto de tales funciones. Es claro que $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(J)$, con $\mathcal{L}_1(J) \subset \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$. Esta inclusión es obviamente una igualdad cuando el intervalo J es compacto, pero no en general, como enseguida veremos.

Como todo intervalo compacto tiene medida finita, toda función medible y acotada en J es localmente integrable en J. Como ejemplo más sencillo, tomando $f(x) = 1$ para todo $x \in J$, tenemos $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, pero $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, J está acotado. Por otra parte, si $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua, y por tanto medible, entonces f está acotada, luego es integrable, en todo intervalo compacto $K \subset J$, luego $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$.

Para tener otro ejemplo ilustrativo, usamos el intervalo $J =]0,1]$ y la función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = 1/x$ para todo $x \in J$. Según hemos visto, $\varphi \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ por ser continua. Por otra parte, como la integral de Lebesgue extiende a la de Cauchy, que suponemos conocida, sabemos que

$$\int_{1/n}^1 \varphi(x)\,dx = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} = \log n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta que $\{]1/n, 1]\} \nearrow]0,1]$, si φ fuese integrable en J, la continuidad creciente de su integral nos diría que la sucesión $\{\log n\}$ converge en $\mathbb{R}$, lo que es obviamente falso. Para un intervalo J que ahora es acotado, pero no cerrado, vemos que $\mathcal{L}_1(J) \neq \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$.

A diferencia de lo que ocurría con las funciones integrables, vemos en el ejemplo anterior que, definiendo $\varphi(0)$ de cualquier forma, tenemos una función localmente integrable en J pero no en $\overline{J}$. Tomando $H = [0,1]$, vemos que φ es localmente integrable en H° pero no en H.

Dada $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, y fijado un punto $a \in J$, la **integral indefinida** de f con origen en a es la función $F : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in J$$

Nótese que la integral anterior tiene sentido para todo $x \in J$. Si $a < x$, ello se debe a que f es integrable en el intervalo compacto $[a, x] \subset J$. Si $a > x$, entonces f es integrable en $[x, a]$ y basta tener en cuenta (2). Finalmente, en virtud de (3) se tiene $F(a) = 0$.

La aditividad de la integral de f da lugar a una propiedad de su integral indefinida que usaremos a menudo.

- *Si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$, para cualesquiera $a, b, c \in J$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Teniendo en cuenta (2) la igualdad (4) equivale a que se tenga

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0 \tag{5}$$

igualdad que es obvia cuando dos de los puntos a, b, c coinciden. Por otra parte, es fácil observar que, al intercambiar cualesquiera dos de esos puntos, el primer miembro de (5) tan sólo cambia de signo. Basta por tanto considerar el caso $a < c < b$. Pero en ese caso, teniendo en cuenta por ejemplo que $[a, b[= [a, c[\uplus [c, b[$, la igualdad (4) es consecuencia obvia de la aditividad de la integral de f, como función del conjunto sobre el que se integra. ■

Aclaremos la relación entre dos integrales indefinidas de una misma función $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$. Para ello, dados $a, c \in J$, denotemos por F_a y F_c a las integrales indefinidas de f con orígenes en a y c respectivamente. Usando la igualdad (4) con $b = x$ obtenemos que

$$F_a(x) = F_a(c) + F_c(x) \qquad \forall x \in J$$

luego F_a y F_c difieren en una constante.

Pasamos ya a probar una propiedad clave de la integral indefinida, que abre el camino para entender la integración como la operación inversa de la derivación.

- *Sea $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$ y F una integral indefinida de f. Si f es continua en un punto $x \in J$, entonces F es derivable en el punto x, con $F'(x) = f(x)$.*

Fijado $y \in J \setminus \{x\}$, integrando una función constante, vemos claramente que, tanto si $x < y$ como si $y < x$, se tiene $(y - x) f(x) = \int_x^y f(x)\,dt$. Además, si la integral indefinida F tiene su origen en $a \in J$, usando (4) con $c = x$ y $b = y$ obtenemos que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$

Usando la linealidad de la integral, tenemos por tanto que

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) = \frac{1}{y - x}\left(\int_x^y f(t)\,dt - \int_x^y f(x)\,dt\right) = \frac{1}{y - x}\int_x^y \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \tag{6}$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en el punto x nos da un $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in J$ que verifique $|t - x| < \delta$, se tiene $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Supongamos que $|y - x| < \delta$ y sea K_y al intervalo compacto de extremos x e y. Puesto que f es integrable en K_y, también lo es la función $\varphi : K_y \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = f(t) - f(x)$ para todo $t \in K_y$. Además, para $t \in K_y$ se tiene que $|t - x| \leqslant |y - x| < \delta$, luego $|\varphi(t)| < \varepsilon$. Deducimos claramente que

$$\left| \int_x^y \big(f(t) - f(x) \big)\, dt \right| = \left| \int_{K_y} \varphi \right| \leqslant \int_{K_y} |\varphi| \leqslant \varepsilon\, \lambda(K_y) = \varepsilon\, |y - x|$$

Usando ahora (6), obtenemos la desigualdad

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y \big(f(t) - f(x) \big)\, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

válida para todo $y \in J$ con $0 < |y - x| < \delta$. Esto prueba que $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$, es decir, que F es derivable en el punto x con $F'(x) = f(x)$, como se quería. ■

10.2. Versión elemental del teorema

El resultado previo puede aplicarse en todos los puntos de J, obteniendo así la versión más elemental del teorema fundamental del cálculo. Este resultado sólo involucra integrales de funciones continuas en intervalos compactos, luego se trata de un hecho conocido, que vamos a repasar. Seguimos trabajando en un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$.

- *Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua y F una integral indefinida de f. Entonces F es una función de clase C^1 en J con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in J$.*

Acabamos de ver que F es derivable en J con $F' = f$, que es una función continua, luego F es de clase C^1 en J. ■

Expliquemos la forma en que el resultado anterior muestra la integración como operación inversa de la derivación. Para ello fijamos un punto $a \in J$ y consideramos, por una parte, el espacio vectorial $C_a^1(J)$ formado por las funciones reales de clase C^1 en J, que se anulan en el punto a. Por otra, tenemos el espacio vectorial $C(J)$ formado por todas las funciones continuas de J en $\mathbb{R}$.

Consideremos ahora la aplicación lineal $\mathcal{D} : C_a^1(J) \to C(J)$ definida por $\mathcal{D}(F) = F'$ para toda $F \in C_a^1(J)$. Como transforma funciones en funciones, se dice que $\mathcal{D}$ es un *operador* lineal. Si $F \in C_a^1(J)$ verifica que $\mathcal{D}(F) = F' = 0$, al ser J un intervalo, del teorema del valor medio se deduce que F es constante en J, pero $F(a) = 0$, luego tenemos $F = 0$. Esto prueba que el operador $\mathcal{D}$ es inyectivo, sin que hasta ahora haya aparecido integral alguna.

Pero dada una función continua $f \in C(J)$, sea $\mathcal{I}(f)$ la integral indefinida de f con origen en a, es decir:

$$\mathcal{I}\big(f\big)(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \forall\, x \in J$$

Por el resultado anterior, $\mathcal{I}(f)$ es una función de clase C^1 en J, cuya derivada es f. Como obviamente $\mathcal{I}(f)$ se anula en a, tenemos $\mathcal{I}(f) \in C_a^1(J)$ con $\mathcal{D}\big(\mathcal{I}(f)\big) = f$. Esto prueba que el operador $\mathcal{D}$ es biyectivo, y de paso que su inverso es el operador lineal $\mathcal{I}$, es decir, $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{I}$, luego también $\mathcal{D} = \mathcal{I}^{-1}$. Si entendemos que la derivación consiste en aplicar el operador $\mathcal{D}$, y la integración consiste en aplicar el operador $\mathcal{I}$, queda claro que cada una de estas operaciones es la inversa de la otra.

10.3. Derivación de integrales

Iniciamos ahora el camino hacia la forma general del teorema fundamental del cálculo. Como es natural, se trata de sustituir la función continua f que aparece en la versión elemental, por una función localmente integrable en nuestro intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$. El primer problema es la derivabilidad de cualquier integral indefinida de f, que no puede probarse como hemos hecho antes, pues la función f puede no ser continua en ningún punto de J. Sin embargo, el teorema de derivación de Lebesgue vendrá en nuestra ayuda, gracias a un par de observaciones inmediatas.

- *Si $g \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$ no toma valores negativos, entonces toda integral indefinida de g es una función creciente.*

En efecto, si G es la integral indefinida de g con origen en $a \in J$, para cualesquiera $x, y \in J$ con $x < y$, la integral de g sobre el intervalo $[x, y]$ es mayor o igual que 0, luego usando la igualdad (4) tenemos que

$$G(y) = \int_a^y g(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt + \int_x^y g(t)\,dt \geqslant \int_a^x g(t)\,dt = G(x)$$

y esto prueba que G es creciente. ■

- *Sea $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$ y $F : J \to \mathbb{R}$ una integral indefinida de f. Entonces F se expresa como diferencia de dos funciones crecientes, luego tiene variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$.*

Es claro que las funciones f^+ y f^- son localmente integrables en J. Consideramos entonces las integrales indefinidas de f^+ y f^- con el mismo origen que tenga F. Concretamente, si dicho origen es $a \in J$, para todo $x \in J$ escribimos

$$F_1(x) = \int_a^x f^+(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad F_2(x) = \int_a^x f^-(t)\,dt$$

Entonces, para todo $x \in J$, tanto si $a < x$ como si $a \geqslant x$, tenemos $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Por la observación previa, $F = F_1 - F_2$ es diferencia de dos funciones crecientes. Para un intervalo compacto $K \subset J$, como $F_1\big|_K$ y $F_2\big|_K$ son funciones crecientes, deducimos que $F\big|_K$ es una función de variación acotada. ■

Como habíamos anunciado, si F es una integral indefinida de una función $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$, el teorema de derivación de Lebesgue nos asegura que F es derivable c.p.d. en J, pero nuestro objetivo es ahora probar que de hecho se tiene $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in J$, cosa que no es nada fácil. Nótese que la anterior igualdad c.p.d. es lo mejor que podemos esperar, aún cuando F fuese derivable en todo punto de J. Basta pensar que F también es una integral indefinida de cualquier función que coincida con f c.p.d.

Para conseguir el resultado deseado, seguiremos un camino que a partir de ahora usaremos varias veces. Partiendo del caso en que f es una función muy sencilla, en nuestro caso la función característica de un intervalo acotado, iremos extendiendo el resultado a funciones más generales, pasando por la función característica de un conjunto medible, una función simple positiva y una función medible positiva, para llegar finalmente al caso general. Como se puede adivinar, este proceso requerirá salvar algún paso al límite, es decir, probar el resultado para el límite puntual de una sucesión de funciones, una vez que se conoce para cada término de la sucesión. Esto es lo que se podrá conseguir fácilmente con un resultado previo que vamos a probar. Lo deduciremos del siguiente teorema, útil para permutar la derivación con la suma de una serie de funciones crecientes. Se debe al matemático italiano G. Fubini (1879-1943), más conocido por su teorema sobre las integrales múltiples, que estudiaremos más adelante.

En lo que sigue trabajamos sobre todo en un intervalo compacto. Para evitar repeticiones, fijamos un intervalo $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$.

Teorema. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones crecientes de K en $\mathbb{R}$, supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en K, y denotemos por $f : K \to \mathbb{R}$ a su suma. Se tiene entonces que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \text{p.c.t. } x \in K \tag{7}$$

Concretamente, existe un conjunto $B \subset K$, con $\lambda(K \setminus B) = 0$, verificando que f_n es derivable en B para todo $n \in \mathbb{N}$, y que f es derivable en B con $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ para todo $x \in B$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando el teorema de derivación de Lebesgue, obtenemos que f_n es derivable en un conjunto $E_n \subset K$, tal que $\lambda(K \setminus E_n) = 0$. Es claro que también la función f es creciente, luego es derivable en un conjunto $E_0 \subset K$ tal que $\lambda(K \setminus E_0) = 0$. Tomando $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$, tenemos que $K \setminus E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (K \setminus E_n)$, luego $\lambda(K \setminus E) = 0$. Además es claro que f_n es derivable en E para todo $n \in \mathbb{N}$, e igual le ocurre a f.

Con el fin de trabajar con funciones que no tomen valores negativos, para $t \in K$ definimos

$$g(t) = f(t) - f(a) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad g_n(t) = f_n(t) - f_n(a) \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La función g es creciente, y es derivable en todo punto $x \in E$ con $g'(x) = f'(x)$. Del mismo modo, tenemos $g_n'(x) = f_n'(x)$ para todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos también que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f(t) - f(a) = g(t) \qquad \forall t \in K$$

En un primer paso, probaremos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ converge puntualmente en E. Para ello, consideremos las sumas parciales y el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} g_n$, es decir:

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \quad \text{y} \quad R_n(t) = g(t) - S_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(t) \qquad \forall t \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, las funciones S_n y R_n son derivables en E con

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(x) \quad \text{y} \quad R_n'(x) = g'(x) - S_n'(x) \qquad \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado $x \in E$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $g_n'(x) \geqslant 0$, ya que g_n es creciente. Por otra parte, también para todo $n \in \mathbb{N}$, la función R_n es creciente, por ser la suma de una serie de funciones crecientes, luego también tenemos $R_n'(x) \geqslant 0$, de donde

$$S_n'(x) \leqslant S_n'(x) + R_n'(x) = g'(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, la sucesión $\{S_n'(x)\}$ es creciente y mayorada, luego converge en $\mathbb{R}$. Esto prueba que la serie $\sum_{n\geqslant 1} g_n' = \{S_n'\}$ converge puntualmente en E como habíamos anunciado. En un segundo paso, veremos que la suma de esta serie coincide con g' c.p.d. en E, concluyendo así la demostración.

Usando que $\{R_n(b)\} \to 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos $k_n \in \mathbb{N}$, tal que $R_k(b) \leqslant 1/2^n$ para $k \geqslant k_n$. Definimos entonces por inducción, $\sigma(1) = k_1$ y $\sigma(n+1) = \max\{\sigma(n)+1, k_{n+1}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente y, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sigma(n) \geqslant k_n$, de donde $R_{\sigma(n)}(b) \leqslant 1/2^n$. Como $R_{\sigma(n)}$ es creciente, deducimos que

$$0 \leqslant R_{\sigma(n)}(t) \leqslant R_{\sigma(n)}(b) \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \forall x \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

luego la serie $\sum_{n\geqslant 1} R_{\sigma(n)}$ converge (de hecho uniformemente) en K.

Observamos ahora que la sucesión $\{R_{\sigma(n)}\}$ cumple las mismas condiciones que $\{g_n\}$. Es una sucesión de funciones crecientes de K en $\mathbb{R}_0^+$, tales que la serie $\sum_{n\geqslant 1} R_{\sigma(n)}$ converge puntualmente en K. Podemos por tanto aplicar a la sucesión $\{R_{\sigma(n)}\}$ lo demostrado en un primer paso para $\{g_n\}$. Obtenemos así un conjunto $F \subset K$ con $\lambda(K \setminus F) = 0$, tal que $R_{\sigma(n)}$ es derivable en F para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n\geqslant 1} R_{\sigma(n)}'$ converge puntualmente en F. Por tanto, tenemos $\{R_{\sigma(n)}'(x)\} \to 0$ para todo $x \in F$.

Finalmente tomamos $B = E \cap F$, que claramente verifica: $\lambda(K \setminus B) = 0$. Fijado $x \in B$, por ser $x \in E$, teníamos que $R_{\sigma(n)}'(x) = g'(x) - S_{\sigma(n)}'(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero al ser $x \in F$, también tenemos que $\{R_{\sigma(n)}'(x)\} \to 0$, y deducimos que $\{S_{\sigma(n)}'(x)\} \to g'(x)$.

Además, de nuevo por ser $x \in E$, sabíamos que la sucesión $\{ S_n'(x) \}$ es convergente, luego no queda más salida que $\{ S_n'(x) \} \to g'(x)$. Así pues, para todo $x \in B$, concluimos que

$$f'(x) = g'(x) = \lim_{n \to \infty} S_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Esto prueba que se verifica (7), concluyendo la demostración. ■

A continuación obtenemos una consecuencia sencilla del teorema anterior, que es la que nos interesa:

- *Sea $\varphi : K \to \mathbb{R}_0^+$ una función integrable y $\{\varphi_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas, que converja a φ puntualmente en K. Consideremos las integrales indefinidas dadas por*

  $$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad \text{y} \quad \Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)\,dt \qquad \forall x \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

  Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\Phi_n'(x) = \varphi_n(x)$ p.c.t. $x \in K$. Entonces también se tiene que $\Phi'(x) = \varphi(x)$ p.c.t. $x \in K$.

El teorema de la convergencia monótona nos asegura que la sucesión $\{ \Phi_n \}$ converge a Φ puntualmente en K. Para poder usar el teorema anterior, expresamos dicha sucesión en forma de serie. Para ello tomamos $\Phi_0(t) = 0$ para todo $t \in K$ y escribimos

$$\{ \Phi_n \} = \sum_{n \geqslant 1} \Psi_n \qquad \text{donde} \qquad \Psi_n = \Phi_n - \Phi_{n-1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma tenemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \Psi_n$ converge puntualmente en K con

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \qquad \forall x \in K$$

Además, tomando también $\varphi_0(t) = 0$ para todo $t \in K$, vemos que, para cada $\in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Psi_n(x) = \Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x) = \int_a^x \big(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) \big)\,dt \qquad \forall x \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como la sucesión $\{\varphi_n\}$ es creciente, vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ no toma valores negativos, luego su integral indefinida Ψ_n es una función creciente.

Usando el teorema anterior, obtenemos un conjunto $B \subset K$, con $\lambda(K \setminus B) = 0$, tal que Ψ_n es derivable en B para todo $n \in \mathbb{N}$ y Φ es derivable en B con

$$\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n'(x) \qquad \forall x \in B \tag{8}$$

Por hipótesis sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $A_n \subset K$, con $\lambda(K \setminus A_n) = 0$, tal que Φ_n es derivable en A_n con $\Phi_n'(x) = \varphi_n(x)$ para todo $x \in A_n$. Tomando $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ se tiene $K \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \setminus A_n)$, luego $\lambda(K \setminus A) = 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que Φ_n es derivable en A con $\Phi_n'(x) = \varphi_n(x)$ para todo $x \in A$. Deducimos claramente que, también para todo $n \in \mathbb{N}$, la función Ψ_n es derivable en A con

$$\Psi_n'(x) = \Phi_n'(x) - \Phi_{n-1}'(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \qquad \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Finalmente, tomamos $C = A \cap B$, que verifica $\lambda(K \setminus C) = 0$. En vista de (8) y (9), para todo $x \in C$ tenemos

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)\end{aligned}$$

Esto prueba que $\Phi'(x) = \varphi(x)$ p.c.t. $x \in K$, como queríamos demostrar. ■

Todo está ya preparado para completar la derivación de una integral indefinida. Por ahora seguimos trabajando en el intervalo compacto K.

- *Sea $f \in \mathcal{L}_1(K)$ y $F : K \to \mathbb{R}$ la integral indefinida de f con origen en el punto a. Entonces F es derivable c.p.d. en K con $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in K$.*

Para evitar repeticiones, se entenderá que todas las integrales indefinidas que usemos tienen su origen en a. Para formalizar mejor el proceso que vamos a seguir, denotemos por $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones que verifican la afirmación del enunciado, es decir, funciones integrables en K que coinciden c.p.d. con la derivada de su integral indefinida. Nuestro objetivo es probar que $\mathcal{F} = \mathcal{L}_1(K)$, y para ello usaremos dos propiedades de estabilidad que tiene el conjunto $\mathcal{F}$. La primera se comprueba rutinariamente, sin dificultad: *$\mathcal{F}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(K)$.*

El segundo tipo de estabilidad que tiene $\mathcal{F}$ viene dado por el resultado probado previamente: *si una función $\varphi \in \mathcal{L}_1(K)$ es el límite puntual de una sucesión creciente $\{\varphi_n\}$ de funciones medibles positivas, y $\varphi_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi \in \mathcal{F}$.*

Probaremos de forma rutinaria que, para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, se tiene $\chi_E \in \mathcal{F}$, donde se entiende que χ_E es la restricción a K de la función característica de E. Empezamos por un intervalo semiabierto $I = [c,d[$ con $c < d$. Como χ_I es continua en $K \setminus \{c,d\}$, su integral indefinida Φ es derivable en dicho conjunto con $\Phi'(x) = \chi_I(x)$ para $x \in K \setminus \{c,d\}$, luego $\chi_I \in \mathcal{F}$. En particular tenemos $\chi_I \in \mathcal{F}$ para todo intervalo diádico $I \subset \mathbb{R}$

Dado un abierto $G \subset \mathbb{R}$ podemos escribir $G = \biguplus_{n=1}^{\infty} I_n$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n es un intervalo diádico y, llamando χ_n a su función característica, tenemos $\chi_n \in \mathcal{F}$. Se tiene entonces que $\chi_G = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n$, y definimos $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, que converge a χ_G puntualmente en K. Como $\mathcal{E}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(K)$ tenemos que $\varphi_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego también $\chi_G \in \mathcal{F}$.

Dado un conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}$, observamos que $\chi_F(t) = 1 - \chi_G(t)$ para todo $t \in K$, donde $G = \mathbb{R} \setminus F$ es abierto, luego $\chi_G \in \mathcal{F}$ y es evidente que toda función constante en K pertenece a $\mathcal{F}$, luego $\chi_F \in \mathcal{F}$. Si ahora A es un conjunto de tipo F_σ, podemos escribir $\{F_n\} \nearrow A$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto F_n es cerrado y llamamos ψ_n a su función característica. Entonces $\{\psi_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas que converge a χ_A puntualmente en K. Como ya sabemos que $\psi_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\chi_A \in \mathcal{F}$. Finalmente, para un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, podemos escribir $E = A \uplus Z$ donde A es un conjunto de tipo F_σ y $\lambda(Z) = 0$. Ya sabemos que $\chi_A \in \mathcal{F}$ y es evidente que $\chi_Z \in \mathcal{F}$, pues la integral indefinida de χ_Z es la función idénticamente nula en K, cuya derivada coincide con χ_Z c.p.d. en K. Como $\chi_E = \chi_A + \chi_Z$, concluimos que $\chi_E \in \mathcal{F}$, lo cual es cierto para todo $E \in \mathcal{M}$ como se quería.

Usando de nuevo que $\mathcal{F}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(K)$, obtenemos que $s\big|_K \in \mathcal{F}$ para toda función simple positiva s. Si ahora $g \in \mathcal{L}_1(K)$ no toma valores negativos, tenemos una sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples positivas que converge a g puntualmente en K. Como $s_n\big|_K \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $g \in \mathcal{F}$. Finalmente, para $f \in \mathcal{L}_1(K)$ hemos probado que $f^+, f^- \in \mathcal{F}$, luego también $f \in \mathcal{F}$. Así pues, $\mathcal{F} = \mathcal{L}_1(K)$ como se quería. ■

Para obtener lo que se puede entender como una primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, sólo queda sustituir el intervalo compacto K por un intervalo no trivial, lo que no ofrece dificultad:

Teorema *(Derivación de integrales). Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ cualquier integral indefinida de una función $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$. Entonces F es derivable c.p.d. en J con $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in J$.*

Demostración. Como ya hemos hecho antes, expresamos J como una unión numerable de intervalos compactos no triviales: $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea F_n la integral indefinida de f con origen en el mínimo de K_n, que como sabemos, difiere de F en una constante.

Como f es integrable en K_n, sabemos que existe un conjunto $A_n \subset K_n$, con $\lambda(K_n \setminus A_n) = 0$, tal que la restricción de F_n al intervalo K_n es derivable en todo punto $x \in A_n$ con derivada $f(x)$. Suprimiendo a lo sumo dos puntos de A_n podemos suponer que $A_n \subset K_n^\circ$, lo que permite usar el carácter local de la derivada para obtener que F_n es derivable en A_n con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in A_n$. Pero F_n y F difieren en una constante, luego F también es derivable en A_n y tenemos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in A_n$, lo cual es válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tenemos $J \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \setminus A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \setminus A_n)$, luego $\lambda(J \setminus A) = 0$, y sabemos que F es derivable en A con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. ■

Para completar la versión general del teorema fundamental del cálculo, falta caracterizar las funciones que se obtienen como integrales indefinidas de funciones localmente integrables. Ello se consigue mediante una propiedad de la integral que hasta ahora no habíamos utilizado: la continuidad absoluta.

10.4. Funciones absolutamente continuas

Volvemos a trabajar en un intervalo compacto $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$. Recordemos que si $f \in \mathcal{L}_1(K)$, la integral de f era absolutamente continua, como función del conjunto sobre el que se integra. Más concretamente sabemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ que verifica:

$$E \in \mathcal{M}, \ E \subset K, \ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |f| < \varepsilon$$

Si ahora F es cualquier integral indefinida de f, de la afirmación anterior vamos a deducir una importante propiedad de F. De entrada, podemos tomar $E =]c, d[\subset K$ con $d - c < \delta$ y usando la igualdad (4) obtenemos

$$|F(d) - F(c)| = \left| \int_c^d f(x)\,dx \right| = \left| \int_E f \right| \leqslant \int_E |f| < \varepsilon$$

Por tanto F es uniformemente continua en K, pero vamos a hacer algo más general. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\{]a_k, b_k[: k \in \Delta_n \}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos, contenidos en K y verificando que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, podemos tomar $E = \biguplus_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\subset K$, que claramente es medible con $\lambda(E) < \delta$, para obtener que

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(x)|\,dx = \int_E |f| < \varepsilon$$

Ha aparecido aquí una propiedad de F que no involucra a la función f. Es fácil adivinar el nombre que vamos a darle a esta propiedad.

Se dice que una función $F : K \to \mathbb{R}$ es **absolutamente continua**, cuando para cada $\varepsilon > 0$ pueda encontrase un $\delta > 0$ verificando la siguiente condición: si $n \in \mathbb{N}$ y $\{]a_k, b_k[: k \in \Delta_n \}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Ha quedado claro que toda integral indefinida de una función integrable en K es absolutamente continua, y nuestro objetivo es probar, entre otras cosas, que el recíproco también es cierto. Esto nos llevará a la caracterización que buscamos de las integrales indefinidas de funciones localmente integrables, para completar el estudio del teorema fundamental del cálculo.

Hemos visto que toda función absolutamente continua es continua, pero enseguida veremos que el recíproco es falso, como consecuencia de otra propiedad clave que tienen las funciones absolutamente continuas. Preparamos el resultado probando la aditividad de la variación total de cualquier función:

- *Dado $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$, para toda función $F : K \to \mathbb{R}$ se tiene:*

$$V(F; a,b) = V(F; a,c) + V(F; c,b) \tag{10}$$

Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \Pi(a,b)$ con $c \notin P$, sea $k \in \Delta_n$ tal que $x_{k-1} < c < x_k$. Tomando $Q = P \cup \{c\} \in \Pi(a,b)$, vemos claramente que

$$\sigma(f,Q) - \sigma(f,P) = \big|F(c) - F(x_{k-1})\big| + \big|F(x_k) - F(c)\big| - \big|F(x_k) - F(x_{k-1})\big| \geqslant 0$$

desigualdad que es evidente cuando $c \in P$, pues entonces $Q = P$.

Entonces, tomando $P_1 = Q \cap [a, c] \in \Pi(a,c)$ y $P_2 = Q \cap [c, b]$, se tiene

$$\sigma(F,P) \leqslant \sigma(F,Q) = \sigma(F,P_1) + \sigma(F,P_2) \leqslant V(F\,;a,c) + V(F\,;c,b)$$

Como $P \in \Pi(a,b)$ era arbitraria, deducimos que $V(F\,;a,b) \leqslant V(F\,;a,c) + V(F\,;c,b)$.

La otra desigualdad es aún más sencilla. Dadas $P_1 \in \Pi(a,c)$ y $P_2 \in \Pi(c,b)$, podemos tomar $Q = P_1 \cup P_2$ para tener como antes que

$$\sigma(F,P_1) + \sigma(F,P_2) = \sigma(F,Q) \leqslant V(F\,;a,b)$$

y dada la arbitrariedad de P_1 y P_2, concluimos que $V(F\,;a,c) + V(F\,;c,b) \leqslant V(F\,;a,b)$. ■

Dada ahora una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \Pi(a,b)$, mediante una obvia inducción, deducimos a partir de (10) que, para cualquier función $F : K \to \mathbb{R}$ se tiene:

$$V(F\,;a,b) = \sum_{k=1}^{n} V(F\,;x_{k-1},x_k) \tag{11}$$

Podemos ya obtener la propiedad de las funciones absolutamente continuas que nos interesa:

- *Toda función absolutamente continua $F : K \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada.*

Tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad absoluta de F. Subdividimos entonces K en intervalos que tengan longitud menor que δ, es decir, para conveniente $m \in \mathbb{N}$, tomamos una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\} \in \Pi(a,b)$, con $x_k - x_{k-1} < \delta$ para todo $k \in \Delta_m$.

Fijado $k \in \Delta_m$, sea ahora $P_k = \{x_{k-1} = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = x_k\} \in \Pi(x_{k-1},x_k)$. Vemos entonces que $\big\{\,]t_{j-1}, t_j[\ : \ j \in \Delta_n\big\}$ es una familia de n intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, verificando que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = x_k - x_{k-1} < \delta$, luego la elección de δ nos dice que

$$\sigma(F,P_k) = \sum_{j=1}^{n} \big|F(t_j) - F(t_{j-1})\big| < 1$$

La arbitrariedad de la partición P_k nos permite deducir que $V(F\,;x_{k-1},x_k) \leqslant 1$. Pero si ahora tenemos en cuenta (11), concluimos que $V(F\,;a,b) \leqslant m < \infty$, así que F es una función de variación acotada, como queríamos demostrar. ■

Procede ahora recordar que la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x\cos(\pi/x)$ para todo $x \in]0,1]$ y $f(0) = 0$, es continua, de hecho uniformemente continua, pero no es de variación acotada, luego tampoco puede ser absolutamente continua. Por tanto, la continuidad absoluta es una propiedad estrictamente más fuerte que la continuidad. Enseguida vemos una condición natural, fácil de adivinar, que garantiza la continuidad absoluta.

- *Toda función lipschitziana $F : K \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua.*

Sea $M \in \mathbb{R}_0^+$ la constante de Lipschitz de F y, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $\delta M < \varepsilon$. Si ahora $n \in \mathbb{N}$ y $\{]a_k, b_k[: k \in \Delta_n\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, verificando que $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leqslant M \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < M\delta < \varepsilon$$

y esto prueba que F es absolutamente continua. ■

El recíproco de este resultado es falso, más adelante aparecerán abundantes ejemplos de funciones absolutamente continuas que no son lipschitzianas.

10.5. Integración de derivadas

Sabido que las funciones absolutamente continuas son de variación acotada, podemos poner en juego el teorema de derivación de Lebesgue, para obtener que toda función absolutamente continua $F : K \to \mathbb{R}$ es derivable c.p.d. en K. Nuestro siguiente objetivo será probar que F' es integrable en K, lo que de hecho es cierto para cualquier función de variación acotada.

La afirmación anterior debe explicarse, puesto que estamos hablando de funciones que no están definidas en K, sino en un conjunto $E \subset K$, tal que $\lambda(K \setminus E) = 0$. Una tal función puede manejarse, a todos los efectos, como si estuviese definida en K. A partir de ahora encontraremos a menudo funciones en esta situación, así que aclararemos la cuestión en un contexto general.

Dado un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y un conjunto $E \subset \Omega$ con $\lambda(\Omega \setminus E) = 0$, con lo que también $E \in \mathcal{M}$, para una función $f : E \to Y$, donde Y es un espacio topológico, es natural decir que f está **definida c.p.d.** en Ω. Sólo nos interesan los casos $Y = [0, \infty]$ e $Y = \mathbb{R}$, pero queremos tratar los dos casos a la vez. Observamos que si $g : \Omega \to Y$ es cualquier extensión de f, entonces g es medible si, sólo si, lo es f. En efecto, dado un abierto $U \subset Y$, se tiene que $f^{-1}(U) = g^{-1}(U) \cap E$, luego f es medible siempre que lo sea g. Pero también se tiene que $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup Z$ donde $Z = g^{-1}(U) \cap (\Omega \setminus E) \subset \Omega \setminus E$, luego Z es medible, y deducimos que g es medible siempre que lo sea f. Suponiendo a partir de ahora que f y g son medibles, en el caso $Y = [0, \infty]$, para todo conjunto medible $A \subset \Omega$ se tiene que

$$\int_A g = \int_{A \cap E} g = \int_{A \cap E} f \tag{12}$$

En el caso $Y = \mathbb{R}$, como $|g|$, g^+ y g^- extienden respectivamente a $|f|$, f^+ y f^-, usando lo dicho para funciones positivas, vemos que f es integrable en $A \cap E$ si, y sólo si, g es integrable en A, en cuyo caso se verifica de nuevo (12). En particular, $f \in \mathcal{L}_1(E)$ si, y sólo si, $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Por tanto, como habíamos dicho, a efectos de la integración, siempre podemos sustituir f por g, y considerar que f está definida en Ω. De esta forma evitamos tener que referirnos constantemente al conjunto E, que a menudo no conocemos con precisión.

Así pues, si f es una función medible positiva, definida c.p.d. en Ω, para todo conjunto medible $A \subset \Omega$ podemos definir

$$\int_A f \stackrel{\text{def}}{=} \int_A g \tag{13}$$

donde $g : \Omega \to [0, \infty]$ es cualquier extensión de f. Del mismo modo, cuando f es una función real medible, definida c.p.d. en Ω, decimos que f es integrable en un conjunto medible $A \subset \Omega$, cuando cualquier extensión de f lo sea, en cuyo caso, la integral de f sobre A se define de nuevo mediante la igualdad (13). En particular escribimos $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ cuando $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$.

Como se ha dicho, pretendemos estudiar la integrabilidad de la derivada de una función de variación acotada. Empezamos aprovechando comentarios anteriores para probar la siguiente observación:

- *Toda función de variación acotada $F : K \to \mathbb{R}$ es medible.*

Basta recordar que F es continua en un conjunto $E \subset K$ tal que $K \setminus E$ es numerable, y por tanto se tiene $\lambda(K \setminus E) = 0$. En particular $F\big|_E$ es continua, luego medible, y deducimos que F es medible, como cualquier otra extensión de $F\big|_E$. ■

Para estudiar la derivada de una función creciente usaremos una sencilla observación, que más adelante quedará como caso muy particular de la fórmula de cambio de variable.

- *Fijado $c \in \mathbb{R}$, sea $H = K + c$ y $f \in \mathcal{L}_1(H)$. Consideremos la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x+c)$ para todo $x \in K$. Entonces, g es integrable en K y su integral coincide con la de f en H, es decir,*

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx \tag{14}$$

En primer lugar vemos que el resultado es cierto cuando f es la restricción a H de la función característica de un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, en cuyo caso g es la restricción a K de la función característica del conjunto $E - c$. Está claro que $f \in \mathcal{L}_1(H)$ y $g \in \mathcal{L}_1(K)$, pero además se cumple (14), ya que

$$\int_K g = \lambda\big(K \cap (E - c)\big) = \lambda\big(H \cap E\big) = \int_H f$$

donde hemos usado la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue.

A partir de aquí, seguiremos una rutina que ya hemos usado anteriormente. Llamamos $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{L}_1(H)$ que verifiquen la afirmación del enunciado. Usando que $\mathcal{L}_1(K)$ es un espacio vectorial y la linealidad de la integral en $\mathcal{L}_1(K)$ y $\mathcal{L}_1(H)$, vemos muy claramente que $\mathcal{F}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(H)$. De lo ya demostrado se deduce entonces que $s\big|_H \in \mathcal{F}$ para toda función simple positiva s.

Sea ahora $f \in \mathcal{L}_1(H)$ con $f \geqslant 0$ y tomemos una sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples positivas, que converja a f puntualmente en H. Definiendo $t_n(x) = s_n(x+c)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{t_n\}$ también es una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge a f puntualmente en K.

Por tanto g es una función medible positiva. Podemos ahora usar (dos veces) el teorema de la convergencia monótona y, teniendo en cuenta que $s_n\big|_H \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\int_K g = \lim_{n\to\infty} \int_K t_n = \lim_{n\to\infty} \int_H s_n = \int_H f$$

Esto prueba que $g \in \mathcal{L}_1(K)$ y que se verifica (14) luego $f \in \mathcal{F}$. Finalmente, para $f \in \mathcal{L}_1(H)$ arbitraria, hemos visto que $f^+, f^- \in \mathcal{F}$, luego $f \in \mathcal{F}$, lo que concluye la demostración. ■

Probamos ya el resultado clave que vamos buscando, aunque después se pueda generalizar:

- *Si $F : K \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces $F' \in \mathcal{L}_1(K)$ con*

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a) \tag{15}$$

Extendemos la función F definiendo $F(x) = F(b)$ para todo $x \in]b, b+1]$, con lo que sigue siendo creciente. Podríamos haber perdido la derivabilidad de F en b, pero no la usaremos. Fijamos un conjunto $E \subset K^\circ$, con $\lambda(K \setminus E) = 0$ tal que F sea derivable en E. Nuestro primer objetivo es probar que la función F', definida c.p.d. en K, es una función medible positiva.

Para ello consideramos la sucesión $\{F_n\}$ de funciones de K en $\mathbb{R}_0^+$ definida por

$$F_n(x) = \frac{F\big(x + (1/n)\big) - F(x)}{1/n} \qquad \forall x \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que F_n se expresa como diferencia de dos funciones crecientes, luego es una función medible. Además, por definición de derivada tenemos que $\big\{F_n(x)\big\} \to F'(x)$ para todo $x \in E$. Por tanto, si χ es la restricción a K de la función característica de E, vemos que la sucesión $\big\{\chi F_n\big\}$, de funciones medibles positivas, converge puntualmente en K a la función $f : K \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in E$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in K \setminus E$. Deducimos que f es una función medible positiva, luego lo mismo le ocurre a F'.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, calculamos ahora la integral de F_n usando el resultado previo, con $c = 1/n$. Para abreviar escribimos $a_n = a + (1/n)$ y $b_n = b + (1/n)$. Nótese que $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$ para todo $x \in [a, b+1]$, luego F es integrable en dicho intervalo, y por tanto en $[a_n, b_n]$. Usando también la igualdad (4) y el crecimiento de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
(1/n) \int_a^b F_n(x)\,dx &= \int_a^b F\big(\big(x + (1/n)\big)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} F(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx = \int_b^{b_n} F(x)\,dx - \int_a^{a_n} F(x)\,dx \\
&\leqslant (b_n - b)F(b) - (a_n - a)F(a) = (1/n)\big(F(b) - F(a)\big)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando el lema de Fatou para la sucesión $\big\{\chi F_n\big\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b F'(x)\,dx &= \int_K f = \int_K \liminf_{n\to\infty} \big(\chi F_n\big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_K \chi F_n \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Esto prueba que $F' \in \mathcal{L}_1(K)$ y se verifica (15), como queríamos. ■

Es tentador pensar que la desigualdad (15) pueda ser una igualdad, pero enseguida nos damos cuenta de que el anterior resultado, con igualdad en (15), no puede ser cierto. En tal caso, lo podríamos usar para todo intervalo de la forma $[a, x]$ con $a < x < b$, obteniendo que

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Pero entonces, salvo una constante aditiva, F sería una integral indefinida de F', luego F sería absolutamente continua. Sin embargo, F era solamente una función creciente, que puede no ser siquiera continua. Así pues, para conseguir el resultado anterior, con igualdad en (15), debemos suponer que F es absolutamente continua, que es exactamente lo que haremos. Pero antes, conviene probar una versión más general del último resultado, que no ofrece dificultad:

Teorema *(Integración de derivadas). Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función que tenga variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$. Entonces F' es localmente integrable en J.*

Demostración. Dado un intervalo compacto $K \subset J$, tenemos $F(x) = g(x) - h(x)$ para todo $x \in K$, donde $g, h : K \to \mathbb{R}$ son funciones crecientes. Por el resultado anterior, g' y h' son integrables en K, luego F' también lo es, ya que $F'(x) = g'(x) - h'(x)$ p.c.t. $x \in K$. Esto prueba que $F' \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, como se quería. ■

10.6. Versión general del teorema

Usaremos una propiedad de la medida exterior de Lebesgue, que hasta ahora no habíamos necesitado: aunque no es σ-aditiva, sí es crecientemente continua, como vamos a ver.

- *Si $\{E_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, entonces:*

$$\{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda^*(E_n)\big\} \nearrow \lambda^*(E)$$

Como λ^* es creciente, tenemos $\big\{\lambda^*(E_n)\big\} \nearrow \rho \in [0, \infty]$, y también $\lambda^*(E_n) \leqslant \lambda^*(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde $\rho \leqslant \lambda^*(E)$. Como la otra desigualdad es obvia si $\rho = \infty$, suponemos ahora que $\rho < \infty$, con lo que $\lambda^*(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, la regularidad exterior de λ^* nos da un abierto $U_n \subset \mathbb{R}$, con $E_n \subset U_n$, tal que $\lambda(U_n) < \lambda^*(E_n) + (\varepsilon/2^n)$. Para tener una sucesión creciente de abiertos, tomamos $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $E_k \subset U_{k+1} \cap G_k$ y vemos también que $G_{k+1} \setminus G_k = U_{k+1} \setminus (U_{k+1} \cap G_k)$. Entonces, usando que λ es finitamente aditiva y que λ^* es creciente, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda\big(G_{k+1}\big) - \lambda\big(G_k\big) &= \lambda\big(G_{k+1} \setminus G_k\big) = \lambda\big(U_{k+1} \setminus (U_{k+1} \cap G_k)\big) \\ &= \lambda\big(U_{k+1}\big) - \lambda\big(U_{k+1} \cap G_k\big) \leqslant \lambda\big(U_{k+1}\big) - \lambda^*\big(E_k\big) \\ &< \lambda^*\big(E_{k+1}\big) + \big(\varepsilon/2^{k+1}\big) - \lambda^*\big(E_k\big) \end{aligned}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, usamos la desigualdad anterior para todo $k \in \Delta_{n-1}$, y teniendo en cuenta que $G_1 = U_1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lambda(G_n) &= \lambda(U_1) + \lambda(G_n) - \lambda(G_1) = \lambda(U_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\lambda(G_{k+1}) - \lambda(G_k)\big) \\ &< \lambda^*(E_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\lambda^*(E_{k+1}) - \lambda^*(E_k)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &= \lambda(E_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \lambda^*(E_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

Finalmente, si $\{G_n\} \nearrow G$, es claro que $E \subset G$, luego usando que λ es crecientemente continua, obtenemos

$$\lambda^*(E) \leqslant \lambda(G) = \lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon = \rho + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos $\lambda^*(E) \leqslant \rho$, que era la desigualdad que faltaba. ■

Pasamos a probar una propiedad clave de las funciones absolutamente continuas: preservan los conjuntos de medida nula. Volvemos a trabajar en un intervalo compacto $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$.

- *Si $F : K \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, para todo conjunto $A \subset K$, con $\lambda(A) = 0$, se tiene que $\lambda\big(F(A)\big) = 0$.*

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad absoluta de F. Como $\lambda(A) = 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}$ tal que $A \subset G$ y $\lambda(G) < \delta$. Expresamos entonces el abierto $G \cap K^\circ$ como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos:

$$G \cap K^\circ = \biguplus_{n=1}^{\infty} [a_k, b_k[\tag{16}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por ser F continua, se tiene que $F\big([a_k, b_k]\big)$ es un intervalo compacto, así que existen $c_k, d_k \in [a_k, b_k]$, con $c_k < d_k$ tales que $F\big([a_k, b_k]\big)$ es el intervalo cerrado de extremos $F(c_k)$ y $F(d_k)$. Se tiene por tanto que

$$\lambda\big(F([a_k, b_k])\big) = \big|F(d_k) - F(c_k)\big| \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{17}$$

y es claro que $]c_k, d_k[\subset]a_k, b_k[$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos ahora que $\big\{]c_k, d_k[: k \in \Delta_n \big\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, verificando que

$$\sum_{k=1}^{n} \big(d_k - c_k\big) < \sum_{k=1}^{\infty} \big(b_k - a_k\big) = \lambda(G \cap K^\circ) \leqslant \lambda(G) < \delta$$

La elección de δ nos permite obtener que $\sum_{k=1}^{n} \big|F(d_k) - F(c_k)\big| < \varepsilon$ y, como esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \big|F(d_k) - F(c_k)\big| \leqslant \varepsilon$.

Usando ahora (16) y (17), obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda^*\big(F(A \cap K^\circ)\big) &\leqslant \lambda^*\big(F(G \cap K^\circ)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*\big(F([a_k, b_k[)\big) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*\big(F([a_k, b_k])\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big|F(d_k) - F(c_k)\big| \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, hemos probado que $\lambda\big(F(A \cap K^\circ)\big) = 0$. Finalmente, como $F(A)$ difiere de $F\big(A \cap K^\circ\big)$ en dos puntos a lo sumo, concluimos que también $\lambda\big(F(A)\big) = 0$. ■

El próximo resultado es un caso particular del resultado que buscamos, del que luego se deducirá el caso general.

- *Sea $F : K \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua, tal que $F'(x) = 0$ p.c.t. $x \in K$. Entonces F es constante.*

Sea $B \subset K^\circ$, con $\lambda(K \setminus B) = 0$, tal que F sea derivable en B, con $F'(x) = 0$ para todo $x \in B$. Fijado un $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $B_n \subset B$ definido de la siguiente forma

$$B_n = \big\{x \in B \,:\, |F(y) - F(x)| \leqslant \varepsilon|y - x| \quad \forall y \in]x - (1/n), x + (1/n)[\cap K\big\}$$

Es claro que $B_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, dado $x \in B$, como $\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $y \in K$ con $|y - x| < \delta$ se tiene que $|F(y) - F(x)| \leqslant \varepsilon|y - x|$. Tomando entonces $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \delta$, vemos que $x \in B_n$. Por tanto, tenemos $\{B_n\} \nearrow B$.

Subdividimos el intervalo K° en la forma $K^\circ = \biguplus_{k=1}^{m} I_k$ donde $m \in \mathbb{N}$ y, para cada $k \in \Delta_m$, el intervalo I_k verifica que $\lambda(I_k) < 1/n$. Fijado $k \in \Delta_m$, para cualesquiera $x, y \in B_n \cap I_k$ se tiene que $|x - y| \leqslant \lambda(I_k) < 1/n$, y la definición de B_n nos da $\big|F(x) - F(y)\big| \leqslant \varepsilon\big|x - y\big| \leqslant \varepsilon\lambda(I_k)$. Esto implica que el conjunto $F(B_n \cap I_k)$ está contenido en un intervalo de longitud $\varepsilon\lambda(I_k)$, de donde deducimos que $\lambda^*\big(F(B_n \cap I_k)\big) \leqslant \varepsilon\lambda(I_k)$. Como esto es cierto para todo $k \in \Delta_m$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda^*\big(F(B_n)\big) &= \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{m} F(B_n \cap I_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda^*\big(F(B_n \cap I_k)\big) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \varepsilon\,(b - a)\end{aligned}$$

Como $\{B_n\} \nearrow B$, tenemos que $\{F(B_n)\} \nearrow F(B)$, y usando la continuidad creciente de la medida exterior de Lebesgue, obtenemos que $\lambda^*\big(F(B)\big) \leqslant \varepsilon(b-a)$. Si ahora tenemos en cuenta la arbitrariedad de ε, hemos probado que $\lambda\big(F(B)\big) = 0$.

Por otra parte, como $\lambda(K \setminus B) = 0$, usando que F preserva los conjuntos de medida nula, obtenemos que $\lambda\big(F(K \setminus B)\big) = 0$.

Finalmente, como $F(K) = F(B) \cup F(K \setminus B)$, vemos que $\lambda\big(F(K)\big) = 0$, pero por ser F continua, sabemos que $F(K)$ es un intervalo compacto, así que $F(K)$ se reduce a un punto, es decir, F es constante. ■

Estamos por fin en condiciones de probar el principal resultado. Su demostración es ya sencilla, pero utiliza la práctica totalidad de los resultados estudiados en este tema y el anterior.

Teorema Fundamental del Cálculo. *Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función, verificando que $F\big|_K$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $K \subset J$. Entonces F es derivable c.p.d. en J y su derivada es localmente integrable en J con*

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad \forall a,b \in J \tag{18}$$

Demostración. Gracias a que F tiene variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$, el teorema de derivación de Lebesgue nos permitió probar que F es derivable c.p.d. en J, y el teorema de integración de derivadas nos asegura que F' es localmente integrable en J. Queda probar la igualdad (18), para lo cual fijamos $a,b \in J$. Dicha igualdad es obvia cuando $a = b$, y sus dos miembros cambian de signo al intercambiar a con b, luego basta considerar el caso en que $a < b$. Considerando el intervalo compacto $K = [a,b]$, fijemos un conjunto $A \subset K$, con $\lambda(K \setminus A) = 0$, tal que F sea derivable en A.

Como F' es integrable en el intervalo compacto $K = [a,b]$, consideramos su integral indefinida con origen en a, es decir

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt \qquad \forall x \in K$$

Por una parte sabemos que G es absolutamente continua, y por otra, el teorema de derivación de integrales nos da un conjunto $B \subset A$, con $\lambda(K \setminus B) = 0$, tal que G es derivable en B y se verifica que $G'(x) = F'(x)$ para todo $x \in B$.

Puesto que G y $F\big|_K$ son funciones absolutamente continuas, se comprueba sin ninguna dificultad que la diferencia $\Phi = G - F\big|_K$ también lo es. Por otra parte, tenemos que $\Phi'(x) = 0$ todo $x \in B$, así que $\Phi'(x) = 0$ p.c.t. $x \in K$. El resultado recién probado nos dice que Φ es constante, luego $\Phi(b) = \Phi(a)$. Deducimos claramente que

$$\int_a^b F'(t)\,dt = G(b) = F(b) + \Phi(b) = F(b) + \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

donde hemos usado que $\Phi(a) = -F(a)$, ya que $G(a) = 0$. Esto prueba la igualdad (18), concluyendo la demostración. ■

Como hicimos con la versión elemental, el resultado anterior puede expresarse de forma que muestre la integración como operación inversa de la derivación, pero ahora en un contexto más general. Para ello, fijamos un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$ y un punto $a \in J$.

Como espacio de partida, en el que definir un operador de derivación, consideramos el conjunto $AC_a(J)$ formado por todas las funciones de J en $\mathbb{R}$, que son absolutamente continuas en cada intervalo compacto $K \subset J$, y se anulan en el punto a. Claramente, $AC_a(J)$ es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de J en $\mathbb{R}$. El teorema anterior nos asegura que cada función $F \in AC_a(J)$ es derivable c.p.d. en J con $F' \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$.

Por razones que se comprenderán enseguida, como espacio de llegada de nuestro operador de derivación, no conviene usar $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ sino un cociente suyo, análogo al empleado para definir los espacios de Lebesgue. Concretamente, es claro que el conjunto $\mathcal{N}(J)$, formado por las funciones de J en $\mathbb{R}$ que se anulan c.p.d. en J, es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$. Ello permite considerar el espacio vectorial cociente

$$L_1^{\text{loc}}(J) = \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J) \,/\, \mathcal{N}(J)$$

con lo que cada función $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ da lugar a la clase de equivalencia $\widetilde{f} \in L_1^{\text{loc}}(J)$ formada por todas las funciones de J en $\mathbb{R}$ que coinciden con f c.p.d. en J. Para $F \in AC_a(J)$, podemos pues considerar la clase de equivalencia $\widetilde{F'}$ y, como F' sólo está definida c.p.d. en J, observamos que $\widetilde{F'}$ contiene a todas las funciones de J en $\mathbb{R}$ que extienden a F'. Podemos ya definir nuestro operador de derivación, que vendrá dado por

$$\mathcal{D} : AC_a(J) \to L_1^{\text{loc}}(J)\,, \qquad \mathcal{D}(F) = \widetilde{F'} \quad \forall F \in AC_a(J)$$

Veamos el operador de integración, que acabará siendo el inverso de $\mathcal{D}$. Para $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, si $F : J \to \mathbb{R}$ es la integral indefinida de f con origen en a, sabemos que F es absolutamente continua en cada intervalo compacto $K \subset J$, con $F(a) = 0$, es decir, $F \in AC_a(J)$. Pero al sustituir f por otra función que coincida con ella c.p.d. en J, la función F no se altera, luego podemos asociar a cada clase de equivalencia $\widetilde{f} \in L_1^{\text{loc}}(J)$ la integral indefinida de f con origen en a, obteniendo así una aplicación bien definida de $L_1^{\text{loc}}(J)$ en $AC_a(J)$, que es el operador de integración que buscamos:

$$\mathcal{I} : L_1^{\text{loc}}(J) \to AC_a(J)\,, \qquad \mathcal{I}\big(\,\widetilde{f}\,\big)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in J\,,\ \forall f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$$

Sólo queda comprobar que el operador lineal $\mathcal{I}$ es el inverso de $\mathcal{D}$. Dada $F \in AC_a(J)$, vemos en (18) que, para todo $b \in J$ se tiene

$$F(b) = \int_a^b F'(t)\,dt = \mathcal{I}\big(\widetilde{F'}\big)(b) = \mathcal{I}\big(\mathcal{D}(F)\big)(b)$$

luego $\mathcal{I} \circ \mathcal{D}$ es la identidad en $AC_a(J)$.

Por otra parte, si $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ y tomamos $F = \mathcal{I}\big(\,\widetilde{f}\,\big)$, el teorema de derivación de integrales nos dice que $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in J$, luego $\mathcal{D}(F) = \widetilde{F'} = \widetilde{f}$, y esto prueba que $\mathcal{D} \circ \mathcal{I}$ es la identidad en $L_1^{\text{loc}}(J)$. Se comprende ahora la razón para usar el cociente $L_1^{\text{loc}}(J)$ en vez del espacio $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$: las funciones F' y f coinciden c.p.d., pero pueden no ser idénticas.

En resumen, hemos visto que $\mathcal{I} = \mathcal{D}^{-1}$, o bien $\mathcal{D} = \mathcal{I}^{-1}$, como se quería.