

### Práctica 3. Imagen de una función de dos variables

#### Ejercicios resueltos

1. Calcular la imagen de la función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 2y - y^2\} \quad \text{y} \quad f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4) \quad \forall (x, y) \in A$$

#### Solución

(a). Para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se tiene claramente

$$x^2 \leq 2y - y^2 \iff x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \iff x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

luego  $A$  es la bola cerrada de centro  $(0, 1)$  y radio 1 para la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$ . En particular  $A$  es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto, y es también un conjunto convexo, luego conexo. Como  $f$  es continua, por ser una función polinómica, deducimos que  $f(A)$  es un subconjunto compacto y conexo de  $\mathbb{R}$ , es decir, un intervalo cerrado y acotado.

(b). Es obvio que  $f$  es parcialmente derivable en  $A^\circ$ , de nuevo por ser una función polinómica. Veamos los puntos críticos de  $f$ . Para  $(x, y) \in A^\circ$ , se tiene  $\nabla f(x, y) = 0$  si y sólo si,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4$$

Vemos que  $(0, 1)$  es el único punto crítico, con  $f(0, 1) = -3$ .

(c). Estudiemos ahora  $f$  en la frontera de  $A$ , que es la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio 1, un arco paramétrico, pero no necesitaremos ninguna parametrización. Para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se tiene claramente

$$(x, y) \in \text{Fr } A \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1 \iff y \in [0, 2], \quad x^2 = 2y - y^2$$

Por tanto, para  $(x, y) \in \text{Fr } A$  obtenemos

$$f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y = y^4 - y^2 - 2y$$

de donde se deduce que el conjunto  $f(\text{Fr } A)$  coincide con la imagen de la función  $h : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(y) = y^4 - y^2 - 2y \quad \forall y \in [0, 2]$$

Esta función es derivable en  $[0, 2]$  con

$$h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(y - 1)(2y^2 + 2y + 1) \quad \forall y \in [0, 2]$$

Como, para  $y \in [0, 2]$  se tiene  $2y^2 + 2y + 1 \geq 1 > 0$ , vemos que  $h'(y) = 0$  solamente para  $y = 1$ . Los posibles extremos absolutos de  $h$  son, por tanto, 0, 1 y 2. Puesto que  $h(0) = 0$ ,  $h(1) = -2$  y  $h(2) = 8$ , la imagen de  $h$  es el intervalo  $[-2, 8]$ . Así pues, el máximo valor de  $f$  en  $\text{Fr } A$  es 8, que se alcanza en el punto  $(0, 2)$ . El mínimo valor es  $-2$  que se alcanza en los puntos  $(1, 1)$  y  $(-1, 1)$ .

Finalmente, puesto que  $f(0, 1) = -3$ , concluimos que  $\max f(A) = \max\{-3, 8\} = 8$  y  $\min f(A) = \min\{-3, -2\} = -3$  luego  $f(A) = [-3, 8]$ . ■

2. Se considera el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$  y la función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (x-2)^2 + 2y^2$  para todo  $(x, y) \in A$ . Calcular la imagen de  $f$ .

**Solución.**

(a). Es claro que  $A = B \cap H$  donde  $B$  es la bola cerrada de centro  $(1, 0)$  y radio 2, y  $H = \{(x, y) : x \geq 0\}$  el semiplano de la derecha cerrado. Entonces  $A$  es cerrado por ser intersección de cerrados, y acotado, por estar contenido en una bola, luego  $A$  es compacto. Por otra parte, es claro que  $B$  y  $H$  son conjuntos convexos, luego  $A$  también es convexo y, en particular,  $A$  es conexo. Puesto que  $f$  es continua, por ser una función polinómica, deducimos que  $f(A)$  es un intervalo cerrado y acotado.

(b) Tenemos claramente

$$A^\circ = B^\circ \cap H^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 4, x > 0\}$$

y  $f$  es diferenciable en  $A^\circ$ , de nuevo por ser una función polinómica. Para  $(x, y) \in A^\circ$ , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff 2(x-2) = 4y = 0 \iff (x, y) = (2, 0)$$

Como  $f(2, 0) = 0$  y  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in A$ , está claro que  $(2, 0)$  es un mínimo absoluto de  $f$ , es decir,  $\min f(A) = 0$ . A partir de ahora sólo buscamos máximos absolutos de  $f$ .

(c). Tenemos claramente  $\text{Fr } A = A \setminus A^\circ = C_1 \cup C_2$  donde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, x = 0\} = \{(0, y) : y^2 \leq 3\} \quad \text{y}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$$

Para  $(0, y) \in C_1$  tenemos claramente  $f(0, y) = 4 + 2y^2$  con  $y^2 \leq 3$ , luego

$$\max f(C_1) = 10 = f(0, \pm\sqrt{3})$$

Para  $(x, y) \in C_2$  tenemos  $y^2 = 4 - (x-1)^2$  luego

$$f(x, y) = (x-2)^2 + 2(4 - (x-1)^2) = 10 - x^2$$

y el máximo de  $f$  en  $C_2$  se obtiene igualmente tomando  $x = 0$  e  $y = \pm\sqrt{3}$ :

$$\max f(C_2) = 10 = f(0, \pm\sqrt{3})$$

Concluimos que  $\max f(A) = \max f(\text{Fr } A) = 10$ , luego  $f(A) = [0, 10]$ . ■