Práctica 4. Funciones implícitas

Ejercicios propuestos

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z\,x^3 + w^2\,y^3 &= 1 \\ 2\,z\,w^3 + x\,y^2 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones implícitas $z = z(x,y)$ y $w = w(x,y)$, diferenciables en un entorno de $(0,1)$, verificando que $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$. Probar también que la función $(x,y) \mapsto \big(z(x,y)\,,\, w(x,y)\big)$ es inyectiva en un entorno de $(0,1)$.

2. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} t\cos x + x\cos y + y\cos t &= \pi \\ t^2 + x^2 + y^2 - t\,x &= \pi^2 \end{aligned}$$

define funciones implícitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, derivables en un entorno del origen, con $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$. Calcular $x'(0)$ e $y'(0)$.

3. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3\,u - y\,u^3 + x\,v^3 - y^3\,v &= 0 \\ \big(x^2 + y^2\big)\big(u^4 + v^4\big) + 2\,u\,v &= 0 \end{aligned}$$

define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,0)$, con $u(1,0) = 1$ y $v(1,0) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$.