

Continuidad uniforme

Completando el análisis de los principales teoremas que conocemos sobre continuidad de funciones reales de variable real, estudiamos ahora la versión general para espacios métricos del *teorema de Heine*. Para ello empezamos lógicamente por definir la continuidad uniforme para una función entre dos espacios métricos cualesquiera. A diferencia de la continuidad, no se trata de una propiedad topológica, pero una vez más, para una función entre dos espacios normados, la continuidad uniforme se conserva al sustituir las normas de ambos espacios por sendas normas equivalentes. Al igual que en $\mathbb{R}$, entre las funciones uniformemente continuas destacamos la funciones *lipschitzianas*. Probamos entonces una importante propiedad de los espacios métricos completos: el *teorema del punto fijo de Banach*.

11.1. Funciones uniformemente continuas

La definición de continuidad uniforme no precisa ninguna motivación, basta observar que la definición que conocemos para funciones reales de variable real viene expresada en términos de la distancia usual de $\mathbb{R}$. En lo que sigue fijamos dos espacios métricos E y F , cuyas distancias se denotan ambas por d , y una función $f: E \rightarrow F$.

La continuidad de f se expresa en la forma

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : y \in E, \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

donde sabemos que δ puede depender tanto de ε como del punto $x \in E$ considerado. Pues bien, tendremos continuidad uniforme cuando podamos conseguir que δ sólo dependa de ε .

Por tanto, decimos que f es **uniformemente continua** cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in E, \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Está claro que así generalizamos la definición de continuidad uniforme que conocemos para funciones reales de variable real.

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua, pero sabemos que el recíproco es falso en el caso $E = F = \mathbb{R}$, luego mucho menos puede ser cierto en general. Caracterizamos fácilmente la continuidad uniforme en términos de sucesiones:

- Si f es uniformemente continua y $\{x_n\}, \{y_n\}$ son sucesiones de puntos de E tales que $\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow 0$, entonces $\{d(f(x_n), f(y_n))\} \rightarrow 0$. El recíproco también es cierto, más concretamente: si f no es uniformemente continua, existen dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de puntos de E y existe un $\varepsilon > 0$ tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ también para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad uniforme de f . Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ se tiene $d(x_n, y_n) < \delta$ y, por tanto, $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$.

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ se pueden encontrar puntos $x, y \in E$, que dependerán de δ , tales que $d(x, y) < \delta$ pero $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos entonces tomar $\delta = 1/n$ para encontrar $x_n, y_n \in E$ verificando que $d(x_n, y_n) < 1/n$ y $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. En particular $\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow 0$ pero la sucesión $\{d(f(x_n), f(y_n))\}$ no converge a cero. ■

Podemos ya probar fácilmente el principal resultado acerca de la continuidad uniforme de una función entre espacios métricos.

11.2. Teorema de Heine

La versión que conocemos de este teorema afirma que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, con valores reales, es uniformemente continua. En realidad, la demostración no utiliza que el conjunto de definición sea un intervalo, sino solamente que es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es decir, compacto. Por tanto, el siguiente resultado mejora y generaliza la versión conocida, pero con idéntica demostración, como vamos a ver.

Teorema de Heine. Sean E y F espacios métricos y $f : E \rightarrow F$ una función continua. Si E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Por reducción al absurdo, suponemos que f no es uniformemente continua. Existen entonces dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de puntos de E , y un $\varepsilon > 0$, tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$d(x_n, y_n) < 1/n \quad \text{y} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Por ser E compacto, tenemos una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$. Puesto que $\{d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \rightarrow 0$, deducimos que también $\{y_{\sigma(n)}\} \rightarrow x$. Como f es continua, tenemos $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$ y $\{f(y_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$, luego $\{d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)}))\} \rightarrow 0$, lo cual es una contradicción, ya que $d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Recordemos que el teorema anterior pone de manifiesto que la continuidad uniforme no es una propiedad local: si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un entorno U de x tal que $f|_U$ es uniformemente continua, pero sabemos que esto no implica que f sea uniformemente continua.

11.3. Extensión de funciones uniformemente continuas

El teorema de Heine es un resultado clave para definir la integral de una función continua en un intervalo compacto. Sin embargo, cuando la teoría de la integración se desarrolla en contextos mucho más generales y con el método adecuado, la continuidad uniforme deja de ser relevante. Conviene por tanto profundizar un poco más en el estudio de la continuidad uniforme, para descubrir su verdadera utilidad. Empezamos con una sencilla observación:

- Sean E y F espacios métricos y $f : E \rightarrow F$ una función uniformemente continua. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de E , entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en F .

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad uniforme de f . Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $p, q \geq m$ se tiene $d(x_p, x_q) < \delta$, de donde $d(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$. ■

La observación anterior carece de interés cuando el espacio métrico E es completo, pues entonces la sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ es convergente, y la continuidad de f es suficiente para asegurar que $\{f(x_n)\}$ es convergente. Cuando E no es completo, puede servir para demostrar fácilmente que una función no es uniformemente continua. Por ejemplo, la función logaritmo $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ no es uniformemente continua, pues $\{1/n\}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de $\mathbb{R}^+$ pero $\{\log(1/n)\} = \{-\log n\}$ no es de Cauchy. De hecho, el resultado anterior nos permite poner de manifiesto la principal utilidad de la continuidad uniforme:

- Sean E y F espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $g : A \rightarrow F$ una función. Supongamos que F es completo y que g es uniformemente continua. Entonces existe una única función continua $f : \overline{A} \rightarrow F$ que extiende a g , es decir, que verifica $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. De hecho, f es uniformemente continua.

Para $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A tal que $\{a_n\} \rightarrow x$, luego por ser g uniformemente continua, $\{g(a_n)\}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de F , pero por hipótesis F es completo, luego $\{g(a_n)\}$ es convergente. Su límite sólo depende de x y no de la sucesión $\{a_n\}$ que hemos usado para encontrarlo. En efecto, si $\{b_n\}$ es otra sucesión de puntos de A con $\{b_n\} \rightarrow x$, tenemos claramente que $\{d(a_n, b_n)\} \rightarrow 0$ y, por ser g uniformemente continua, deducimos que $\{d(g(a_n), g(b_n))\} \rightarrow 0$, lo que claramente implica que $\{g(a_n)\}$ y $\{g(b_n)\}$ han de converger al mismo límite.

Por tanto, si para $x \in \overline{A}$, escribimos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$, donde $\{a_n\}$ es cualquier sucesión de puntos de A tal que $\{a_n\} \rightarrow x$, tenemos una función bien definida $f : \overline{A} \rightarrow F$. Es claro que f extiende a g , pues para $a \in A$ podemos tomar $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que obviamente $\{g(a_n)\} \rightarrow g(a)$, luego $f(a) = g(a)$.

Probamos ahora que f es uniformemente continua. Fijado $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme de g nos da un $\delta > 0$ tal que

$$a, b \in A, \quad d(a, b) < \delta \implies d(g(a), g(b)) < \varepsilon/2$$

Para $x, y \in \overline{A}$ con $d(x, y) < \delta/3$, probaremos que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de puntos de A tales que $\{a_n\} \rightarrow x$ y $\{b_n\} \rightarrow y$. Existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$ se tiene $d(a_n, x) < \delta/3$ y $d(b_n, y) < \delta/3$. Entonces, también para $n \geq m$ deducimos que

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, x) + d(x, y) + d(y, b_n) < \delta, \quad \text{luego} \quad d(g(a_n), g(b_n)) < \varepsilon/2$$

Como $\{g(a_n)\} \rightarrow f(x)$ y $\{g(b_n)\} \rightarrow f(y)$, es claro que $\{d(g(a_n), g(b_n))\} \rightarrow d(f(x), f(y))$, y concluimos que $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, como queríamos.

Comprobamos finalmente la unicidad. Sea $\varphi: \overline{A} \rightarrow F$ otra función continua que extienda a g . Fijado $x \in \overline{A}$ tomamos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A tal que $\{a_n\} \rightarrow x$ y, por ser φ una extensión continua de g , tenemos que $\{g(a_n)\} = \{\varphi(a_n)\} \rightarrow \varphi(x)$, pero por definición tenemos también $\{g(a_n)\} \rightarrow f(x)$, luego $\varphi(x) = f(x)$. ■

El resultado anterior, combinado con el teorema de Heine, da respuesta satisfactoria a una pregunta muy natural. Supongamos para concretar que A es un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}^N$, por ejemplo una bola abierta para la norma euclídea, y que $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Es natural preguntarse si podemos extender g para obtener una función f que sea continua en $\overline{A}$, que en nuestro ejemplo sería la correspondiente bola cerrada. Como $\mathbb{R}$ es completo, el teorema anterior nos dice que podemos hacerlo siempre que g sea uniformemente continua. Pero esta condición suficiente también es necesaria: como $\overline{A}$ es cerrado y acotado, luego compacto, si existe la extensión continua f que buscamos, el teorema de Heine nos dice que f es uniformemente continua, luego g también ha de serlo, por ser una restricción de f .

Observemos ahora que la continuidad uniforme no es una propiedad topológica. Usamos para ello una distancia ρ en $\mathbb{R}$, equivalente a la usual, que ya conocemos:

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Tomemos $E = F = \mathbb{R}$ como conjuntos que vamos a convertir en espacios métricos de diferentes formas. Si tanto en E como en F consideramos la distancia usual de $\mathbb{R}$, o en ambos la distancia ρ , es obvio que la función identidad $f: E \rightarrow F$ es uniformemente continua, pues en ambos casos la distancia de $f(x)$ a $f(y)$ coincide con la distancia de x a y para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si en E consideramos la distancia usual y en F usamos ρ , la continuidad uniforme de f significaría que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |e^x - e^y| < \varepsilon$$

Esto es tanto como decir que la función exponencial es uniformemente continua cuando tanto en E como en F consideramos la distancia usual de $\mathbb{R}$, cosa que sabemos que es falsa. Tenemos pues ejemplos en los que una función uniformemente continua deja de serlo cuando sustituimos la distancia del espacio partida, o del de llegada, por otra equivalente.

Sin embargo, si X e Y son espacios normados, cuyas normas podemos denotar por $\|\cdot\|_1$, la continuidad uniforme de una función $f: X \rightarrow Y$ se mantiene cuando sustituimos dichas normas por otras equivalentes, que podemos denotar por $\|\cdot\|_2$. Basta pensar que existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que, para cualesquiera $u, v \in X$ se tiene

$$\lambda \|u - v\|_1 \leq \|u - v\|_2 \quad \text{y} \quad \|f(u) - f(v)\|_2 \leq \rho \|f(u) - f(v)\|_1$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(u) - f(v)\|_1 < \varepsilon/\rho$ cuando $\|u - v\|_1 < \delta$, y deducimos que $\|f(u) - f(v)\|_2 < \varepsilon$ cuando $\|u - v\|_2 < \delta\lambda$.

11.4. Funciones lipschitzianas

Si E y F son espacios métricos, una función $f : E \rightarrow F$ es **lipschitziana** cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad (1)$$

Es evidente que toda función lipschitziana es uniformemente continua, y sabemos que el recíproco es falso, incluso en el caso $E = F = \mathbb{R}$.

La mínima constante M_0 que verifica (1) es la **constante de Lipschitz** de f , que viene dada por

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}$$

Cuando $M_0 \leq 1$ se dice que f es **no expansiva**. Cuando se tiene de hecho $M_0 < 1$ decimos que f es **contractiva**.

Por ejemplo, la norma de cualquier espacio normado X es una función no expansiva de X en $\mathbb{R}$, puesto que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

pero, salvo en el caso trivial $X = \{0\}$, no es contractiva, ya que la anterior desigualdad es una igualdad cuando tomamos por ejemplo $y = x/2$ con $x \neq 0$.

Análogamente, en cualquier espacio métrico E , fijado $z \in E$, la aplicación $x \mapsto d(x, z)$ es no expansiva, puesto que

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$$

Como función de dos variables, definida en el espacio métrico producto $E \times E$, la distancia es una función lipschitziana, pues para cualesquiera $x, y, u, v \in E$ se tiene

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(u, v)| &\leq |d(x, y) - d(y, u)| + |d(y, u) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v) \\ &\leq 2 \max\{d(x, u), d(y, v)\} = 2 d_\infty((x, y), (u, v)) \end{aligned}$$

Por tanto, d es uniformemente continua, y en particular es continua, cosa que ya sabíamos y de hecho hemos usado varias veces.

El hecho de que una función sea lipschitziana, y no digamos su constante de Lipschitz, es muy inestable cuando cambiamos de distancias. En el ejemplo usado para mostrar que la continuidad uniforme no es una propiedad topológica, teníamos una aplicación no expansiva que dejaba de ser uniformemente continua al sustituir la distancia del espacio métrico de partida o de llegada por otra equivalente. En el caso de dos espacios normados, el mismo razonamiento usado para la continuidad uniforme prueba que una función lipschitziana lo sigue siendo al cambiar las normas por otras equivalentes, pero su constante de Lipschitz puede claramente cambiar.

11.5. Teorema del punto fijo de Banach

El siguiente resultado muestra una propiedad importante de las aplicaciones contractivas y, de hecho, pone muy de manifiesto la utilidad de la completitud de un espacio métrico.

Teorema. *Sea E un espacio métrico completo y $f : E \rightarrow E$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único punto $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Tomamos $x_0 \in E$ arbitrario y definimos por inducción una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E , como sigue:

$$x_1 = f(x_0) \quad \text{y} \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\alpha < 1$ es la constante de Lipschitz de f y $\rho = d(x_0, x_1)$ comprobamos por inducción que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

En efecto, tenemos $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) = \alpha \rho$ y, suponiendo que (2) se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \alpha^n \rho = \alpha^{n+1} \rho$$

Ahora, para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{n+j-1} \leq \rho \alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{j-1} = \frac{\rho \alpha^n}{1 - \alpha}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\{\alpha^n\} \rightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho \alpha^m < \varepsilon(1 - \alpha)$. Entonces, para $p, q \geq m$, suponiendo sin perder generalidad que $p < q$, tomamos $n = p$ y $k = q - p$ para obtener

$$d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\rho \alpha^n}{1 - \alpha} \leq \frac{\rho \alpha^m}{1 - \alpha} < \varepsilon$$

Hemos probado así que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Como por hipótesis E es completo, tenemos $\{x_n\} \rightarrow x \in E$. Entonces vemos también que $\{f(x_n)\} = \{x_{n+1}\} \rightarrow x$, pero f es continua, luego $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ y concluimos que $f(x) = x$.

Finalmente si $y \in E \setminus \{x\}$ fuese otro punto fijo de f , se tendría

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

de donde $1 \leq \alpha$, lo cual es una contradicción. Por tanto, x es el único punto fijo de f . ■