

Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales

Partimos de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = \overline{X}(t, x)$$

para la que el campo $\overline{X}$ tiene buenas propiedades de diferenciabilidad. Conocemos de manera explícita una solución $\varphi(t)$, ¿qué podemos decir de las soluciones cercanas a $\varphi(t)$? Esta situación se presenta muy a menudo. Por ejemplo, para la ecuación del péndulo

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

tenemos la solución de equilibrio $\varphi(t) = (\theta(t), \omega(t))$, $\theta \equiv 0, \omega \equiv 0$ y nos gustaría decir algo sobre las pequeñas oscilaciones.

Fijamos un instante $t_0 \in]\alpha, \omega[$, intervalo maximal de $\varphi(t)$. Dado $\xi \in \mathbb{R}^d$ cercano a $\varphi(t_0)$ denotamos por $x(t, \xi)$ a la solución del problema de Cauchy

$$\dot{x} = \overline{X}(t, x), \quad x(t_0) = \xi.$$

Sabemos que $(t, \xi) \mapsto x(t, \xi)$ es continua en un entorno de $(t_0, \varphi(t_0))$ pero imaginemos que además es diferenciable. Entonces podemos hacer un desarrollo de Taylor en ξ (o bien aplicar la noción de diferenciabilidad) para llegar a la fórmula

$$x(t, \xi) = \varphi(t) + \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \varphi(t_0)) (\xi - \varphi(t_0)) + o(\|\xi - \varphi(t_0)\|) \quad \text{si } \xi \rightarrow \varphi(t_0)$$

válida si $t \in [a, b] \subset]\alpha, \omega[$.

Hemos encontrado una fórmula aproximada para las soluciones cercanas a $\gamma(t)$ pero ¿podemos derivar respecto a las condiciones iniciales? ¿cómo se calcula $\frac{\partial x}{\partial \xi}$?

Antes de hacer cosas rigurosas hagamos un cálculo formal. Si pensamos en la solución $x = x(t, \xi)$ como función de dos variables, $\dot{x}(t, \xi) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \xi)$, reescribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \xi) = X(t, x(t, \xi))$$

y derivamos con respecto a ξ haciendo uso de la regla de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t}(t, \xi) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t, \xi)) \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \right)$$

Si llamamos $Y(t)$ a la derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$ con ξ fijo observamos que cumple

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t, \xi)) Y.$$

Ecuación lineal llamada ecuación variacional en $x(t, \xi)$.

Diferenciabilidad de la solución respecto a condiciones iniciales

Vamos a probar que cuando el campo es regular entonces también lo es la solución general.

Teorema Se supone que $X: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es continuo, existe $\frac{\partial X}{\partial x}$ y la aplicación $(t, x) \in D \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es continua. Entonces la solución general $x: D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t; t_0, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0)$ es diferenciable y sus derivadas son

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t; t_0, x_0) = \dot{x}(t; t_0, x_0) = X(t; x(t; t_0, x_0))$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = y(t) \text{ donde } y(t) \text{ es la única solución de}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t; x(t; t_0, x_0))y, \quad y(t_0) = -X(t_0, x_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) = Y(t) \text{ donde } Y(t) \text{ es la única solución de}$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t; x(t; t_0, x_0))Y, \quad Y(t_0) = I_d.$$

Observaciones 1. Las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial t}$ y $\frac{\partial x}{\partial t_0}$ son

vectores en $\mathbb{R}^d$ mientras que $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ es una matriz en $\mathbb{R}^{d \times d}$. Las funciones $y(t)$ e $Y(t)$ son soluciones de la misma ecuación lineal pero $y(t)$ es una solución vectorial e $Y(t)$ es una solución matricial (la matriz fundamental principal en t_0)

2. Para entender cómo aparecen esas fórmulas vamos a derivar en la ecuación diferencial de un modo formal,

dando por supuesto que las derivadas cruzadas conmutan,

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t; t_0, x_0) = X(t, x(t; t_0, x_0))$$

Derivando respecto a t_0 ,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) \right)}_{y(t)} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)}_{y(t)}$$

Para encontrar la condición inicial derivamos la identidad

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial t}(t_0; t_0, x_0) + \frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0; t_0, x_0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0; t_0, x_0) = - \frac{\partial x}{\partial t}(t_0; t_0, x_0) = -X(t_0, x_0)$$

$$\underbrace{\phantom{\frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0; t_0, x_0)}}_{y(t_0)}$$

Derivando la ecuación respecto a x_0 ,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) \right)}_{Y(t)} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)}_{Y(t)}$$

y derivando la condición inicial respecto a x_0 ,

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0; t_0, x_0) = I_d$$

3. La ecuación lineal

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)) y$$

se suele llamar ecuación variacional alrededor de la solución $x(t; t_0, x_0)$. Para encontrarla hace falta conocer la solución

$x(t; t_0, x_0)$ de forma explícita. Vamos a hacer el cálculo en un caso concreto.

Ecuación variacional del péndulo alrededor del equilibrio

Consideramos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

y llamamos $\theta(t; \theta_0, \omega_0)$ a la solución. Para $\theta_0 = 0, \omega_0 = 0$ sabemos que $\theta(t; 0, 0) = 0$ y vamos a calcular $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}(t; 0, 0)$,

$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_0}(t; 0, 0)$. En primer lugar observamos que el teorema

es aplicable haciendo $t_0 = 0$ y pasando a un sistema de primer orden $(x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta})$

$$x = (x_1, x_2), \quad X(t, x) = (x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1)$$

Calculamos

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

que, evaluada en $x_1(t; 0, 0) = 0, x_2(t; 0, 0) = 0$, nos da el sistema

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; 0, 0)) Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} Y$$

Observamos que se trata de la ecuación del muelle en el espacio de fases

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} y_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{g}{l} y_1 = 0.$$

Si imponemos la condición inicial $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$,

llegamos a

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t & \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \\ -\sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t & \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \end{pmatrix}$$

y concluimos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}(t; 0, 0) = \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \omega_0}(t; 0, 0) = \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Si desarrollamos por Taylor, en $(\theta_0, \omega_0) = (0, 0)$, la función

$\theta(t; \theta_0, \omega_0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \theta(t; \theta_0, \omega_0) &= \theta(t; 0, 0) + \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}(t; \cancel{0, 0}) \theta_0 + \frac{\partial \theta}{\partial \omega_0}(t; \cancel{0, 0}) \omega_0 \\ &\quad + R(t; \theta_0, \omega_0) \end{aligned}$$

$$\text{donde } \lim_{(\theta_0, \omega_0) \rightarrow (0, 0)} \frac{R(t; \theta_0, \omega_0)}{|\theta_0| + |\omega_0|} = 0.$$

Llegamos a la aproximación

$$\theta(t; \theta_0, \omega_0) = \underbrace{\theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \omega_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t}_{\text{m. a. s.}} + R(t; \theta_0, \omega_0)$$

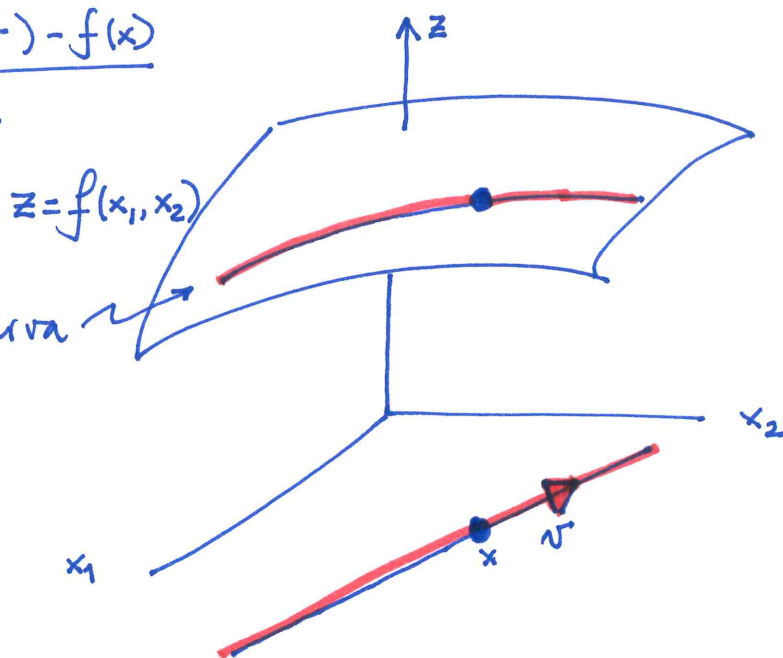
Prepararemos la demostración del teorema con dos observaciones preliminares.

① Una condición suficiente para la diferenciabilidad

Dada una función $f: U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $U = \overset{\circ}{U}$, y dados un punto $x \in U$ y un vector $v \in \mathbb{R}^p$, definimos la derivada direccional

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

$D_v f(x)$ pendiente de la curva



Supongamos que,
para cada $v \in \mathbb{R}^p$,

la aplicación $x \in U \mapsto D_v f(x) \in \mathbb{R}^q$ es continua.

Entonces f es diferenciable en U y la diferencial $f'(x)$ está dada por la fórmula

$$f'(x)v = D_v f(x).$$

② Un sucedáneo del teorema del valor medio para funciones vectoriales

Dada una función $f: U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clase C^1 y dos puntos $x, y \in U$ tales que el segmento $[x, y] \subset U$ se cumple

$$f(x) - f(y) = \left[\int_0^1 f'(\lambda x + (1-\lambda)y) d\lambda \right] (x-y).$$

Observamos que $f'(\lambda x + (1-\lambda)y)$ es una matriz en $\mathbb{R}^{q \times p}$ y la integral se entiende coordenada a coordenada. Los vectores son columna.

La demostración es corta,

$$f(x) - f(y) \stackrel{\text{Regla de Barrow}}{=} \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [f(\lambda x + (1-\lambda)y)] d\lambda \stackrel{\text{Regla de la Cadena}}{=} \int_0^1 f'(\lambda x + (1-\lambda)y)(x-y) d\lambda$$

$$\stackrel{\text{linealidad}}{=} \left[\int_0^1 f'(\lambda x + (1-\lambda)y) d\lambda \right] (x-y)$$

Observamos que las dos primeras integrales son en $\mathbb{R}^d$ y la última en $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Demostración del Teorema de diferenciabilidad

Nos limitaremos a discutir la diferenciabilidad en x_0 ; el caso general es similar.

Fijamos $(t_0, x_0) \in D$ y un intervalo compacto $[a, b]$ de manera que $(t; t_0, x_0) \in D$ si $t \in [a, b]$. Dado $v \in \mathbb{R}^d$ definimos el cociente incremental

$$\Delta_h(t) = \frac{1}{h} [x(t; t_0, x_0 + hv) - x(t; t_0, x_0)], \quad t \in [a, b]$$

que esté bien definido si $h \neq 0$ es pequeño. Probaremos que este incremento es solución de un sistema lineal.

Lema Existe una función $A: [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$,

$A = A(t, h)$, que es continua y cumple

$$\dot{\Delta}_h = A(t, h) \Delta_h \quad \text{si } h \neq 0$$

$$A(t, 0) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)).$$

Demostración del Teorema de diferenciabilidad

Fijamos $(t_*, t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y un intervalo compacto $[a, b]$ de manera que $\alpha(t_0, x_0) < a < t_*$, $t_0 < b < \omega(t_0, x_0)$.

Probaremos que las derivadas direccionales con respecto a x_0 existen y son continuas, la derivada parcial respecto a t_0 es similar.

Dado $v \in \mathbb{R}^d$ definimos el cociente incremental

$$\Delta_h(t) = \frac{1}{h} [x(t; t_0, x_0 + hv) - x(t; t_0, x_0)]$$

y observamos que está bien definido si $t \in [a, b]$ y $h \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Probaremos que este incremento es solución de un sistema lineal homogéneo.

Lema Existe una función $A: [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $(t, h) \mapsto A(t, h)$, que es continua y cumple

$$\dot{\Delta}_h(t) = A(t, h) \Delta_h(t) \quad \text{si } t \in [a, b], h \neq 0$$

$$A(t, 0) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)).$$

Por ahora damos por bueno el lema y continuamos la demostración. Por la definición de Δ_h observamos que se cumple

$$\dot{\Delta}_h = A(t, h) \Delta_h, \quad \Delta_h(t_0) = v.$$

Se trata de un problema de valores iniciales para una ecuación lineal que depende del parámetro h . Como este problema tiene unicidad (es lineal) podemos aplicar el teorema de dependencia continua con respecto a parámetros en el dominio $]a, b[\times \mathbb{R}^d \times \Lambda$ con $\Lambda =]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Entonces $\Delta_h(t)$ converge, si $h \rightarrow 0$, a la solución del problema límite

$$\textcircled{g} \quad \dot{y} = A(t, 0)y, \quad y(t_0) = v.$$

Ya tenemos que existe la derivada direccional

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h(t) \quad \text{si } t \in]a, b[.$$

A nosotros nos interesará en t_* .

Sabemos por el lema que se trata del problema asociado a la ecuación variacional

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0))y, \quad y(t_0) = v.$$

Aplicamos la teoría de sistemas lineales y denotamos por $Y(t)$ a la matriz fundamental principal en t_0 , $Y(t_0) = I_{d \times d}$.

Entonces, $y(t) = Y(t)v$.

Acabamos de probar que existen las derivadas direccionales de la función

$$x_0 \mapsto x(t; t_0, x_0)$$

y sabemos su relación con la ecuación variacional. Ahora vamos a probar que estas ~~derivadas~~ derivadas direccionales son funciones continuas de $(t; t_0, x_0)$. Para nuestro propósito la notación $Y(t)$ es demasiado abreviada, en realidad Y también depende de la condición inicial (t_0, x_0) . Escribiremos

$$Y = Y(t; t_0, x_0)$$

solución de

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0))Y, \quad Y(t_0) = I_{d \times d}$$

De nuevo tenemos una ecuación lineal (ahora matricial) que depende del parámetro $\lambda = (t_0, x_0)$.

Por el teorema de dependencia continua respecto a condiciones iniciales y las hipótesis sobre el campo X , sabemos que

$$(t; t_0, x_0) \in \mathcal{D} \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

es continua. Volveremos a aplicar el teorema de dependencia continua con respecto a parámetros en el dominio $[a, b] \times \mathbb{R}^{d \times d} \times \Lambda$ donde Λ es un pequeño entorno ^{en $\mathcal{D}$} de (t_0, x_0) . Se escogerá el entorno de manera que $x(t; t_1, x_1)$ esté bien definido en $[a, b]$ si $(t_1, x_1) \in \Lambda$.

En este caso tenemos dependencia de parámetros y condiciones iniciales

$$\overset{\substack{\text{incógnita} \\ \nearrow}}{Y} = \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t; \overset{\substack{\text{parámetro} \\ \nwarrow}}{t_0, x_0}))}_{\text{campo vectorial}} Y, \quad Y(\overset{\substack{\text{instante inicial} \\ \uparrow}}{t_0}) = I_{d \times d}$$

pero no es difícil probar una versión del teorema de dependencia continua que combine ambas cosas. Deducimos que

$$(t; t_0, x_0) \in [a, b] \times \Lambda \mapsto Y(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

es continua. En conclusión, la función $x_0 \mapsto x(t; t_0, x_0)$ admite derivadas direccionales en la dirección de $v \in \mathbb{R}^d$ dada por $Y(t; t_0, x_0)v$. Esta derivada direccional es continua como función de $(t; t_0, x_0)$. Sabemos que la solución general tiene derivada parcial ~~continua~~ respecto a t y podemos probar que también tiene respecto a t_0 y ambas son continuas en $(t; t_0, x_0)$. Así, la solución general tiene todas las

derivadas parciales y son continuas, por tanto es diferenciable. En realidad podemos decir más, es de clase C^1 .

Como consecuencia de la demostración obtenemos las fórmulas

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t; t_0, x_0) = X(t, x(t; t_0, x_0)), \quad \frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) = \bar{Y}(t; t_0, x_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = -\bar{Y}(t; t_0, x_0) X(t_0, x_0)$$

Demostración del Lema

$$\dot{\Delta}_h(t) = \frac{1}{h} [\dot{x}(t; t_0, x_0 + h v) - \dot{x}(t; t_0, x_0)]$$

$$= \frac{1}{h} [X(t, x(t; t_0, x_0 + h v)) - X(t, x(t; t_0, x_0))]$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{\partial X}{\partial x}(t, \lambda x(t; t_0, x_0 + h v) + (1-\lambda)x(t; t_0, x_0)) d\lambda \right] \Delta_h(t)$$

sucesáneo del
Teorema de Valor Medio

"
 $A(t, h)$ si $h \neq 0$

Para probar que $h \neq 0 \mapsto A(t, h)$ es continua se usa la teoría de integrales dependientes de parámetros y la dependencia continua respecto a condiciones iniciales. Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} A(t, h)$ se puede usar el teorema de la convergencia dominada y la dependencia continua respecto a condiciones iniciales.

Diferenciabilidad con respecto a parámetros

$$(*) \quad x' = \bar{X}(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0$$

$\bar{X}: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua, G abierto + conexo

$\exists \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}(t, x, \lambda), \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda}(t, x, \lambda)$ y además las funciones

$$(t, x, \lambda) \in G \mapsto \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad (t, x, \lambda) \in G \mapsto \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda}(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^{d \times m}$$

son continuas

Dado $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tal que $(t_0, x_0, \lambda) \in G$, podemos definir la solución de $(*)$, con intervalo maximal $] \alpha(\lambda), \omega(\lambda) [$.

Consideramos el conjunto donde $x(t; \lambda)$ está bien definida

$$G = \{ (t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : (t_0, x_0, \lambda) \in G, \alpha(\lambda) < t < \omega(\lambda) \}$$

y la función

$$x: G \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, \lambda) \mapsto x(t; \lambda)$$

Teorema G es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y $x \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$. Además,

$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ es la solución del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}(t, x(t, \lambda), \lambda) y + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda), \lambda), \quad y(t_0) = 0.$$

Nota La ecuación variacional es ahora una ecuación lineal completa del tipo

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Además, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ es una solución matricial,

$$y = (y_1 | \dots | y_m), \quad y_i = \frac{\partial x}{\partial \lambda_i}(\cdot, \lambda)$$

Un ejemplo $x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

En este caso el único parámetro es ε . Por unicidad sabemos que $x(t; \varepsilon) = 0$, $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$. En este caso no hay que aplicar ningún teorema, sabemos que $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = 0$.

Un ejemplo más complicado $x'' + x + \varepsilon x^3$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

En este caso no es posible encontrar $x(t; \varepsilon)$ de forma explícita si $\varepsilon \neq 0$. Pero para $\varepsilon = 0$,

$$x(t; 0) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es posible probar que $x(t; \varepsilon)$ está siempre definida en $]-\infty, +\infty[$ (En general, $x(t; \varepsilon)$ está definida en $[\alpha(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$ pero $\alpha(\varepsilon) = -\infty, \omega(\varepsilon) = +\infty$ si ε es pequeño)
sin (Ejercicio). Pretendemos calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 0)$.

Pasamos a un sistema de primer orden $y_1 = x$, $y_2 = x'$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad d=2, \quad m=1$$

$$y' = Y(t, y, \varepsilon), \quad Y(t, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 - \varepsilon y_1^3 \end{pmatrix}$$

Estamos en las hipótesis del teorema con

$$\frac{\partial Y}{\partial y}(t, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3\varepsilon y_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}(t, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1^3 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = z(t)$ solución de

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3\varepsilon y_1(t, \varepsilon)^2 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1(t, \varepsilon)^3 \end{pmatrix}, \quad z(0) = 0.$$

Para $\varepsilon = 0$,

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega s^3 t \end{pmatrix}, \quad z(0) = 0$$

Aplicamos la fórmula de variación de constantes

$$z' = A(t)z + b(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad \Phi(t) \text{ m.f. de } z' = A(t)z \text{ con } \Phi(t_0) = I$$

$$z(t) = \Phi(t) z_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds$$

En nuestro caso,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{Rotación horaria de ángulo } t$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{anti-horaria}$$

$$z(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega s^3 \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \omega s^3 \sin s \\ -\omega s^4 \cos s \end{pmatrix} ds$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} z_1(t) = -\frac{\omega s^5 t}{4} - \sin t \left(\omega^3 t \sin t + \frac{3}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \right) \\ \parallel \\ \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 0) \end{matrix}$$

Para $\varepsilon \neq 0$ pero próximo a cero obtenemos un desarrollo asintótico de la solución, $t \in \mathbb{R}$

$$x(t, \varepsilon) = x(t; 0) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 0) \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$= \cos t + z_1(t) \varepsilon + o(\varepsilon)$$

Este desarrollo es uniforme para t en intervalos compactos
[Ejercicio]

Demostración del Teorema

Consideramos el sistema ampliado

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m}, \quad \begin{cases} x' = \bar{X}(t, x, y) \\ y' = 0 \end{cases}$$

con condición inicial $\xi(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$. El campo ampliado

$$\mathcal{X} : G \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}, \quad \mathcal{X}(t, \xi) = \begin{pmatrix} \bar{X}(t, x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ está en}$$

las condiciones del teorema de diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales pues

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \xi}(t, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}(t, x, y) & \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda}(t, x, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+d) \times (m+d)}$$

La solución general $\xi(t; t_0, \xi_0)$ está definida en

$$\mathcal{D} = \left\{ (t; t_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+m} : (t_0, \xi_0) \in G, \alpha(t_0, \xi_0) < t < \omega(t_0, \xi_0) \right\}$$

y es C^1 . Observamos que G es la imagen de $\mathcal{D}$ por la proyección $(t; t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}) \mapsto (t; \lambda)$, así que G es abierto

en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Además, $x(t; \lambda)$ es la composición de la primera coordenada de $\xi(t; t_0, \xi_0)$ con la inyección $(t, \lambda) \mapsto (t; t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix})$.

Por la regla de la cadena $x(t, \lambda)$ es C^1 . Para calcular $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ calculamos la ecuación variacional a lo largo de $\xi(t; t_0, \xi_0)$,

$$\eta' = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \xi}(t, \xi(t; t_0, \xi_0)) \eta, \quad \eta|_0 = I_{m+d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \frac{\partial x}{\partial \lambda} \text{ es la primera coordenada de } \eta.$$

La solución general $\xi(t; t_0, \xi_0)$ tiene dos componentes que denotaremos por $\xi_1 \in \mathbb{R}^d$ y $\xi_2 \in \mathbb{R}^m$,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \text{ de manera que } x(t; \lambda) = \xi_1(t; t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix})$$

$$\text{y } \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t; \lambda) = \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2}(t; t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m \times m} \end{pmatrix}$$

Escribimos $\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}(t; t_0, \xi_0)$ por bloques y observamos

que $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ es el bloque M_{12}

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}(t; t_0, \xi_0) = \left(\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right) = M$$

$$M_{21} = 0, M_{22} = I$$

M es la solución de $M' = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \xi}(t, \xi(t; t_0, \xi_0)) M, M(t_0) = I$

$$\begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M'_{12} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} M_{12} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda} M_{22} \quad \text{ec. variacional}$$

$$M(t_0) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \Rightarrow M_{12}(t_0) = 0$$