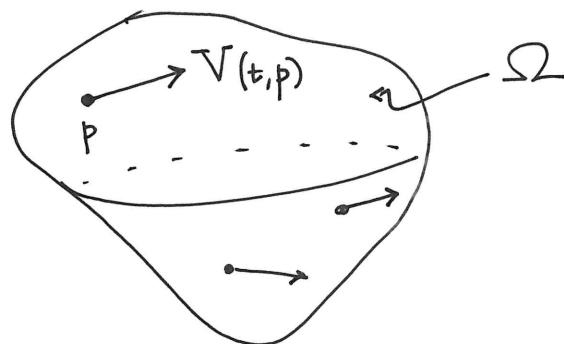


## Movimiento de una partícula en un fluido

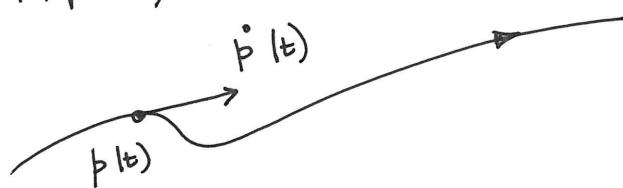
Consideramos un fluido dentro de una región del espacio, por ejemplo el agua del mar Mediterráneo o el aire encerrado en una habitación. Pretendemos estudiar el movimiento de una partícula pequeña que, llevada por la corriente, se mueve dentro del fluido.

Llamaremos  $\Omega$  a la región del espacio, un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^3$ . Un punto genérico de  $\Omega$  se designará por  $p = (x, y, z)$ . En cada punto el fluido tendrá una velocidad

$$V: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, p) \mapsto V(t, p)$$



Estamos suponiendo que la velocidad puede variar con el tiempo, por eso el campo  $V$  depende también del tiempo. La partícula se mueve dentro de  $\Omega$  a lo largo de una trayectoria  $\dot{p} = \dot{p}(t)$ ; en cada posición la velocidad de la partícula  $\dot{p}(t)$  ha de coincidir con la velocidad del campo  $V(t, p(t))$ .



Llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{p}(t) = \nabla(t, p(t)),$$

que escribiremos en coordenadas

$$\dot{x} = u(t, x, y, z), \quad \dot{y} = v(t, x, y, z), \quad \dot{z} = w(t, x, y, z)$$

donde  $\nabla = (u, v, w)$ .

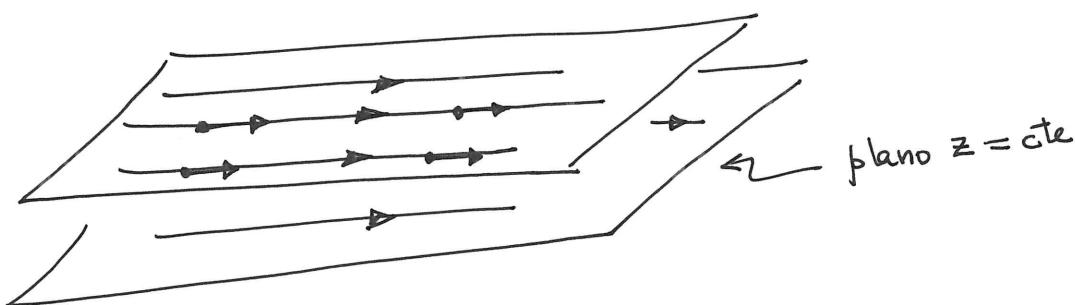
Estamos usando ya la notación típica de las ecuaciones diferenciales, las incógnitas  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , están destinadas a depender de la variable independiente (tiempo) pero se escriben en la ecuación sin hacer explícita esa dependencia.

Veamos dos ejemplos sencillos de campos estacionarios ( $\nabla$  independiente de  $t$ ).

Ejemplo 1 Velocidad constante  $\nabla(t, p) = (1, 0, 0)$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$

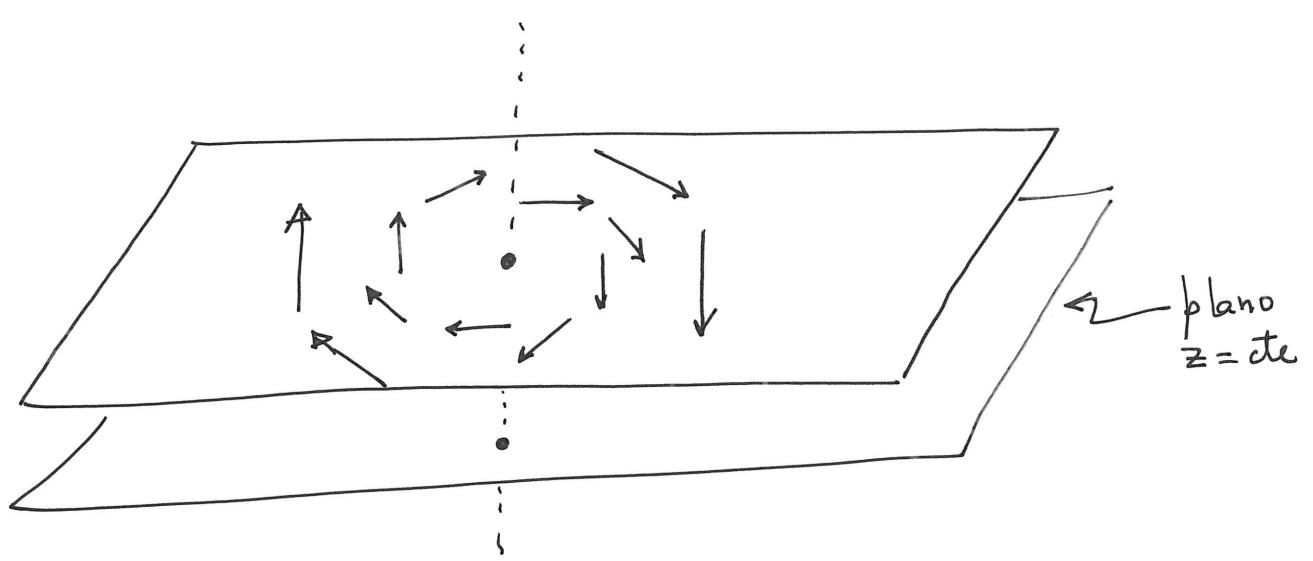
$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0 \quad \leadsto \quad x(t) = t + c_1, \quad y(t) = c_2, \quad z(t) = c_3$$

Las partículas se mueven a lo largo de rectas con vector director  $\underline{g} = (1, 0, 0)$



Ejemplo 2 Vórtice  $\nabla(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$

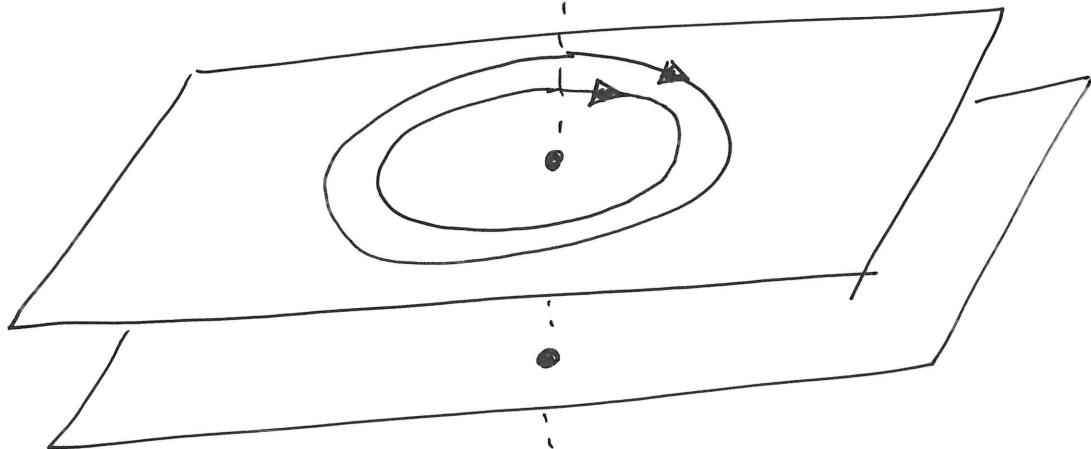
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = 0 \quad \leadsto \quad \ddot{x} + x = 0, \quad z(t) = c_3$$



$$\ddot{x} + x = 0 \rightarrow x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\dot{y} = -x \rightarrow y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

La pareja  $(x(t), y(t))$  se mueve en una circunferencia con centro el origen y radio  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ .



En conclusión, las partículas sobre el eje  $z$  ( $c_1 = c_2 = 0$ ) permanecen en equilibrio y las demás rotan alrededor del eje  $z$ .

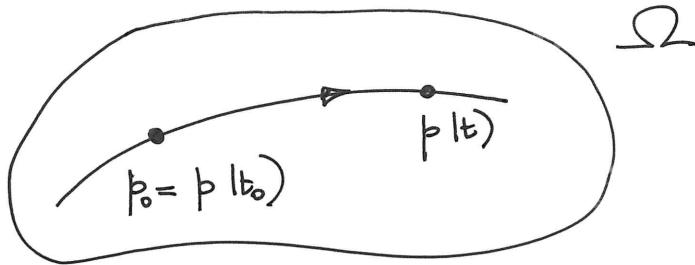
Cada ecuación diferencial del tipo

$$\dot{p} = V(t, p)$$

se puede interpretar como un modelo para la descripción del movimiento de partículas en el campo de velocidades  $V$ .

A la vista de esta analogía podemos conjeturar algunas propiedades de las soluciones:

- Una ecuación diferencial tiene muchas soluciones
- Si situamos la partícula en una posición  $p_0 \in \Omega$  en el instante  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces se moverá dando lugar a una solución



$p(t_0) = p_0$  condición inicial  $\rightsquigarrow$  solución  $p(t)$

- Como hay determinismo, por cada condición inicial solo puede pasar una ~~solución~~ solución

Vamos a dedicar esta lección a hacer precisas estas observaciones y a encontrar las condiciones que ha de cumplir el campo  $V$  para que todo esto sea correcto. Hemos tratado sistemas de tres ecuaciones pero no habrá diferencias si consideramos sistemas de  $d$  ecuaciones y  $d$  incógnitas. Para seguir la tradición cambiaremos un poco la notación,  $x = (x_1, \dots, x_d)$  será el vector incógnita y  $X = (X_1, \dots, X_d)$  será el campo dado,  $\dot{x} = X(t, x)$ , lo que lleva al sistema

$$\dot{x} = X(t, x).$$

## Problema de valores iniciales

Consideramos un conjunto  $D$  dentro de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  que sea abierto y conexo. Los puntos de  $D$  son de la forma  $(t, x)$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Sobre este dominio consideramos una función (o campo de vectores)

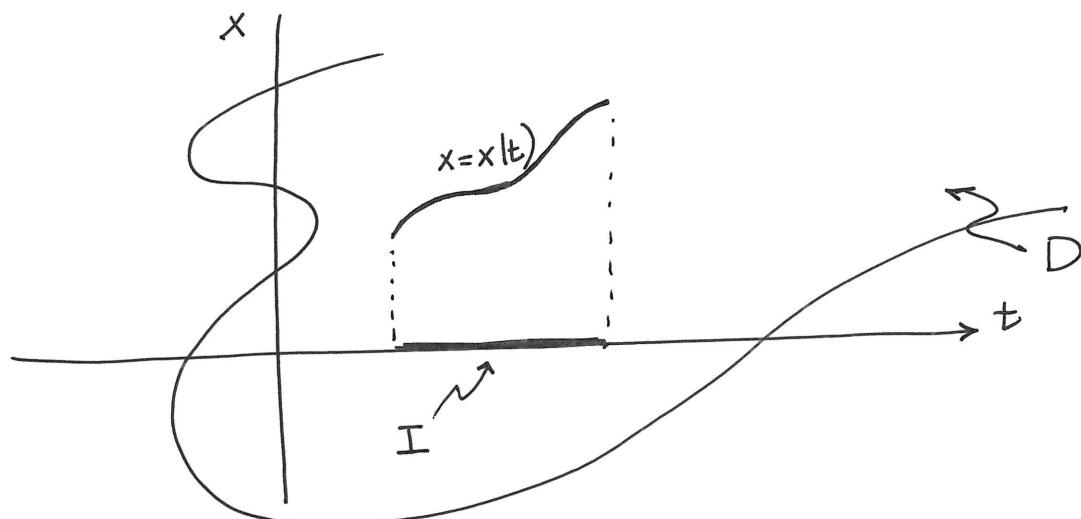
$$X: D \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto X(t, x) = (x_1|_{t,x}, \dots, x_d|_{t,x})$$

que siempre vamos a suponer que es continua. Asociada a este campo tenemos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = X(t, x).$$

Dado un intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$ , diremos que una función  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una solución si cumple:

- (i)  $x(t)$  es derivable en  $I$
- (ii)  $(t, x(t)) \in D$  para cada  $t \in I$
- (iii)  $\dot{x}(t) = X(t, x(t)), t \in I$



No hay que confundir el dominio de la ecuación ( $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ) y el dominio de una solución ( $I \subset \mathbb{R}$ ).

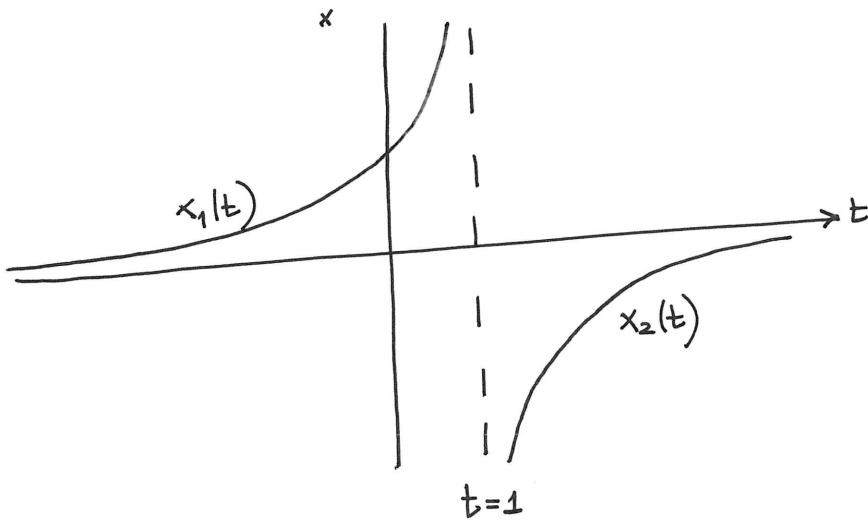
Un par de ejemplos para asimilar el marco de trabajo.

Ejemplo 1 ¿Es  $x(t) = \frac{1}{1-t}$  solución de  $\dot{x} = x^2$ ?

En este caso  $d=1$ ,  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $X(t, x) = x^2$  campo estacionario.

La función  $x(t)$  es derivable en  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  y cumple  $\dot{x}(t) = x(t)^2$ . Pero no podemos decir que sea una solución, pues las soluciones están definidas en intervalos (\*). Definiremos dos soluciones

$$x_1(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in I_1 = ]-\infty, 1[; \quad x_2(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in I_2 = ]1, \infty[$$



Ejemplo 2 ¿Es  $x(t) = 2t$  solución de  $\dot{x}' = \frac{x}{t}$ ?

De nuevo  $d=1$ , ahora el campo  $X(t, x) = \frac{x}{t}$  no es estacionario y tiene una discontinuidad a lo largo de la recta  $t=0$ . Si eliminamos las discontinuidades el dominio de  $X$  se desconecta. Se ha supuesto que  $D$  es

---

(\*) Se trata de una convención razonable si tenemos en cuenta que  $x(t)$  models la trayectoria de una partícula.

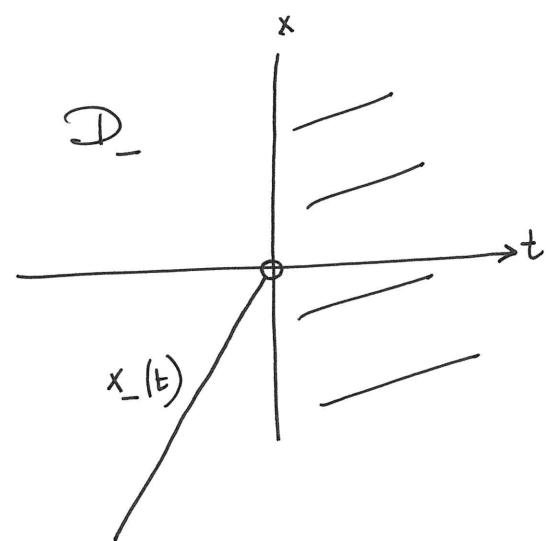
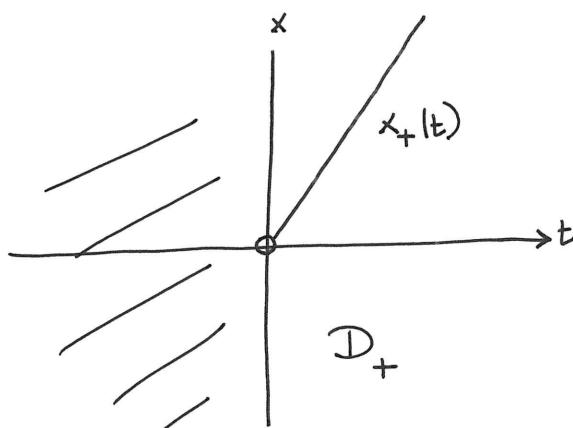
conexo, así que debemos escoger una de las componentes. Hay dos opciones

$$\mathcal{D}_+ = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \}, \quad x_+(t) = 2t, \quad t \in I_+ = ]0, \infty[$$

es solución

o bien

$$\mathcal{D}_- = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t < 0 \}, \quad x_-(t) = 2t, \quad t \in I_- = ]-\infty, 0[$$



Dado  $(t_0, x_0) \in D$  pretendemos estudiar el problema de valores iniciales (o problema de Cauchy)

$$(PC) \quad \dot{x} = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Un resultado fundamental de esta lección será el siguiente

Teorema de Cauchy - Peano Si el campo de vectores  $X$

---

es continuo en  $D$  y  $(t_0, x_0) \in D$ , entonces existe una solución del problema de valores iniciales definida en algún intervalo  $I$  que contiene a  $t_0$  en su interior.

## Observaciones

1. Este resultado dice que si un campo de velocidades es continuo y ponemos una partícula en una posición  $x_0$  en el instante  $t_0$ , entonces la partícula se mueve por algún tiempo. Desde un punto de vista intuitivo parece obvio pero veremos que la demostración no es fácil.

2. Se trata de un resultado local porque no se especifica el intervalo  $I$ , en este sentido se parece a los teoremas de la función implícita e inversa.

Probaremos este teorema después de bastante trabajo.

Comenzamos ~~trabajando~~ transformando el problema de Cauchy en una ecuación ~~diferencial~~ integral.

La ecuación integral de Volterra

Consideramos la ecuación

$$(EV) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds.$$

Como se trata de una identidad vectorial, la integral

se entiende coordenada a coordenada. Dado un intervalo

$I$  que contiene a  $t_0$  en su interior, diremos que la función

$x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución de  $(EV)$  si cumple:

(i)  $x(t)$  es continua

(ii)  $(t, x(t)) \in D$  para cada  $t \in I$

(iii)  $x(t)$  cumple la identidad  $(EV)$

Lema Una función  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución de (PC) si y solo si lo es de (EV).

Como ejemplo podemos considerar la ecuación integral

$$x(t) = 2 + \int_0^t x(s)ds$$

que conduce al problema de valores iniciales  $\dot{x} = x$ ,  $x(t_0) = 2$  cuya única solución es  $x(t) = 2e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Dem Es un buen ejercicio para practicar el Teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow.

T<sup>a</sup> del Cálculo

$$f \in C(I), F(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds$$



$$F \in C^1(I), F' = f$$

Regla de Barrow

$$f \in C^1(I)$$



$$\int_{t_0}^t f'(s)ds = f(t) - f(t_0)$$

(PC)  $\Rightarrow$  (EV)

Al ser  $x(t)$  derivable también es continua y se cumple (i).

La condición (ii) es común a ambas nociones de solución.

Integrando la ecuación diferencial entre  $t_0$  y  $t$  (estamos en un intervalo)

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \rightarrow \int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^t X(s, x(s))ds$$

Por la Regla de Barrow,

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds = x(t) - x(t_0)$$

Como  $x(t_0) = x_0$ , llegamos a la ecuación integral

(EV)  $\Rightarrow$  (PC)

En principio la solución de  $x \in (\bar{E}V)$  solo es continua, pero entonces también lo será  $X(t, x(t))$  y, por el Teorema del Cálculo,  $F(t) = \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds$  es de clase  $C^1$ ; entonces  $x(t) = x_0 + F(t)$  es  $C^1$  y, en particular, derivable.

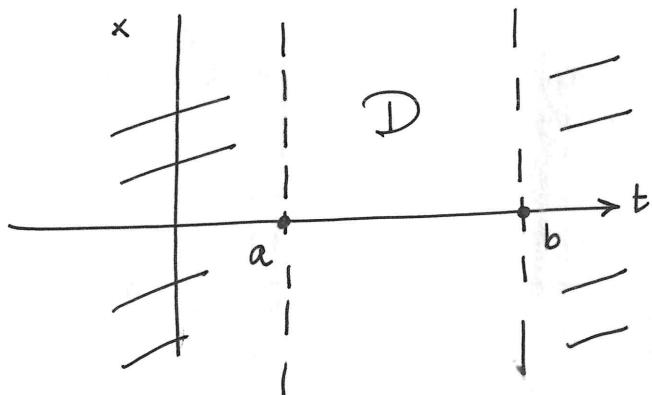
Además,  $\dot{x}(t) = \overset{\circ}{F}(t) = X(t, x(t))$  y se cumple la ecuación diferencial. Si hacemos  $t = t_0$  en la ecuación integral obtenemos  $x(t_0) = x_0$ .

Un teorema global

Trabajaremos en un dominio concreto,

$$D = I \times \mathbb{R}^d, \quad I = [a, b], \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

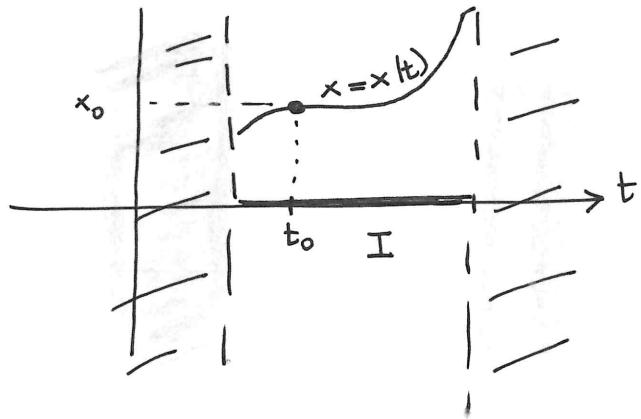
Se trata de una banda vertical



y supondremos que el campo  $X: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  es continuo y acotado; esto último quiere decir que existe  $M > 0$  tal que

$$\|X(t, x)\| \leq M \text{ para cada } (t, x) \in D$$

En estas condiciones se va a cumplir que, dada una condición inicial  $(t_0, x_0) \in D$ , existe una única solución de (PC) definida en todo el intervalo  $I$



Veamos un par de ejemplos:

$$\textcircled{1} \quad \dot{x}_1 = \frac{x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\sqrt{1-t^2} x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1,$$

En este caso tomamos  $D = ]-1, 1[ \times \mathbb{R}^2$ . El campo

$$X(t, x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\sqrt{1-t^2} x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)$$

es continuo y vamos a ver que es acotado. Para ello usamos la desigualdad  $|x| \leq 1 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  y la norma de la suma en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\|X(t, x_1, x_2)\| = \frac{|x_1|}{1+x_1^2+x_2^2} + \frac{\sqrt{1-t^2} |x_2|}{1+x_1^2+x_2^2} \leq 1 + 1 = 2$$

Deducimos que existe solución definida en  $I = ]-1, 1[$

$$\textcircled{2} \quad \dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1, \quad D = ]-2, 2[ \times \mathbb{R}$$

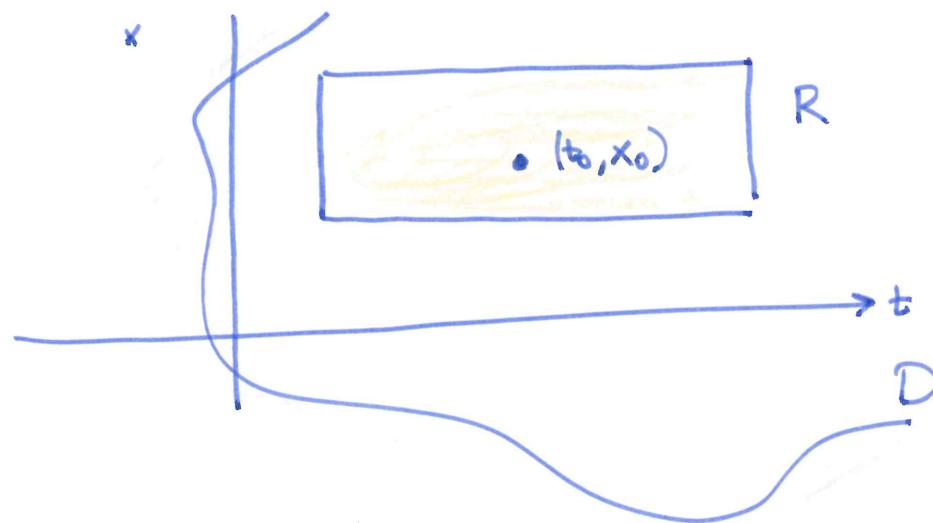
En este caso el teorema no es aplicable porque el campo  $X(t, x) = x^2$  no es acotado. Más adelante probaremos que la única solución es  $x(t) = \frac{1}{1-t}$ , que no está definida en  $] -2, 2 [$ .

Demostración del Teorema de Cauchy-Peano (dando por bueno el Teorema global)

Como  $D$  es abierto y  $(t_0, x_0) \in D$ , podemos encontrar números  $\alpha, \beta > 0$  tales que la región

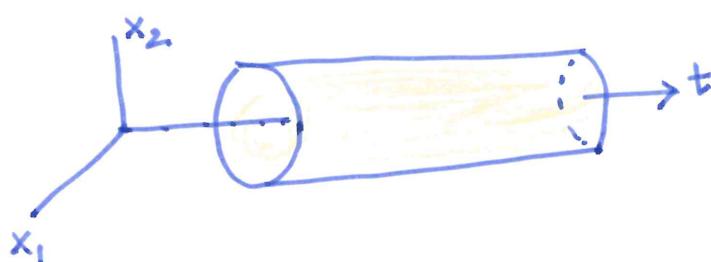
$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta\}$$

se queda dentro de  $D$ ,  $R \subset D$ .

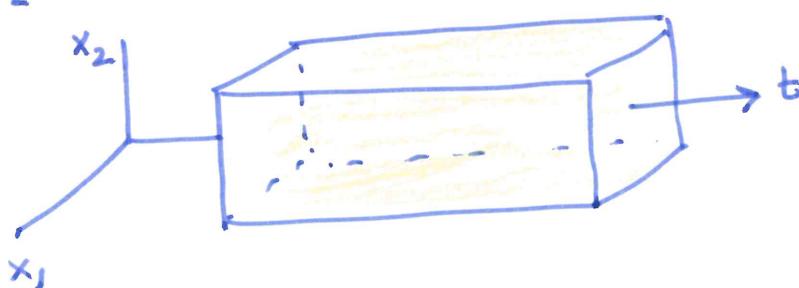


Este dibujo se corresponde con  $d = 1$ . Para  $d \geq 2$  la geometría de  $R$  dependerá de la norma elegida

$d = 2 \quad \| \cdot \|$  norma euclídea



$d = 2 \quad \| \cdot \|$  norma del máximo



Como el campo  $\bar{X}(t, x)$  es continuo en el compacto  $R$ , encontramos una cota  $M > 0$ :

$$\|\bar{X}(t, x)\| \leq M \text{ si } (t, x) \in R.$$

Fijamos un número  $\beta^* \in ]0, \beta[$  y consideramos la región más pequeña

$$R^* = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta^*\}$$



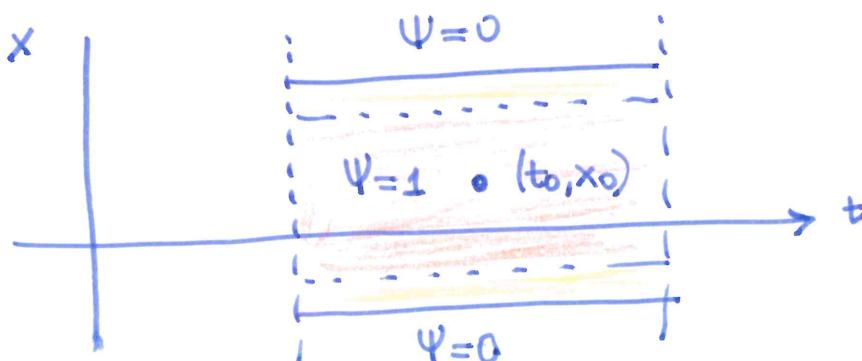
Ahora construimos una función  $\Psi$  definida en la banda  $I \times \mathbb{R}^d$ ,  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , que cumple

$$\Psi : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

$$0 \leq \Psi(t, x) \leq 1 \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$$

$$\Psi = 1 \text{ si } \|x - x_0\| \leq \beta^*$$

$$\Psi = 0 \text{ si } \|x - x_0\| \geq \beta$$



Definimos el campo modificado

$$\tilde{X}: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \tilde{X}(t, x) = \begin{cases} \Psi(t, x) X(t, x) & \text{si } \|x - x_0\| \leq \beta \\ 0 & \text{si } \|x - x_0\| > \beta. \end{cases}$$

Observamos que este campo es continuo, ya que se obtiene "pegando" dos funciones continuas

$$f_1(t, x) = \Psi(t, x) X(t, x), \quad F_1 = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq \beta\}$$

$$f_2(t, x) = 0, \quad F_2 = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| > \beta\}$$

definidas en cerrados (relativos a  $I \times \mathbb{R}^d$ )  $F_1$  y  $F_2$  tales que  $f_1 = f_2$  en  $F_1 \cap F_2$ .

Además,  $\tilde{X}$  es acotado porque  $0 \leq \Psi \leq 1$  y  $\|X\| \leq M$  en  $\mathbb{R}$ ,

$$\|\tilde{X}(t, x)\| \leq M \quad \text{si } (t, x) \in I \times \mathbb{R}^d.$$

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema global al problema de Cauchy

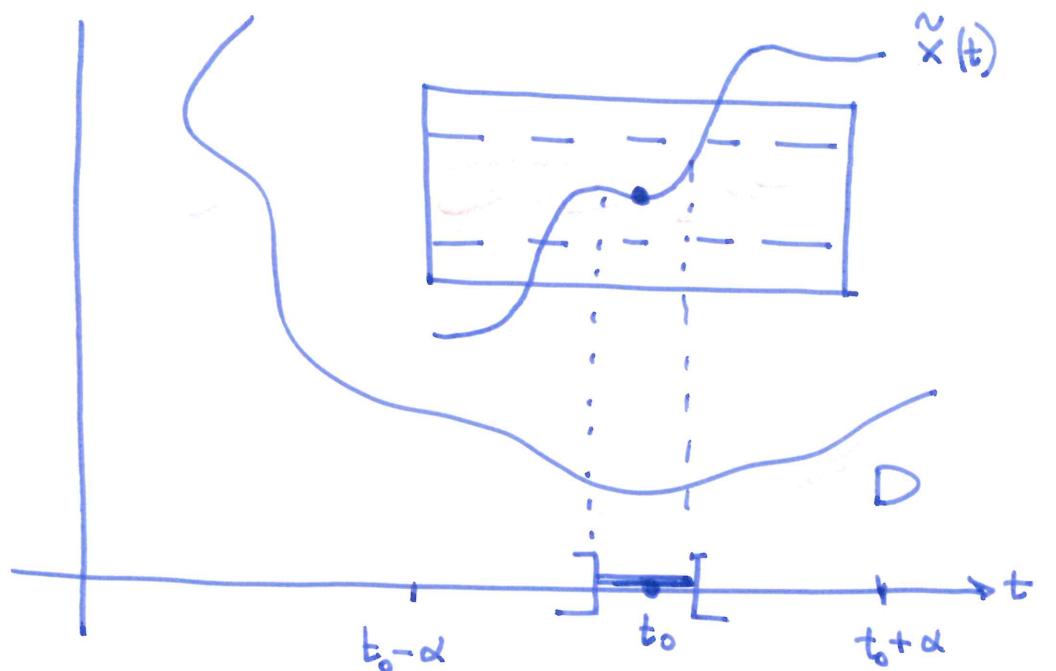
$$x' = \tilde{X}(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Entonces existe una solución  $\tilde{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Como  $(t_0, \tilde{x}(t_0))$  está en el interior de  $\mathbb{R}^*$ , existirá  $\delta > 0$  tal que

$$(t, \tilde{x}(t)) \in \mathbb{R}^* \quad \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Observamos que  $\delta \leq \alpha$



Vamos a comprobar que la restricción de  $\tilde{x}(t)$  al intervalo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  es una solución del problema de Cauchy original

$$x' = \tilde{X}(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Por construcción sabemos que  $x = \tilde{x} |_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$

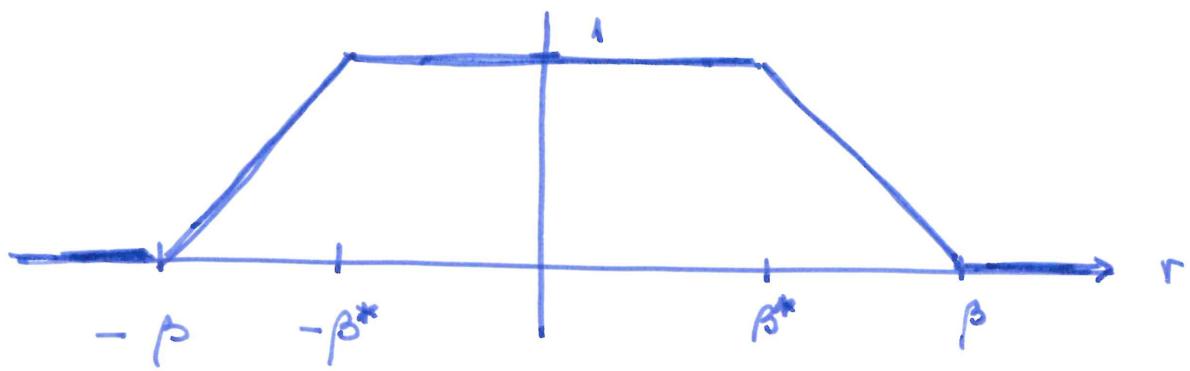
es derivable y cumple

$$(t, x(t)) \in \mathbb{R}^* \times D \quad \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Además, como  $\Psi(t, x(t)) = 1$ ,

$$x'(t) = \tilde{X}(t, x(t)) = \tilde{x}'(t) \quad \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Nota En la demostración anterior hemos dado por evidente la construcción de la función  $\Psi$ . Una manera sencilla de construirla es partir de la función lineal a trozos  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \mapsto \varphi(r)$



$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{en } [-\beta^*, \beta^*] \\ 0 & \text{fuera de } [-\beta, \beta] \end{cases}$$

y definir  $\Psi(t, x) = \varphi(\|x - x_0\|)$ .

Véamos que  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución del problema original :

- (i)  $x(t)$  es derivable en  $J$  (pues lo era en  $I$ )
- (ii)  $(t, x(t)) \in D$  si  $t \in J$  (pues  $(t, x(t)) \in R \subset D$ )
- (iii)  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  (pues  $\tilde{X}(t, x(t)) = X(t, x(t))$  si  $(t, x(t)) \in R$ )

Estrategia para la demostración del Teorema Global

---

A partir de ahora suponemos  $I = [a, b]$ ,  $X: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuo y acotado,  $\|X(t, x)\| \leq M$ .

Haremos la demostración en tres etapas :

### ① Construcción de soluciones aproximadas

Para  $\varepsilon > 0$  buscaremos funciones continuas  $x_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  que cumplen

$$\left\| x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t X(s, x_\varepsilon(s)) ds \right\| \leq M\varepsilon \quad \text{si } t \in I$$

### ② Selección de una sucesión convergente

Buscamos  $\varepsilon_n \searrow 0$  de manera que  $x_{\varepsilon_n}(t)$  converja uniformemente en  $I$  a una función  $x(t)$

### ③ Paso al límite

La función  $x(t)$  cumple  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds$ .

## Construcción de soluciones aproximadas

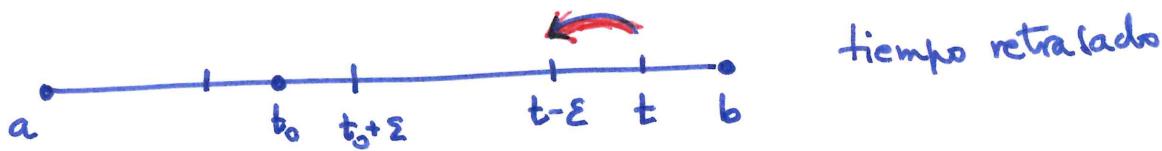
Para cada  $0 < \varepsilon < \min\{t_0 - a, b - t_0\}$  vamos a definir una función

$x_\varepsilon: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  que es continua y cumple

$$x_\varepsilon(t) = x_0 \quad \text{si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\varepsilon} X(s, x_\varepsilon(s)) ds \quad \text{si } t \in [t_0 + \varepsilon, b]$$

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t+\varepsilon} X(s, x_\varepsilon(s)) ds \quad \text{si } t \in [a, t_0 - \varepsilon]$$



Es fácil comprobar que esta función es una solución  $\varepsilon$ -aproximada, para ello observamos que si  $t \in [t_0 + \varepsilon, b]$ ,

$$\|x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t X(s, x_\varepsilon(s)) ds\| = \left\| \int_{t-\varepsilon}^t X(s, x_\varepsilon(s)) ds \right\|$$

$$\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|X(s, x_\varepsilon(s))\| ds \leq M\varepsilon.$$

Una estimación similar se obtiene en los intervalos  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  y  $[a, t_0 - \varepsilon]$ .

Nota Hemos usado por primera vez la desigualdad vectorial

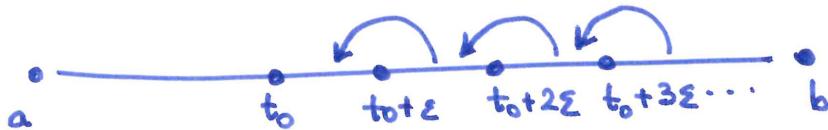
$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|$$

Para construir  $x_\varepsilon(t)$  procedemos de forma iterativa

$$x_\varepsilon(t) = x_0 \quad \text{si } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$$

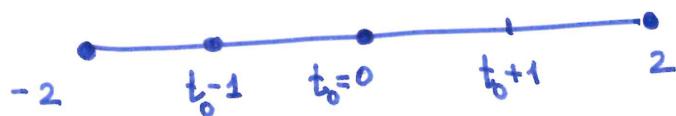
$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} X(s, x_\varepsilon(s)) ds \quad \text{si } t \in ]t_0 + \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon[$$

etcétera



Para construir la función en  $]t_0 + k\varepsilon, t_0 + (k+1)\varepsilon]$  solo necesita mos conocer la función en  $[t_0, t_0 + k\varepsilon]$

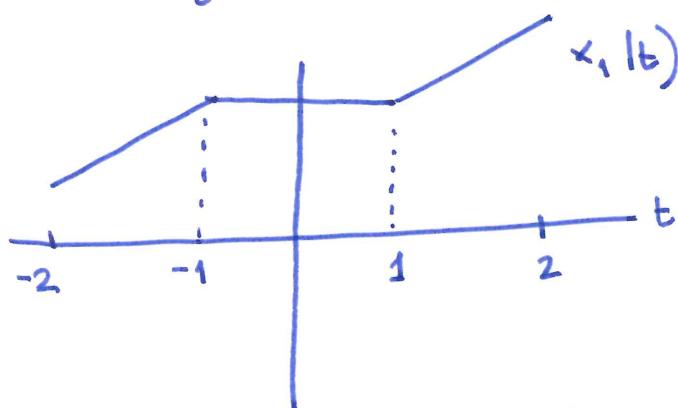
Ejemplo  $\dot{x} = \operatorname{sen} x$ ,  $x(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ ,  $\varepsilon = 1$



$$x_1(t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } t \in [-1, 1]$$

$$x_1(t) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{t-1} \operatorname{sen} x_1(s) ds = \frac{\pi}{2} + t - 1 \quad \text{si } t \in ]1, 2[$$

$$x_1(t) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{t+1} \operatorname{sen} x_1(s) ds = \frac{\pi}{2} + t + 1 \quad \text{si } t \in ]-2, -1[$$



Vamos a formalizar esta construcción en el intervalo  $[t_0, b]$ . La construcción en  $[a, t_0]$  queda como ejercicio.

Consideramos el intervalo  $[t_0, b]$  y la partición



$$I_0 = [t_0, t_0 + \varepsilon], \quad I_k = [t_0 + k\varepsilon, t_0 + (k+1)\varepsilon], \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$I_N = [t_0 + N\varepsilon, b]$$

Definimos  $x_\varepsilon(t) = x_0$  si  $t \in I_0$  y procedemos por inducción finita sobre  $k$  desde 0 hasta  $N$ .

Si ya hemos definido  $x_\varepsilon : [t_0, t_0 + k\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua, definimos la función para  $t \in I_{k+1}$  por la fórmula

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\varepsilon} \bar{x}(s, x_\varepsilon(s)) ds.$$

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que  $x_\varepsilon(t)$  es continua en  $I_{k+1}$ . Además,

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^+} x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_{k+1}-\varepsilon} \bar{x}(s, x_\varepsilon(s)) ds$$

Aquí hemos usado la propiedad de la integral

$$\lim_{b \rightarrow \beta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^\beta f(t) dt,$$

válida para cualquier función integrable en sentido Lebesgue.

Por la hipótesis de inducción sabemos que el límite a la

izqda  $\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x_\varepsilon(t)$  coincide con el límite a la dcha.

Así, podemos pegar las funciones en  $[t_0, t_0 + k\varepsilon]$  y en  $I_{k+1}$  para obtener una función continua  $x_\varepsilon : [t_0, t_0 + (k+1)\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  que cumple todos los requisitos para construcción.

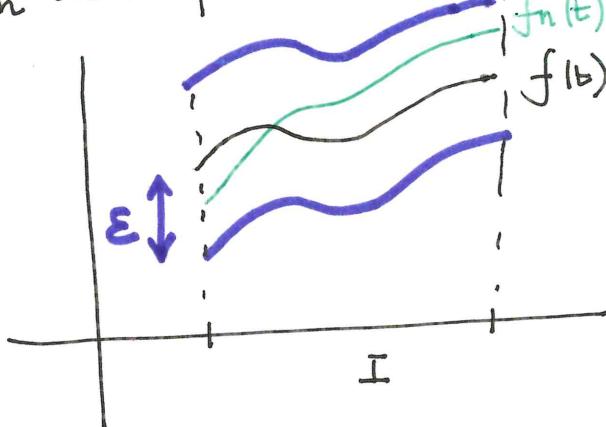
Disponemos ahora de una familia de soluciones aproximadas  $x_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$ ,  $0 < \varepsilon < \min\{b-t_0, t_0-a\}$  y pretendemos encontrar una función  $\varepsilon_n \downarrow 0$  de manera que la sucesión de funciones  $\{x_{\varepsilon_n}(t)\}$  tenga un límite uniforme. A continuación haremos un repaso de la convergencia uniforme.

### Convergencia uniforme y Teorema de Ascoli

Sea  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $f_n = f_n(t)$ , una sucesión de funciones. Diremos que  $f_n$  converge uniformemente a una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  si se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall t \in I.$$

Para visualizar esta definición pensamos en la gráfica de  $f$  y construimos a su alrededor un tubo de radio  $\varepsilon$ , entonces la gráfica de  $f_n$  debe quedar dentro del tubo para  $n$  grande.



Hay que distinguir la convergencia uniforme de la puntual. La sucesión  $\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  si se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Expresado en el lenguaje de cuantificadores:

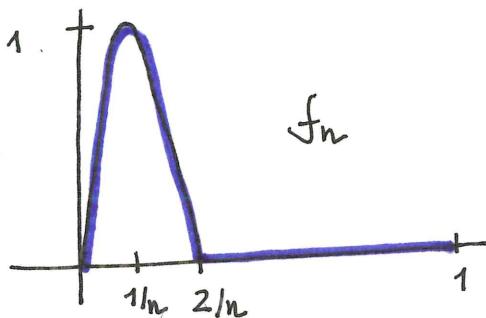
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \in I \quad \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

A primera vista las dos definiciones son casi iguales, solo hemos cambiado la posición del cuantificador  $\forall t \in I$ , pero el cambio es profundo: en la convergencia uniforme el número  $N$  es independiente de  $t$ , en la puntual  $N = N(t)$  puede variar con  $t$ . Veamos un ejemplo que pone de manifiesto esta diferencia a un nivel más geométrico.

Ejemplo 1  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(t) = \begin{cases} n^2 t \left(\frac{2}{n} - t\right), & t \in [0, \frac{2}{n}] \\ 0 & , t \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

( $n \geq 3$ ).

La gráfica de  $f_n$  se obtiene pegando un arco de parábola con un segmento



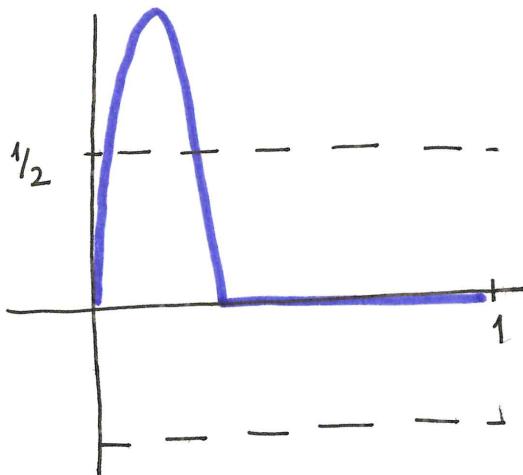
$$\max_{t \in I} f_n(t) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Observamos que, dado  $t \in I$ , existe un  $N$  a partir del cual  $f_n(t) = 0$ . Por tanto  $f_n(t) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$  y hay convergencia puntual a  $f(t) = 0$ . Sin embargo esta convergencia no puede ser uniforme. Por reducción al absurdo supongamos que  $f_n \rightarrow 0$  c.u. en  $[0, 1]$  y fijemos  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  en la definición, debería existir  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\|f_n(t)\| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N, \quad \forall t \in I.$$

Esto no puede ser cierto, pues sabemos que  $f_N\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ .

Dicho en un lenguaje más gráfico: el arco de parábola no puede entrar en un tubo de la función  $f=0$



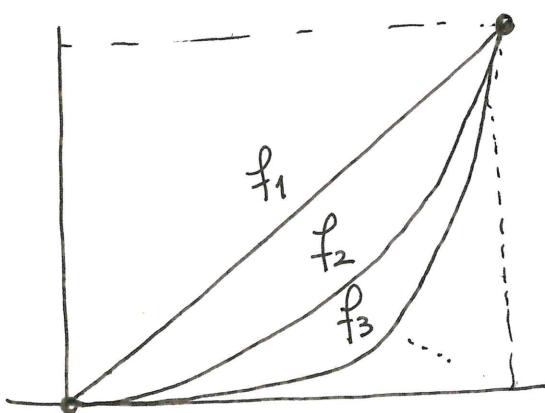
Un resultado importante dice que la convergencia uniforme preserva la continuidad; es decir

$$f_n \in C(I, \mathbb{R}^d), \quad f_n \rightarrow f \text{ c.u. en } I \Rightarrow f \in C(I, \mathbb{R}^d).$$

La convergencia puntual no tiene esta propiedad. Un ejemplo típico de convergencia puntual a una función discontinua es el siguiente.

Ejemplo 2  $f_n(t) = t^n, \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1$

Las gráficas crecen desde el  $(0,0)$  al  $(1,1)$  pero cada vez tardan más tiempo en subir



Se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Las funciones polinómicas (y por tanto continuas)  $f_n(t)$  convergen puntualmente a  $f(t)$  (discontinua).

Cauchy pensó que la convergencia puntual conservaba la continuidad y Abel le corrigió (para más detalles "Niels

Abel estudió el curso de Análisis del profesor Cauchy [www.ugr.es/~rrortega/AC.htm](http://www.ugr.es/~rrortega/AC.htm)). En la demostración del Teorema de Cauchy-Peano necesitamos saber que el límite de las soluciones aproximadas  $x_{\varepsilon_n}(t)$  es continuo, por eso usamos convergencia uniforme y no puntual.

Otro resultado que nos será útil es la caracterización de la convergencia uniforme a partir de las sucesiones de Cauchy. Dada una sucesión  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , diremos que  $\{f_n\}$  es uniformemente de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad \forall t \in I.$$

Se cumple:  $\{f_n\}$  es uniformemente de Cauchy si y solo si  $\{f_n\}$  converge uniformemente a alguna función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Nuestro objetivo es encontrar condiciones sobre una sucesión de funciones  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  que nos permitan asegurar que se puede extraer una parcial que converge uniformemente. Por una sucesión parcial de  $\{f_n\}$  entendemos una sucesión del tipo  $\{f_{\sigma(n)}\}$  con  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente.

Si cambiamos las funciones por puntos en  $\mathbb{R}^d$ , conocemos una buena respuesta a la pregunta paralela: si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada de puntos en  $\mathbb{R}^d$ , entonces existe una parcial convergente.

Esto sugiere la definición siguiente:

Una sucesión de funciones  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  está uniformemente acotada si existe  $M > 0$  tal que

$$\|f_n(t)\| \leq M \quad \forall t \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Las cosas se complican porque esta condición no es suficiente para garantizar la existencia de una parcial que converja uniformemente.

Ejemplo 2 (continuación)  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(t) = t^n$ ,  $n \geq 1$

La sucesión  $\{f_n\}$  es uniformemente acotada con  $M=1$  pero no existen parciales que converjan uniformemente. Por reducción al absurdo, si existiera  $\{f_{\sigma(n)}\} \rightarrow \hat{f}$  c.u., como la convergencia uniforme implica la puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma(n)}(t) = \hat{f}(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Perdemos que  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  con  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1[ \\ 1 & t = 1 \end{cases}$

Así,  $f = \hat{f}$  y  $\hat{f}$  sería discontinua.

Esto es contradictorio con el hecho de que  $\hat{f}$  sea límite uniforme de funciones continuas.

Introducimos una segunda condición sobre la sucesión  $\{f_n\}$ .

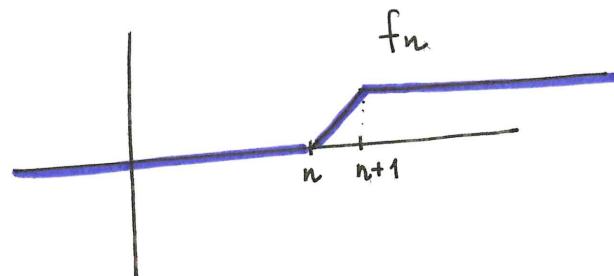
Definición La sucesión  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  se dice equicontinua si

se cumple:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|f_n(t) - f_n(s)\| < \varepsilon$  si  $|t-s| < \delta$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

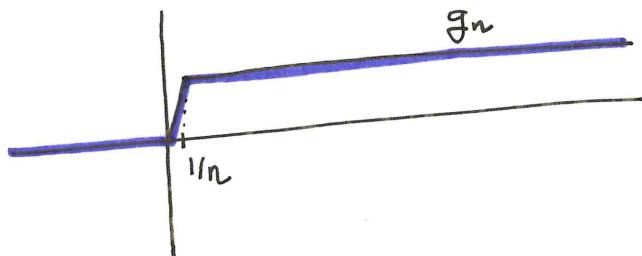
La definición anterior recuerda la continuidad uniforme; a primera vista parece que solo estamos exigiendo que cada función  $f_n$  sea uniformemente continua. La cosa es más delicada, al retrazar el cuantificador  $\forall n \in \mathbb{N}$  estamos exigiendo que  $\delta$  sea independiente de  $n$ . En términos más intuitivos encontramos equicontinuidad cuando no hay variaciones bruscas en la situación de las funciones.

Ejemplo 3  $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leq n \\ t-n, & n < t \leq n+1 \\ 1, & t > n+1 \end{cases}$$



$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ nt, & 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$



La sucesión  $f_n$  es equicontinua, no así la  $g_n$ .

Observamos que  $f_n$  cumple

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq |t-s| \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

podemos hacer  $\delta = \varepsilon$  en la definición de equicontinuidad.

Para  $g_n$  tenemos

$$\left| g_n\left(\frac{1}{n}\right) - g_n(0) \right| = 1$$

y la definición falla para  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

## Teorema de Ascoli

Sea  $I$  un intervalo acotado y  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua. Entonces existe una sucesión parcial  $\{f_{\sigma(n)}\}$  que converge uniformemente en  $I$ .

Nota La condición de acotación para el intervalo  $I$  es esencial.

La sucesión  $f_n$  del ejemplo 3 está definida en  $I = \mathbb{R}$  y es uniformemente acotada ( $M=1$ ) y equicontinua. Como  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente y  $\max_{\mathbb{R}} f_n(t) = 1$ , no es posible extraer una parcial que converja uniformemente, el argumento es similar al del ejemplo 2.

Antes de empezar la prueba conviene aclarar un aspecto de las sucesiones parciales. Supongamos que  $\{f_n\}$  es una sucesión y extraemos una parcial  $\{f_{\sigma(n)}\}$ . Ahora podemos extraer una parcial de  $\{f_{\sigma(n)}\}$  ("parcial de parcial") que denotaremos por  $\{f_{\tau(n)}\}$ . Se cumplirá:  $\sigma, \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente crecientes,  $\tau(\mathbb{N}) \subset \sigma(\mathbb{N})$ .

Ejemplo:  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_n, \dots$   $\{f_n\}$

Extraemos uno de cada dos:  $f_0, f_2, f_4, f_6, \dots$   $\{f_{\sigma(n)}\}$

Extraemos uno de cada tres en la parcial:  $f_0, f_6, f_{12}, \dots$   $\{f_{\tau(n)}\}$

$$\sigma(n) = 2n, \quad \tau(n) = 6n$$

Ejercicio Sean  $\sigma, \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente crecientes,  $\tau(\mathbb{N}) \subset \sigma(\mathbb{N})$ .

Se cumple:

- (i)  $\{f_{\tau(n)}\}$  es sucesión parcial de  $\{f_{\sigma(n)}\}$
- (ii)  $\tau(n) \geq \sigma(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

as +

Demostración del Teorema de Ascoli  
los números racionales en  $I$ ,

Consideramos el conjunto de

$$\mathcal{D} = \mathbb{Q} \cap I$$

que es denso en  $I$  y probaremos

Paso 1 Existe una sucesión parcial  $\{f_{\sigma(n)}\}$  tal que para cada  $t \in \mathcal{D}$  la sucesión  $\{f_{\sigma(n)}(t)\}$  es convergente en  $\mathbb{R}^d$ .

Paso 2 Si  $\{f_{\sigma(n)}\}$  está en las condiciones del paso 1, entonces es uniformemente de Cauchy.

Comenzamos con

① El conjunto  $\mathcal{D}$  es numerable y lo podemos escribir como una sucesión  $\mathcal{D} = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

La sucesión  $\{f_n(t_0)\}$  está acotada en  $\mathbb{R}^d$ . pues

$$\|f_n(t_0)\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\Leftarrow \text{acotación uniforme})$$

Entonces podemos extraer una parcial convergente a un punto de  $\mathbb{R}^d$ , digamos  $\{f_{\sigma_0(n)}(t_0)\}$ . Con el mismo mecanismo extraemos una parcial de  $\{f_{\sigma_0(n)}(t_1)\}$  que sea convergente, digamos  $\{f_{\sigma_1(n)}(t_1)\}$ . Como  $\{f_{\sigma_1(n)}(t_0)\}$  es una parcial de  $\{f_{\sigma_0(n)}(t_0)\}$ , también será convergente.

Repetiendo este proceso infinitas veces obtendremos un cuadro de funciones

$$f_{\sigma_0(0)} \quad f_{\sigma_0(1)} \quad \dots \quad f_{\sigma_0(n)} \quad \dots$$

$$f_{\sigma_1(0)} \quad f_{\sigma_1(1)} \quad \dots \quad f_{\sigma_1(n)} \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

con las siguientes propiedades:

- Cada fila  $\{f_{\sigma_m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una función parcial de todas las filas anteriores
  - La función  $\{f_{\sigma_m(n)}(t_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, para cada  $k = 0, \dots, m$ , en  $\mathbb{R}^d$ .
- Así, a medida que bajamos de fila tenemos convergencia en más puntos de  $\mathbb{D}$ , las funciones  $\sigma_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  son estrictamente crecientes y cumplen  $\sigma_{m+1}(N) \subset \sigma_m(N)$ ,  $\sigma_{m+1}(n) \geq \sigma_m(n)$ . Ahora escogemos la sucesión diagonal  $\{\sigma(n)\}$  con

$$\sigma(n) = \sigma_n(n).$$

Es fácil probar que  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es estrictamente creciente y por tanto  $\{f_{\sigma(n)}\}$  es una parcial de  $\{f_n\}$ . Además,  $\{f_{\sigma(n)}\}_{n \geq m}$  es una

parcial de  $\{f_{\sigma_m(n)}\}_{n \geq m}$ . Por tanto,

$\{f_{\sigma(n)}(t)\}$  es convergente en  $\mathbb{R}^d$  para todo  $t \in \mathbb{D}$ .

Paramos a la segunda parte de la prueba.

(2) Debemos probar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)\| < \varepsilon \text{ si } n, m \geq N, t \in I.$$

Por la equicontinuidad encontramos  $\delta > 0$  de manera que

$$(*) \quad \|f_n(t) - f_n(s)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |t-s| < \delta, n \in \mathbb{N}$$

Como el conjunto  $D$  es denso en  $I$  y numerable, podemos encontrar un subconjunto finito  $D_\delta \subset D$  de manera que

$$\forall t \in I \quad \exists s \in D_\delta : |t-s| < \delta \quad (\Leftarrow I \text{ acotado})$$

Ejemplo:  $I = [0, 1]$ ,  $\delta = \frac{1}{3}$ , podemos escoger

$$D_{1/3} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$$

Las sucesiones  $\{f_{\sigma(n)}(s)\}$  son de Cauchy para cada  $s \in D_\delta$ . Como se trata de un número finito de sucesiones, podemos encontrar un natural común  $N \in \mathbb{N}$  de manera que

$$(**) \quad \|f_{\sigma(n)}(s) - f_{\sigma(m)}(s)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } s \in D_\delta, n, m \geq N.$$

La conclusión se sigue combinando (\*) y (\*\*), dado  $t \in I$  elegimos  $s \in D_\delta$  con  $|t-s| < \delta$ , entonces

$$\|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)\| \leq \|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(n)}(s)\|$$

$$+ \|f_{\sigma(n)}(s) - f_{\sigma(m)}(s)\| + \|f_{\sigma(m)}(s) - f_{\sigma(m)}(t)\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } n, m \geq N$$

(\*)                    (\*\*\*)                    (\*)

## Demostración del Teorema global

Recordamos el marco general :

$D = I \times \mathbb{R}^d$ ,  $I = [a, b]$ ,  $X: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuo y acotado  
 $(\|X\| \leq M \text{ en } D)$

Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < \min(t_0 - a, b - t_0)$  hemos definido funciones continuas  $x_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  que cumplen

$$x_\varepsilon(t) = x_0 \text{ si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\varepsilon} X(s, x_\varepsilon(s)) ds \text{ si } t \in ]t_0 + \varepsilon, b[$$

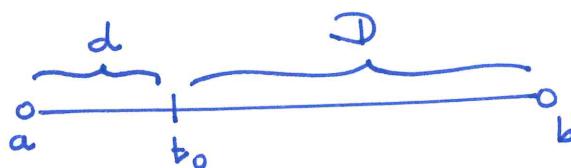
$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t+\varepsilon} X(s, x_\varepsilon(s)) ds \text{ si } t \in ]a, t_0 - \varepsilon[.$$

Probaremos dos desigualdades importantes que cumplen estas funciones

$$(i) \|x_\varepsilon(t)\| \leq \|x_0\| + M D, \quad D = \max(t_0 - a, b - t_0)$$

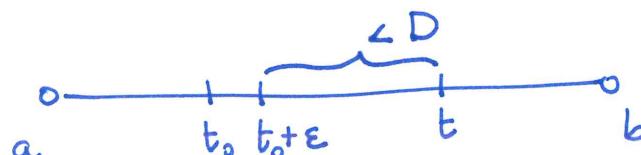
$$(ii) \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| \leq M |t - s|$$

para todo  $t, s \in I$ ,  $\varepsilon \in ]0, d[$ ,  $d = \min(t_0 - a, b - t_0)$



Dem (i) Si  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ ,  $\|x_\varepsilon(t)\| = \|x_0\|$  y la desigualdad es evidente.

Si  $t \in ]t_0 + \varepsilon, b[$ ,  $\|x_\varepsilon(t)\| \leq \|x_0\| + M (t - \varepsilon - t_0)$



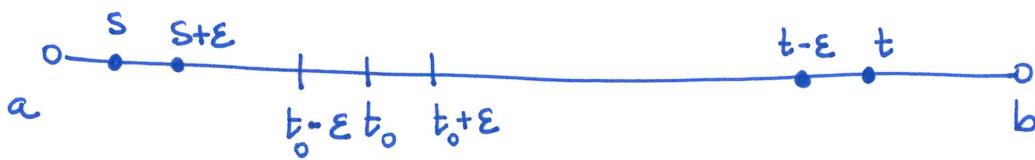
El caso  $t \in ]a, t_0 - \varepsilon[$  queda como ejercicio.

(ii) La desigualdad es evidente si  $t, s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

Supongamos ahora  $t, s \in [t_0 + \varepsilon, b[$

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s) = \int_{s-\varepsilon}^{t-\varepsilon} X(\sigma, x_\varepsilon(\sigma)) d\sigma \Rightarrow \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| \leq M |t-s|$$

Consideramos un caso más,  $t \in [t_0 + \varepsilon, b[, s \in ]a, t_0 - \varepsilon]$ . Los casos restantes quedan como ejercicio



$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s) &= \int_{t_0}^{t-\varepsilon} X(\sigma, x_\varepsilon(\sigma)) d\sigma - \int_{t_0}^{s+\varepsilon} X(\sigma, x_\varepsilon(\sigma)) d\sigma \\ &= \int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} X(\sigma, x_\varepsilon(\sigma)) d\sigma \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| \leq M (t - \varepsilon - s - \varepsilon) < M (t - s).$$

Una vez que hemos probado estas desigualdades consideramos cualquier sucesión  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  con  $\varepsilon_0 < d$  y observamos que la sucesión  $\{x_{\varepsilon_n}\}$  es uniformemente acotada y equicontinua ( $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ). El Teorema de Ascoli nos permite extraer una parcial  $\{x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}\}$  que converge uniformemente a una función  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Como  $x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(t)$  es continua, también lo será  $x(t)$ . Vamos a probar que

$x(t)$  es una solución de la ecuación integral de Volterra. Para ello partimos de la desigualdad que nos dice que  $x_\varepsilon$  es solución aproximada,

$$\left\| x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(t) - x_0 - \int_{t_0}^t X(s, x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(s)) ds \right\| \leq M \varepsilon_{\sigma(n)}$$

y hacemos  $n \rightarrow \infty$ . Se obtiene

$$\left\| x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds \right\| \leq 0 \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds.$$

En el paso al límite hemos usado que el límite commuta con la norma y la convergencia de la integral. Lo primero se justifica porque la norma es una función continua de  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}$  y entonces se cumple

$$\xi_n \in \mathbb{R}^d, \xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \|\xi_n\| \rightarrow \|\xi\|$$

Para justificar la convergencia de la integral usaremos el Teorema de la convergencia dominada (Lebesgue)

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ c.t. } J, f_n \in L(J, \mathbb{R}^d) \\ \|f_n(t)\| \leq \varphi(t) \text{ c.t. } J, \varphi \in L(I) \end{aligned} \quad \left. \right] \Rightarrow f \in L(J, \mathbb{R}^d) \quad \int_J f_n \rightarrow \int_J f$$

Hacemos  $J = [t_0, t] \cup [t, t_0]$  según la posición de  $t$ ,

$$f_n(s) = X(s, x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(s)), \quad f(s) = X(s, x(s)).$$

Como  $X$  es continuo,  $f_n(s) \rightarrow f(s)$  para cada  $s$

Además  $f_n$  cumple

$$\|f_n(s)\| \leq \varphi(s) \text{ con } \varphi(s) = M \text{ una función constante.}$$

Como  $J$  es acotado,  $\varphi$  es integrable en  $J$  y deducimos que

$$\int_{t_0}^t X(s, x_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(s)) ds \rightarrow \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds.$$

Un ejemplo de no unicidad

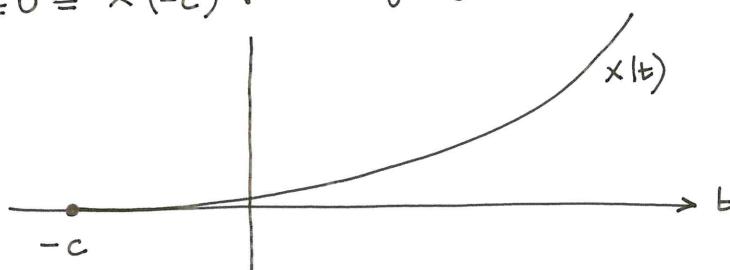
En el dominio  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  consideramos el problema de Cauchy

$\dot{x} = x^{1/3}$ ,  $x(0) = 0$   
 que admite la solución trivial  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos a ver que  
 hay otras muchas soluciones. Para ello integramos la ecuación  
 por el método de separación de variables,

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} \rightarrow \int \frac{dx}{x^{1/3}} = \int dt, \quad \frac{3}{2} x^{2/3} = t + C,$$

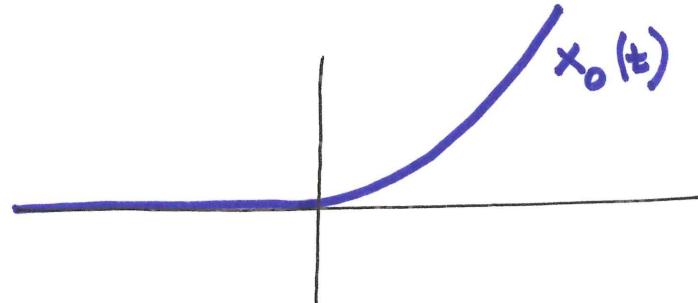
$$x = \pm \left[ \frac{2}{3} (t+C) \right]^{3/2}$$

La función  $x(t) = \left[ \frac{2}{3} (t+C) \right]^{3/2}$  está bien definida en  $t \geq -C$ .  
 Además es de clase  $C^1$  en  $[-c, \infty]$  y cumple  $\dot{x}(t) = x(t)^{1/3}$ ,  
 $x(-c) = 0 = \dot{x}(-c)$ . Su gráfica tiene la forma

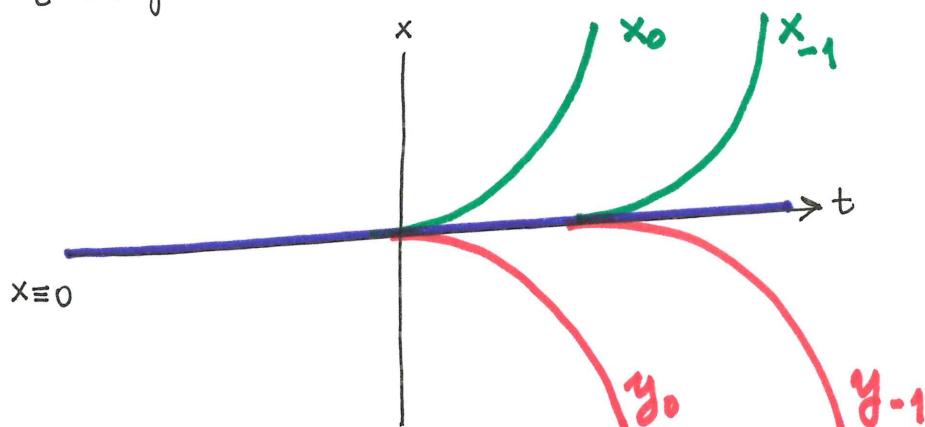


Podemos "pegar" esta solución con la  $x=0$  para obtener soluciones de la ecuación definidas en todo  $\mathbb{R}$ ,

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -c \\ \left[\frac{2}{3}|t+c|\right]^{3/2}, & t > -c \end{cases}$$



También son soluciones las funciones  $y_c(t) = -x_c(t)$ . Todas las funciones  $x_c(t), y_c(t)$  con  $c \leq 0$  son soluciones del problema de Cauchy



Este ejemplo resulta sorprendente si tenemos en mente el movimiento de una partícula en un fluido. Si situamos la partícula en una posición inicial  $x_0$  en un tiempo  $t_0$ , debería haber un único movimiento como respuesta. Por otra parte el campo  $X(t, x) = x^{1/3}$  es continuo pero no es  $C^1$ . A continuación veremos que la intuición física está más en consonancia con lo que le ocurre a los campos con más regularidad.

Nota Al resolver la ecuación por el método de variables separadas hemos procedido de manera formal, sin preocuparnos mucho del rigor. Esto no es problema siempre que comprobemos que la función obtenida  $x_c(t)$  o  $y_c(t)$  es una solución.

## Unicidad de solución

El problema  $\dot{x} = x, x(0) = 1$  tiene como única solución la función exponencial  $x(t) = e^t$ . Sin embargo, podríamos decir que hay muchas soluciones sin más que cambiar el intervalo de definición  $x_1(t) = e^t, t \in \mathbb{R}, x_2(t) = e^t, t \in [-7, 4], x_3(t) = e^t, t \in [-\infty, 1] \dots$

$x_1(t) = e^t, t \in \mathbb{R}, x_2(t) = e^t, t \in ]-7, 4[, x_3(t) = e^t, t \in ]-\infty, 1]$  ...

Para evitar esta ambigüedad hacemos una definición formal.

Definición Diremos que hay unicidad para el problema  $\dot{x} = X(t, x), x(t_0) = x_0$  si se cumple  $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in I_1 \cap I_2$  para cualesquiera  $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i=1, 2$ , que sean soluciones.

Antes hemos visto un ejemplo en el que falla la unicidad. Ahora vamos a probar que hay unicidad cuando el campo es regular.

Teorema Supongamos que existe la derivada parcial  $\frac{\partial X}{\partial x}(t, x)$  en todos los puntos  $(t, x) \in D$ . Además, la función

$$(t, x) \in D \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

es continua. Entonces hay unicidad para el problema de Cauchy con cualquier condición inicial  $(t_0, x_0) \in D$ .

Nota A partir de ahora  $\mathbb{R}^{d \times d}$  es el espacio de las matrices cuadradas de dimensión  $d$ . El campo  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  se supone siempre continuo.

Ejemplos ①  $\dot{x}_1 = t^{1/3}x_1 + x_2^2, \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2, D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} t^{1/3} & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como las coordenadas de esta matriz son continuas, hay unicidad para cualquier condición inicial.

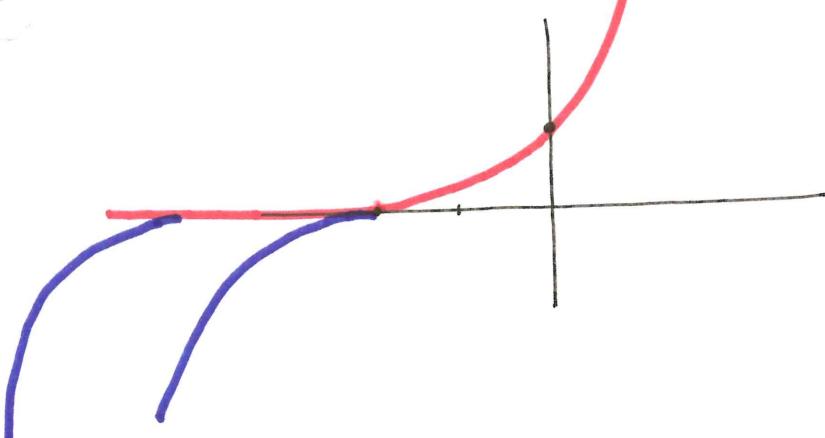
(2)  $\dot{x} = x^{1/3}$ . El teorema no es aplicable en  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  pero si lo es en  $D_+ = \mathbb{R} \times ]0, \infty[$ ,  $D_- = \mathbb{R} \times ]-\infty, 0[$ . Las soluciones de  $\dot{x} = x^{1/3}$ ,  $x(t_0) = x_0 > 0$  son únicas en tanto que no toquen el eje horizontal.

Probaremos el teorema a través de tres lemas. Para el primer lema usaremos una segunda definición (más débil) de unicidad.

Definición Diremos que hay unicidad local para el problema  $\dot{x} = X(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , si dadas dos soluciones  $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i=1, 2$ , existe un intervalo  $J \subset I_1 \cap I_2$ ,  $t_0 \in J$ , tal que  $x_1(t) = x_2(t)$ ,  $t \in J$ .

La diferencia con la definición previa es que no exigimos que haya unicidad en todo el intervalo de definición, solo en un ~~intervalo~~ entorno de  $t_0$ . Hay casos en los que se da la unicidad local pero no la global; un ejemplo típico es

$$\dot{x} = +\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 1$$



La solución se bifurca a partir de  $t = -2$

Lema 1 Si hay unicidad local para todo  $(t_0, x_0) \in D$ , entonces también hay unicidad global.

Dem Dadas  $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i=1, 2$ , soluciones de  $\dot{x} = X(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$

queremos probar que  $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I_1 \cap I_2$ .

Es suficiente probar esta identidad en  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$ , pues  $x_1, x_2$  son continuas.

Definimos el conjunto  $\mathcal{Y} = \left\{ t \in \overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2 : x_1(t) = x_2(t) \right\}$  y estudiamos sus propiedades topológicas como subconjunto de  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$ .

$\mathcal{Y} \neq \emptyset$  pues  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$  y por tanto  $t_0 \in \mathcal{Y}$

$\mathcal{Y}$  es cerrado en  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$  pues es el conjunto donde coinciden dos funciones continuas en  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$

$\mathcal{Y}$  es abierto en  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$ . Ahora usamos la hipótesis de unicidad

local. Dado  $t^* \in \mathcal{Y}$  probaremos que existe un entorno de  $t^*$  contenido en  $\mathcal{Y}$ . Definimos  $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$ , entonces  $(t^*, x^*) \in D$

y podemos considerar el problema (con soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ )  
 $\dot{x} = X(t, x)$ ,  $x(t^*) = x^*$ .

Como hay unicidad local  $x_1(t), x_2(t)$  han de coincidir en algún entorno de  $t^*$ .

El conjunto  $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$  es conexo y deducimos que  $\mathcal{Y} = \overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$ .

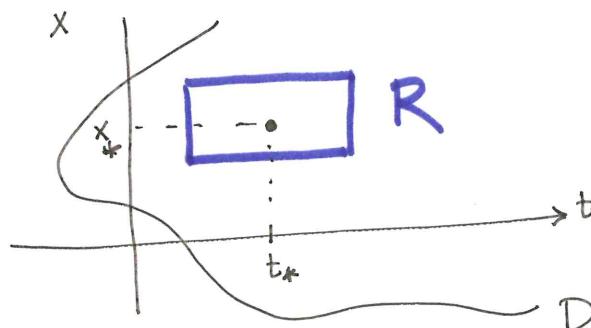
Lema 2 El campo  $X$  cumple la siguiente propiedad:

$\forall (t_*, x_*) \in D \quad \exists L > 0, \exists U = U(t_*, x_*)$  entorno en  $D$  /

$$\|X(t, x_1) - X(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \text{ si } (t, x_1), (t, x_2) \in U.$$

[Condición de Lipschitz local en la variable  $x$ ]

Dem Comenzamos con el caso  $d=1$ . Si se trata de una ecuación escalar podemos usar el teorema del valor medio. Dado  $(t_*, x_*) \in D$  escogemos un rectángulo cerrado, centrado en ese punto y contenido en  $D$



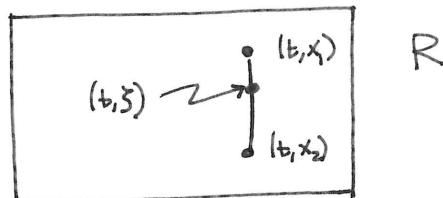
Como  $\mathbb{R}$  es compacto podemos definir  $L = \max_{(t,x) \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial X}{\partial x}(t,x) \right|$ .

Dados  $(t,x_1), (t,x_2) \in \mathbb{R}$ , aplicamos el Teorema del valor medio a  $X(t,\cdot)$ ,

$$X(t,x_1) - X(t,x_2) = \frac{\partial X}{\partial x}(t,\xi)(x_1 - x_2)$$

Como  $(t,\xi) \in \mathbb{R}$ ,

$$|X(t,x_1) - X(t,x_2)| \leq L |x_1 - x_2|.$$



Sería un error pensar que este método de prueba se puede extender a  $d \geq 2$ . La razón es simple: el teorema de valor medio no vale para funciones vectoriales

Ejemplo  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x) = (\cos x, \sin x)$

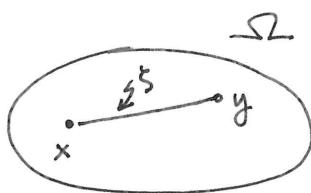
$$F(2\pi) - F(0) = 0$$

$$F'(x)(2\pi - 0) = (-\sin x, \cos x)|_{x=2\pi} \neq 0 \text{ para cualquier } \xi$$

El siguiente resultado para funciones vectoriales puede ser un buen sustituto del Teorema del valor medio:

$F: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in C^1$ ,  $\Omega$  convexo,  $x, y \in \Omega$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad L = \max \left\{ \|F'(x)\| : x \in [x,y] \right\}$$



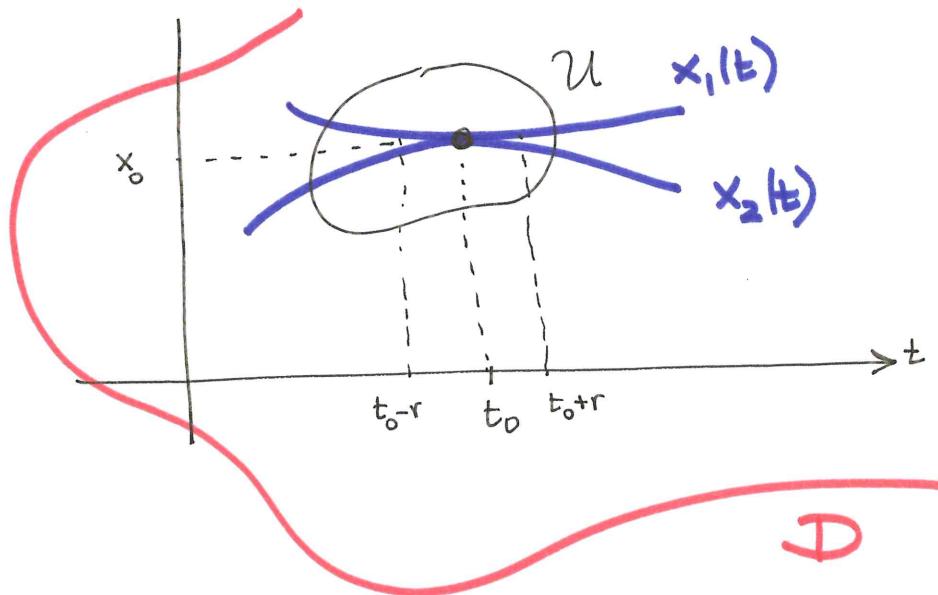
Observamos que  $F'(x)$  es una matriz  $n \times m$ ,  $\|F'(x)\|$  representa la norma matricial asociada a la norma vectorial  $\|x\|$ .

Ahora es fácil completar la prueba (ejercicio).

Lema 3 Para cada  $(t_0, x_0) \in D$  hay unicidad local.

Dem Aplicamos el lema 2 con  $(t_*, x_*) = (t_0, x_0)$  y encontramos  $\mathcal{U}$  y  $L$ .

Dadas dos soluciones  $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i=1,2$ , de  $\dot{x} = X(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , encontramos un intervalo  $J = [t_0 - r, t_0 + r]$ ,  $J \subset I_1 \cap I_2$  de manera que  $(t, x_i(t)) \in \mathcal{U}$  si  $t \in J$ ,  $i=1,2$



Podemos escoger  $r$  lo bastante pequeño para que se cumpla

$$rL < 1.$$

Sea  $m = \max_{t \in J} \|x_1(t) - x_2(t)\|$ . Exista  $\tau \in J$ :

$$\|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| = m.$$

De la ecuación integral,

$$x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x_i(s)) ds, \quad i=1,2,$$

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|X(s, x_1(s)) - X(s, x_2(s))\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \right| / \text{si } t \in J \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq L_m |t - t_0| \leq L_m r \quad \text{si } t \in J$$

Haciendo  $t = \tau$ ,

$$m = \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \leq (Lr)m$$

Hemos escogido  $r$  de manera que  $Lr < 1$ , la única posibilidad es  $m = 0$ . Entonces

$$0 = m = \max_{t \in J} \|x_1(t) - x_2(t)\| \Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in J$$