6. La ecuación lineal de coeficientes constantes

Dada una ec. lineal homogénea de orden ≥ 2, en la mayoría de los casos no es posible obtener un s. f. de manera explícita. Sí es posible si los coeficientes a_i son constantes.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

$$a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{R} \quad (\text{ctes}).$$

El operador diferencial asociado es

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x;$$

calculemos su efecto sobre la función $e^{\lambda t}$, donde λ es un parámetro,

$$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}$$

(Observa que $\frac{d^n}{dt^n}(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t}$, $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{\lambda t}) = \lambda^{n-1}e^{\lambda t}, \dots$)

Definimos el polinomio en la variable λ,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \longleftarrow \text{polinomio característico}$$

Dada λ^* raíz de $p(\lambda)$, $p(\lambda^*) = 0$,

$$L[e^{\lambda^* t}] = p(\lambda^*)e^{\lambda^* t} = 0 \Longrightarrow e^{\lambda^* t} \text{ solución}$$

<u>Ejemplo 1</u> $x'' - 3x' + 2x = 0$

Polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

e^t, e^{2t} sols. Además $W(e^t, e^{2t}) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t} \neq 0$

y por tanto e^t, e^{2t} s.f.

En general, si el polinomio característico tiene n raíces reales y distintas $\lambda_1, \dots \lambda_n$, las funciones $e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_n t}$ formarán un s.f. (Se puede probar $W(e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_n t}) \neq 0$).

Aunque el polinomio p es real, sus raíces pueden no serlo. En ese caso aparecen a pares

$\lambda_* = a + ib$, $b \neq 0$ raíz $\Longrightarrow$ $\overline{\lambda}_* = a - ib$ raíz

Consideramos la exponencial compleja $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_* t} \in \mathbb{C}$; se trata de una sol (a valores complejos) pues

$$L[e^{\lambda_* t}] = p(\lambda_*) e^{\lambda_* t} = 0$$

Una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x(t) = u(t) + i v(t)$ es sol de $L[x] = 0$ si y sólo si $L[u] + iL[v] = 0 \Longleftrightarrow u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sols

Por tanto, $e^{\lambda_* t} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)$ sol $\Longrightarrow$

$e^{at} \cos bt$, $e^{at} \operatorname{sen} bt$ sols. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

<u>Ejemplo 2</u> $x'' + x' + x = 0$

Pol. Característico $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$

Raíces $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Sols $e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $W \neq 0$ (compruébalo!)

$\Longrightarrow$ Sol General $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$

(Observa que en este caso obtenemos las mismas sols reales, salvo un signo, si partimos de una raíz, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, o de la otra, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Si algunas de las raíces de $p(\lambda)$ son multiples entonces ~~hay menos raíces que~~ no es posible conseguir un s.f. por los procedimientos anteriores. Veamos qué hacer en este caso.

Partimos de la fórmula

$$L[e^{\lambda t}] = p(\lambda)e^{\lambda t}$$

y pensamos que $e^{\lambda t}$ es una función de dos variables

$$(t,\lambda) \longmapsto e^{\lambda t}$$

Las derivadas respecto a t se convierten en derivadas parciales

$$L = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_{n-1}\frac{\partial^n}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_1\frac{\partial}{\partial t} + a_0 .$$

Recordemos que las derivadas cruzadas conmutan,

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t\partial\lambda} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda}L = L\frac{\partial}{\partial\lambda}$$

Derivando respecto a λ en $L[e^{\lambda t}] = p(\lambda)e^{\lambda t}$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[e^{\lambda t}] = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right) \Longrightarrow$$

$$L[te^{\lambda t}] = p'(\lambda)e^{\lambda t} + p(\lambda)e^{\lambda t}t$$

Con este truco hemos conseguido una fórmula sobre cómo actuá L en $te^{\lambda t}$,

$$L[te^{\lambda t}] = \left(p'(\lambda) + p(\lambda)t\right)e^{\lambda t}$$

Podemos repetir el truco derivando más veces respecto a λ para obtener

$$L[t^k e^{\lambda t}] = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}L[e^{\lambda t}] = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right)$$

$$= \sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}p^{(h)}(\lambda)\,t^{k-h}e^{\lambda t}$$

Aquí hemos usado la fórmula de Leibniz sobre las derivadas sucesivas de un producto

$$f, g \in C^n, \qquad (f\cdot g)^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k)} g^{n-k)}$$

Ejercicio [(Para $n=1$ observa que no es más que la fórmula para derivar un producto, demuéstralo tú por inducción para $n \geq 2$)

Sea λ_* una raíz multiple de $p(\lambda)$; esto quiere decir que λ_* es un cero de p y de algunas de sus derivadas:

$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = 0, \; p''(\lambda_*) \neq 0$ Raíz Doble

$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = p''(\lambda_*) = 0, \; p'''(\lambda_*) \neq 0$ Raíz triple

---

λ_* raíz doble $\Rightarrow$ $e^{\lambda_* t}, \; t e^{\lambda_* t}$ sols

λ_* raíz triple $\Rightarrow$ $e^{\lambda_* t}, \; t e^{\lambda_* t}, \; t^2 e^{\lambda_* t}$ sols

---

Ejemplo 3 $\quad x'' + 2x' + x = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$, -1 Raíz doble

$e^{-t}, \; t e^{-t}$ sols, $\quad W(e^{-t}, t e^{-t}) \neq 0$, s. f.

Resumimos la información obtenida

Teorema Sea λ_* una raíz de $p(\lambda)$ con

$$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = \cdots = p^{k-1)}(\lambda_*) = 0, \quad p^{k)}(\lambda_*) \neq 0$$

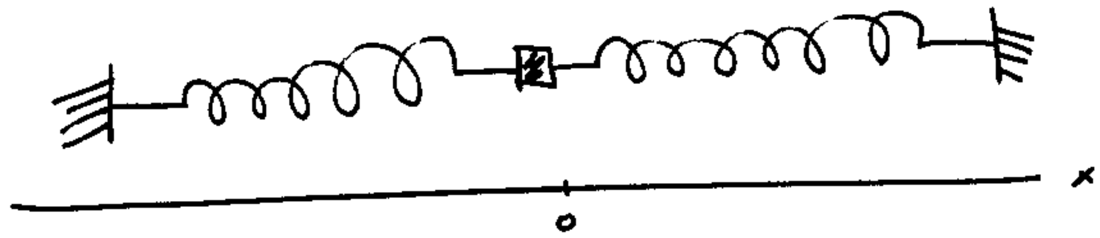
- Si $\lambda_* \in \mathbb{R}$; $e^{\lambda_* t}, \; t e^{\lambda_* t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda_* t}$ son sols
- Si $\lambda_* \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\lambda_* = a + ib$; $e^{at}\cos bt, \; e^{at}\operatorname{sen} bt,$ $t e^{at}\cos bt, \; t e^{at}\operatorname{sen} bt, \ldots, t^{k-1} e^{at}\cos bt, \; t^{k-1} e^{at}\operatorname{sen} bt$ son sols.

Además, el conjunto de sols obtenidas por este procedimiento forman un s. f.

(Observa que sólo hemos dado una demostración parcial; faltaría probar que todas estas sols son l. i.)

El oscilador amortiguado

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad c>0,\ \omega>0$$



muelle con rozamiento (c)

$p(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + \omega^2$, $\lambda_{\pm} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4\omega^2}}{2}$

i) $c^2 > 4\omega^2$ (Rozamiento fuerte), $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$

$e^{\lambda_+ t}, e^{\lambda_- t}$ s.f.

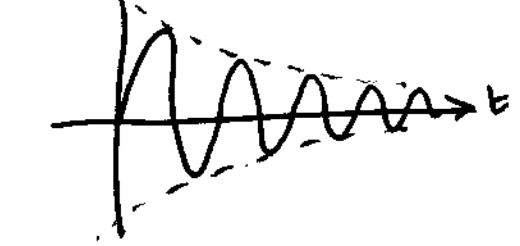
λ_+ y λ_- son negativas (la partícula tiende al equilibrio muy rápido, sin oscilar)

ii) $c^2 = 4\omega^2$ (Caso crítico), $\lambda_+ = \lambda_- = -\frac{c}{2}$ Raíz Doble

$e^{-\frac{c}{2}t}, te^{-\frac{c}{2}t}$ s. f. (comportamiento similar al de i)

iii) $c^2 < 4\omega^2$ (Rozamiento débil)

$e^{-\frac{c}{2}t}\cos\dfrac{\sqrt{4\omega^2-c^2}}{2}t,\ e^{-\frac{c}{2}t}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{4\omega^2-c^2}}{2}t$ ondas amortiguadas



(la partícula tiende al equilibrio de manera oscilante)

Hay ecuaciones lin homogéneas de coeficientes variable que, mediante un cambio de variable, se transforman en una ecuación de coeficientes constantes. Veamos el caso más importante

Ecuación Lineal de Euler

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = 0$$

$a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. $x''' - \frac{1}{t^3} x = 0 \rightsquigarrow t^3 x''' - x = 0, \quad a_2 = a_1 = 0, \; a_0 = -1$

2. $t x'' + x' + \frac{1}{t} x = 0 \rightsquigarrow t^2 x'' + t x' + x = 0, \quad a_1 = a_0 = 1$

3. $t^2 x'' + x' + t x = 0$ **No** es de Euler

Al escribir la ecuación en forma normal aparece una singularidad en $t=0$. Se puede trabajar en el intervalo $(-\infty, 0)$ o en $(0, \infty)$. A partir de ahora lo haremos en

$$I = (0, \infty)$$

(Ejercicio: haz todos los desarrollos en el otro caso).

Por sencillez trabajaremos con la ecuación de 2° orden,

$$t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = 0$$

Hacemos un cambio de la variable independiente

$$t = e^s \qquad (s = \ln t)$$

y mantenemos la incógnita que pasa de $x = x(t)$ a $x = x(s)$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{1}{t} - \frac{dx}{ds}\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} + a_1\frac{dx}{ds} + a_0 x = 0 \qquad \text{(Ec. de Coeficientes Ctes)}$$

Ejemplo $\quad t^2x'' + tx' + x = 0, \; t > 0$

$$t = e^s, \quad \frac{d^2x}{ds^2} + x = 0, \quad x(s) = c_1\cos s + c_2\operatorname{sen} s$$

Deshaciendo el cambio,

$$\boxed{x(t) = c_1\cos(\ln t) + c_2\operatorname{sen}(\ln t); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Nota $\quad$ Otro enfoque sobre el cambio de variable

Buscamos una sol de

$\boxed{\text{Euler}}$ $\qquad x : (0,\infty) \to \mathbb{R},\; t \mapsto x(t)$

Usamos las aplicaciones biyectivas y derivables

$$E : \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad s \mapsto e^s$$

$$L : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \ln t$$

que son inversas.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{E} (0,\infty) \xrightarrow{x} \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto e^s = t \longmapsto x(t)$$

La composición de x y E

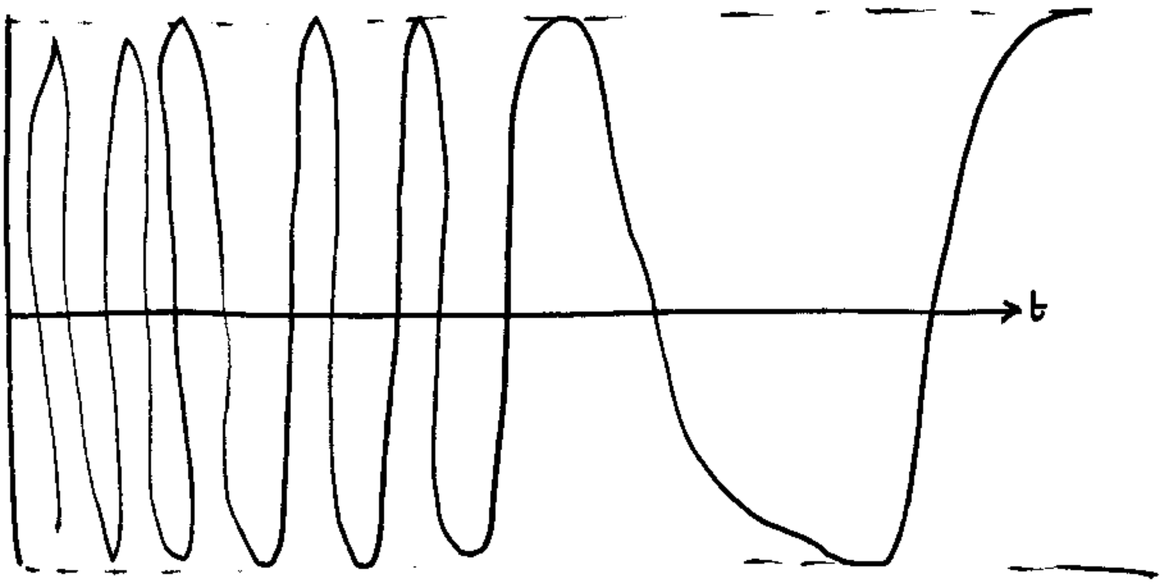
$\tilde{x} = x \circ E$ cumple una

$\boxed{\text{Ec. de Coef. Ctes}}$

Una vez conocida $\tilde{x}$,

$$x = \tilde{x}\circ E^{-1} = \tilde{x}\circ L$$

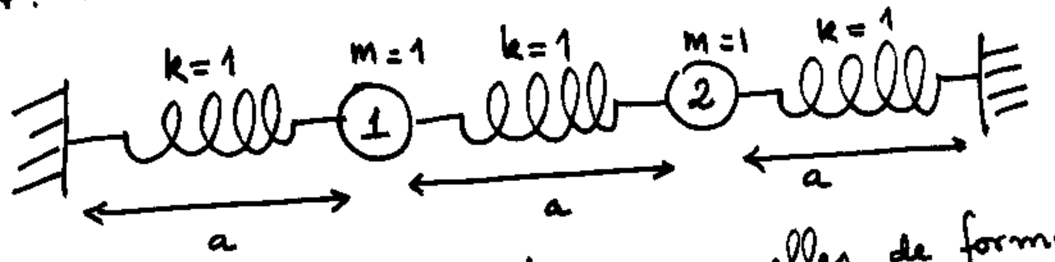
Otra Nota El comportamiento de las sols de una ec. de Euler en la singularidad puede ser muy variable. Observa que en $t=0$ no se aplica el Tª de existencia y unicidad. Por ejemplo, la función $\text{sen}(\ln t)$ tiene una gráfica



La onda se dilata hacia ∞ y se contrae hacia 0 (un seno en escala logarítmica)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

En ocasiones los sistemas de ecuaciones lineales (piensa en su definición) se pueden reducir a ecuaciones de orden superior. Veamos un ejemplo



Dos masas iguales están unidas por muelles de forma que, en la posición de equilibrio, todas las distancias son a. Sean x_1, x_2 las desviaciones de 1, 2 respecto al equilibrio.

Se cumple

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Derivando la 1ª dos veces (¿Por qué se puede hacer?),

$x_1^{(IV)} + 2\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, de la 2ª,

$x_1^{(IV)} + 2\ddot{x}_1 - x_1 + 2x_2 = 0$, de la 1ª,

$x_1^{(IV)} + 2\ddot{x}_1 - x_1 + 2\ddot{x}_1 + 4x_1 = 0$ y llegamos a

$$x_1^{(IV)} + 4\ddot{x}_1 + 3x_1 = 0$$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3$, Raíces $\pm i$, $\pm\sqrt{3}\,i$

$$x_1(t) = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 \cos\sqrt{3}\,t + k_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,t \;;\; k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$$

(Nos han aparecido 4 parámetros: 2 ec. de 2º orden)

Ahora x_2 se obtiene de la 1ª ec. (No pueden aparecer más parámetros!)

$$\begin{aligned} x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1 &= -k_1 \cos t - k_2 \operatorname{sen} t - 3k_3 \cos\sqrt{3}\,t - 3k_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,t \\ &\quad + 2k_1 \cos t + 2k_2 \operatorname{sen} t + 2k_3 \cos\sqrt{3}\,t + 2k_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,t \\ &= k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t - k_3 \cos\sqrt{3}\,t - k_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,t \end{aligned}$$

La Transformada de Laplace

Este párrafo se debe leer al inicio de la página 13

Imaginemos que hemos viajado en el tiempo (hacia el pasado) y que no disponemos de calculadoras pero sí de una tabla de logaritmos, entonces usaríamos los logaritmos para calcular más fácilmente. Por ejemplo: calcula

Comportamiento asintótico: pequeñas perturbaciones

La discusión anterior muestra que es relativamente fácil discutir el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación de coeficientes constantes. Dada una de estas ecuaciones

$$(*) \qquad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

consideramos la ecuación perturbada

$$(**) \qquad x^{(n)} + (a_{n-1}+\varepsilon_{n-1}(t))x^{(n-1)} + \dots + (a_1+\varepsilon_1(t))x' + (a_0+\varepsilon_0(t))x = 0$$

con $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n-1} \in C(0,\infty)$. ¿Podemos asegurar que las sols de $(**)$ tienen el mismo comportamiento asintótico que las de $(*)$ si los ε_i son pequeños?

La respuesta es compleja y depende de lo que entendamos por perturbación pequeña. Vamos a analizar esta cuestión en un par de casos

La ecuación de primer orden

$$x' = (\lambda + \varepsilon(t))x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in C(0,\infty)$$

Suponemos

$$\int_1^\infty |\varepsilon(t)|\,dt < \infty.$$

Entonces existe una solución de la forma

$$x(t) = e^{\lambda t}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

Notación $o(1)$ representa alguna función $\varphi(t)$ definida en $(0,\infty)$ y que cumple $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$.

Es fácil probar esta fórmula porque las soluciones son de la forma

$$x(t) = c\, e^{\int_1^t (\lambda+\varepsilon(s))ds} = c_1 e^{\lambda t} e^{\int_1^t \varepsilon(s)ds}$$

Como $e^{\int_1^t \varepsilon(s)ds} \longrightarrow e^{\int_1^\infty \varepsilon(s)ds}$ si $t\to\infty$,

podemos escribir $e^{\int_1^t \varepsilon(s)ds} = e^{\int_1^\infty \varepsilon(s)ds} + o(1)$.

Por último se ajusta la constante.

El oscilador perturbado

$$x'' + (\omega^2 + \varepsilon(t))x = 0$$

$\omega>0$, $\varepsilon\in C(0,\infty)$, $\int_1^\infty |\varepsilon(t)|dt<\infty$.

Existe un sistema fundamental ϕ_1, ϕ_2 de la forma

$$\phi_1(t) = \cos\omega t + o(1),\ \phi_2(t) = \operatorname{sen}\omega t + o(1),\quad t\to+\infty.$$

Este resultado no tiene una demostración tan elemental como la anterior. Vamos a aprovecharlo para estudiar una ecuación.

Ejemplo: ecuación de Bessel

Partimos de la célebre ecuación de Bessel

$$t^2x'' + tx' + (t^2-p^2)x = 0,\quad t\in(0,\infty)$$

donde $p \geq 0$ es un parámetro.

No es un oscilador perturbado pero hacemos el cambio

$$x = t^{-1/2} y$$

y se transforma en

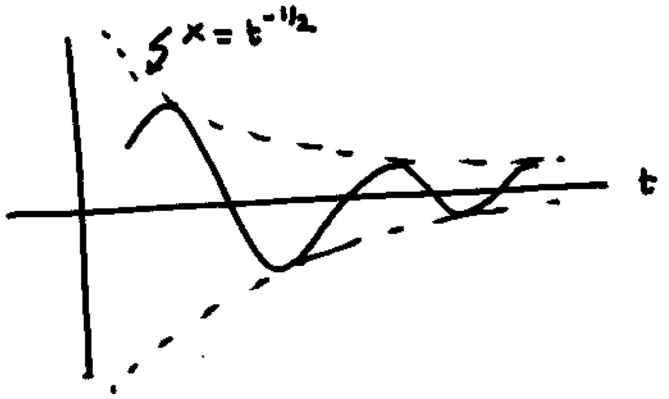
$$y'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - p^2}{t^2}\right) y = 0.$$

La perturbación $\varepsilon(t) = \dfrac{\frac{1}{4} - p^2}{t^2}$ es continua en $(0,\infty)$ y cumple $\displaystyle\int_1^\infty |\varepsilon(t)|\,dt < \infty$. Por tanto hay un s. f. de la forma

$$y_1(t) = \cos t + o(1), \quad y_2(t) = \operatorname{sen} t + o(1)$$

y, deshaciendo el cambio,

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\cos t + o(1)\right), \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\operatorname{sen} t + o(1)\right), \quad t \to +\infty.$$



Ejercicio Prueba que las sols de la ec de Bessel tienen infinitos ceros:

a) usando las fórmulas asintóticas anteriores

b) usando la teoría de comparación

$x=\sqrt[5]{37}$. Tomamos logaritmos, $\ln x = \frac{1}{5}\ln 37$. Consultamos el logaritmo de 37, dividimos por 5, y ya conocemos $\ln x$. Ahora, mirando las tablas del revés (antilogaritmo, exponencial...), encontramos x. La gran virtud del logaritmo es que simplifica las operaciones de la aritmética

$$\ln(\text{producto}) = \text{suma}(\ln), \quad \ln\left(\text{—}\right) = -\ln$$

$$\ln \sqrt[n]{} = \frac{1}{n}\ln \dots$$

La transformada de Laplace es una ley que lleva funciones en funciones (un operador) y que simplifica operaciones del análisis (derivadas $\longrightarrow$ productos por polinomios ...)

En este momento se entregarán las tablas de transformadas de Laplace!

Así vamos a resolver una ec. lineal completa de coeficientes constantes

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Ec. Dif}} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, dotted] & \boxed{\text{Ec. Algebraica}} \arrow[d, "\substack{\text{Resolución}\\ \text{(por álgebra)}}"] \\
\boxed{x \text{ sol}} & \boxed{\mathcal{L}x} \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

<u>Definición</u> $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t\mapsto f(t)$. Se define su transformada de Laplace $\mathcal{L}f = F$, $F=F(s)$,

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad \longleftarrow \text{Integral dependiente de un parámetro}$$

<u>Ejemplo</u> $f\equiv 1$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s>0$$

(observación importante: F no está definida para todo s, sino para s suficientemente grande)

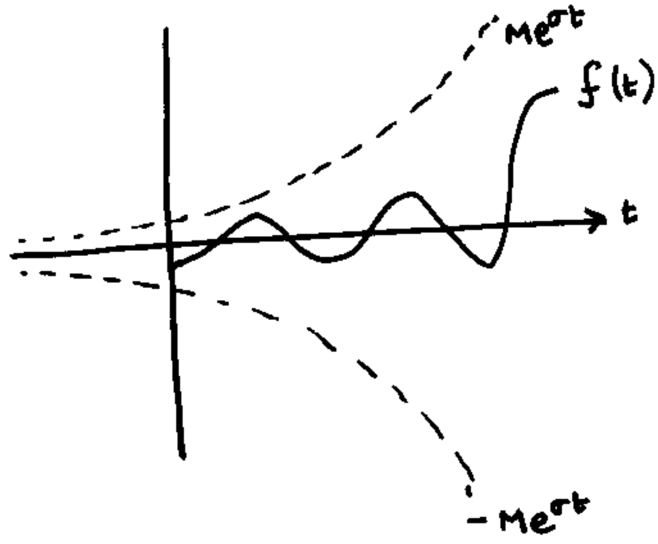
Vamos a introducir una clase de funciones para las que la transformada de Laplace está bien definida.

Sea $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ~~continua~~, $t \mapsto f(t)$ decimos que f está en la clase Λ, $f \in \Lambda$, si cumple

i) f es continua en $[0,\infty)$

ii) f tiene a lo sumo crecimiento exponencial; es decir, existen $M \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \quad \forall t \geq 0$$



Ejemplos de funciones en Λ:

polinomios, $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ $\left(\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{e^t} = 0 \right)$

trigonométricas, $f(t) = \cos \omega t$ $(M = 1, \sigma = 0)$

exponenciales, $f(t) = e^{\sigma t}$

Sumas y productos, $f, g \in \Lambda \Rightarrow f+g, f \cdot g \in \Lambda$

(Ejercicio: demuestralo) $t^3 e^t \in \Lambda$

Un ejemplo de función que no está en Λ:

$f(t) = e^{t^2}$ (La composición de funciones no es cerrada en Λ, $g(t) = e^t$, $h(t) = t^2$, $f = g \circ h \notin \Lambda$, $g, h \in \Lambda$)

Vamos a probar que la transformada de Laplace $\mathcal{L}f$ está bien definida si $f\in\Lambda$.

<u>Lema</u> Sea $f\in\Lambda$. Entonces existe $s_f\in\mathbb{R}$ tal que $F(s)=\mathcal{L}f(s)$ está bien definida si $s>s_f$.

<u>Demostración</u> $|\mathcal{L}f(s)|\leq\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt\leq\int_0^\infty e^{-st}Me^{\sigma t}dt$

$$= M\left[\frac{e^{(\sigma-s)t}}{\sigma-s}\right]_{t=0}^{t=\infty}=\frac{M}{s-\sigma}<\infty\,,\quad \text{si } s>\sigma$$

Una característica peculiar de la transformada de Laplace es el intervalo de definición de $F(s)$; varía con f pero siempre es del tipo $(s_f,+\infty)$. Podemos ver $\mathcal{L}$ como un <u>operador</u> (transforma funciones en funciones)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}:\ f\in\Lambda &\longmapsto F=F(s)\quad\text{definida en } (s_f,\infty)\\ f=f(t)&\end{aligned}$$

· La linealidad de la integral es heredada por $\mathcal{L}$:

$f_1,f_2\in\Lambda \Longrightarrow \mathcal{L}(f_1+f_2)=\mathcal{L}f_1+\mathcal{L}f_2$

(esta igualdad hay que entenderla para $s>s_{f_1},s_{f_2}$)

$f\in\Lambda,\ c\in\mathbb{R}\Longrightarrow\mathcal{L}(cf)=c\mathcal{L}f$

El producto no se conserva por $\mathcal{L}$; es ~~[illegible]~~ esperable pues las integrales no lo conservan.

<u>Nota</u> Nosotros hemos considerado una clase Λ sobre la que definir $\mathcal{L}$ que sea útil para nuestros propósitos y cómoda. La transformada de Laplace se puede también definir para funciones discontinuas, lo importante es que la integral

$$\int_0^\infty|f(t)|e^{-st}dt$$

sea finita.

Transformada de Laplace y derivadas

Sea $f \in C^1[0,\infty)$ y supongamos que f y f' estén en Λ, (*)

$$\mathcal{L}f'(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-st} & du = -se^{-st}dt \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{array} \right\}$$

$$= \left[f(t)e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\mathcal{L}f(s)}$$

Estudiamos el corchete,

si $s > \sigma$, $|f(t)|\, e^{-st} \leq M e^{(\sigma - s)t} \to 0$, $t \to +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-st} = 0$, así

$\mathcal{L}f'(s) = -f(0) + s\,\mathcal{L}f(s)$ si s suficientemente grande.

Esta fórmula es muy importante, dice que la transformada de la derivada se obtiene por operaciones algebraicas: multiplicar por s y restar $f(0)$.

Además explica la elección de la función exponencial en la definición de $\mathcal{L}$; en principio se podrían haber definido otras transformadas

$$\mathcal{T}f(s) = \int_0^\infty \operatorname{sen}(st)\, f(t)\,dt$$

o, más general,

$$\mathcal{T}f(s) = \int_0^\infty \phi(st)\, f(t)\,dt$$

Para poder ligar $\mathcal{T}f$ y $\mathcal{T}f'$ necesitamos $\phi' = \lambda \phi$

(*) $f(t) = \operatorname{sen}(e^{t^2}) \in \Lambda$; $f'(t) \notin \Lambda$

Podemos ahora obtener fórmulas para las derivadas sucesivas

$\mathcal{L}f''(s)$ ∘ ∘ ∘ f'' es la derivada de f' =

$$-f'(0) + s\,\mathcal{L}f'(s) = -f'(0) + s\left[-f(0) + s\,\mathcal{L}f(s)\right]$$

$$= -f'(0) - s\,f(0) + s^2\mathcal{L}f(s)$$

Teorema Sea $f \in C^n[0,\infty)$, $f, f', \dots f^{n)} \in \Lambda$. Entonces

$$\mathcal{L}f^{n)}(s) = -f^{n-1)}(0) - s\,f^{n-2)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n\mathcal{L}f(s),$$

si s es suficientemente grande.

Veamos en un ejemplo concreto el programa que diseñamos

Ejemplo
$$\left.\begin{array}{l} x'' + 4x' + 6x = 1 + e^{-t} \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Aplicamos $\mathcal{L}$ a la ecuación y el hecho de que $\mathcal{L}$ es lineal

$$\mathcal{L}x'' + 4\,\mathcal{L}x' + 6\mathcal{L}x = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Del Teorema anterior, (y de las tablas)

Ecuación Algebraica
$$\left\{\begin{array}{l} -x'(0) - s\,x(0) + s^2\mathcal{L}x + 4\left(-x(0) + s\,\mathcal{L}x\right) + 6\mathcal{L}x = \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \end{array}\right.$$

$$(s^2 + 4s + 6)\,\mathcal{L}x = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)s}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}x = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}$$

¿Cómo obtenemos $x = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}\right)$?

La transformada inversa

Se puede probar:

Sean $f_1, f_2 \in \Lambda$ tales que $\mathcal{L}f_1(s) = \mathcal{L}f_2(s)$ para $s > s_0$. Entonces

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Observa el alcance exacto de este resultado: una función está completamente determinada por su transformada; además, es suficiente conocer $\mathcal{L}f(s)$ a partir de un s_0 que puede ser muy grande.

Ejemplo Sea $f \in \Lambda$ tal que $\mathcal{L}f(s) = \frac{7}{s}$ si $s > 7 \cdot 10^3$, entonces $f(t) = 7 \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Dada una función $F = F(s)$, la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}F$ será una función $f = f(t)$ tal que $\mathcal{L}f = F$. La transformada inversa no existe para cualquier $F(s)$ pero cuando existe es única. Ejemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} = 7$

Si miras la tabla "del revés" obtendrás muchas otras transformadas inversas (antitransformadas?)

La "linealidad" de $\mathcal{L}$ se traduce en una propiedad similar para $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s} + \frac{2}{s^2}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 7 + 2t^2$$

Continuación del ejemplo $\left.\begin{array}{l} x'' + 4x' + 6x = 1 + e^{-t} \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{array}\right\}$

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}\right)$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2+2}$$

$$A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{3},\ C=-\frac{1}{2},\ D=-\frac{5}{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

Una crítica al método: Cuando aplicamos $\mathcal{L}$ a la ec.

$$x'' + 4x' + 6x = 1+e^{-t},$$

es claro que $1+e^{-t}\in\Lambda$ pero, ¿cómo sabíamos que x, x' y x'' también estaban en Λ?

Se puede probar que si en una ec. de coeficientes ctes $L[x]=b(t)$ se cumple $b\in\Lambda$ entonces, para todas las sols, $x, x', \dots x^{(n)}\in\Lambda$

Pregunta: ¿Se puede aplicar transformada de Laplace para resolver $x''+2x'+x = e^{t^2}$? ¿Y para resolver

$$x''+tx = e^{t}\ ?$$

Finalizamos resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 4x_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}x_1' &= 2\mathcal{L}x_1 + \mathcal{L}x_2 \\ \mathcal{L}x_2' &= -\mathcal{L}x_1 + 4\mathcal{L}x_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} -c_1 + s\mathcal{L}x_1 &= 2\mathcal{L}x_1 + \mathcal{L}x_2 \\ -c_2 + s\mathcal{L}x_2 &= -\mathcal{L}x_1 + 4\mathcal{L}x_2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (s-2)\mathcal{L}x_1 - \mathcal{L}x_2 &= c_1 \\ \mathcal{L}x_1 + (s-4)\mathcal{L}x_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Por la Regla de Cramer}$$

$$\mathcal{L}x_1 = \frac{1}{(s-3)^2} \begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & s-4 \end{vmatrix} = \frac{c_1(s-4)+c_2}{(s-3)^2}$$

$$\mathcal{L}x_2 = \frac{1}{(s-3)^2} \begin{vmatrix} s-2 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{c_2(s-2)-c_1}{(s-3)^2}$$

$$x_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c_1}{(s-3)} - \frac{c_1-c_2}{(s-3)^2} \right\}$$

$$= c_1 e^{3t} + (c_2-c_1)\, t e^{3t}$$

$$x_2 = c_2 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + (c_2-c_1)\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \right\}$$

$$= c_2 e^{3t} + (c_2-c_1)\, t e^{3t}$$