5. La ecuación lineal

Es de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)\,x = b(t)$$

donde $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas (I intervalo abierto)

Ejemplos

1) $x'' + x = 0$

2) $x'' + t x' + x = \text{sen} t$

3) $x' + t x = \text{sen} t$

4) $x''' + x' = 1$

5) $x'' + x = t^2$ Sí, $x'' + x^2 = t$ No

La ecuación se dice homogénea si $b \equiv 0$ (ejemplo 1) y completa en otro caso (ejs 2, 3, 4).

Vamos a asociar a cada ecuación lineal un operador diferencial

$L : C^n(I) \to C(I)$, $L[x] = x^{n)} + a_{n-1}(t)\,x^{n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x$

Ejemplo 3 $\quad L[x] = x' + tx$, $\quad L : C'(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$

$L[t^2] = 2t + t^3$, $\quad L[e^t] = e^t(1+t)$

La ecuación se puede ahora escribir en la forma abreviada

$$L[x] = b(t)$$

El operador L es lineal, entre los e.v. de funciones $C^n(I)$ y $C(I)$,

$L[x+y] = L[x] + L[y]$, $\quad L[cy] = cy$, $\quad c \in \mathbb{R}$, $x, y \in C^n(I)$

(Se cumple $L[x \cdot y] = L[x] \cdot L[y]$?)

Podemos ver la ec. dif. lineal como un análogo de los sistemas lineales algebraicos

$$Lx = b$$

matriz $n\times n$ — incógnita en $\mathbb{R}^n$ — vector en $\mathbb{R}^n$

$$L[x] = b(t)$$

operador diferencial — incógnita en $C^n(I)$ — funcion en $C(I)$

Vamos a dar (sin demostración) un resultado que garantiza la existencia de solución para unas condiciones iniciales dadas.

__Teorema de Existencia y Unicidad__ Sean $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ números dados y $t_0 \in I$. Entonces existe una única función $x \in C^n(I)$ que cumple

$$L[x] = b(t),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \dots,\ x^{n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

__Ejemplos__ 1) $x' + tx = \operatorname{sen} t$, $x(0) = x_0$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{s^2}{2}} \operatorname{sen} s \, ds$$

(Ejercicio: compruébalo)

2) $x'' + x = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$

$$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t$$

3) $t x'' + x = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$

Al escribir la ec. en forma normal nos queda $x'' + \frac{1}{t} x = 0$. Podríamos trabajar en $(-\infty, 0)$ o en $(0, \infty)$; escogemos el segundo pues allí vive $t_0 = 1$. No podemos dar una fórmula explícita pero el Tª nos dice que hay sol. definida en $(0, \infty)$.

La ecuación homogénea $\quad L[x]=0$

Observación importante : El conjunto de soluciones forma un espacio vectorial

$Z_1 = \{$ soluciones de $L[x]=0\}$

$x, y \in Z_1 \Rightarrow x+y \in Z_1$

$x \in Z_1,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx \in Z_1$

Esto se puede ver por comprobación inmediata pero es más divertido recordar el Algebra Lineal:

$$\left.\begin{array}{l} L : V_1 \longrightarrow V_2 \ \text{ lineal} \\ V_1, V_2 \text{ esp. vect.} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{Ker} L = \{x \in V_1 : L(x) = 0\} \\ \text{subespacio de } V_1 \end{array}$$

$Z_1 = \operatorname{Ker} L$ subespacio de $C^n(I)$

Recordamos que la dimensión de Z_1 es el número de vectores (en este caso funciones) que componen una base

$\dim Z_1 = n$

Para probar este hecho vamos a establecer un isomorfismo entre Z_1 y $\mathbb{R}^n$. Recordatorio:

$L : V_1 \to V_2$ lineal y biyectiva $\equiv$ isomorfismo

Dos espacios vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión

Sea $t_0 \in I$ fijo. Definimos

$$\Phi_{t_0} : Z_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Φ_{t_0} hace corresponder a cada solución su condición inicial esto

$\left.\begin{array}{l}\Phi_{t_0} \text{ es lineal (Compruébalo)} \\ \Phi_{t_0} \text{ es inyectiva (Unicidad)} \\ \Phi_{t_0} \text{ es sobreyectiva (Existencia)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi_{t_0}$ isomorfismo

<u>Ejemplos</u>

1) $x'' + x = 0$

$Z_1 = \{ c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \ / \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

Fijamos $t_0 = 0$

$\Phi_0 : x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Fijamos $t_0 = \frac{\pi}{2}$

$\Phi_{\frac{\pi}{2}} : x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \longmapsto \begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{2}) \\ x'(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}$

Podemos usar cualquier t_0 de I, cada uno producirá un Φ_{t_0} diferente pero todos serán isomorfismos de Z_1 en $\mathbb{R}^n$.

2) $x'' - x = 0$

$Z_1 = \{ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \ / \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

$t_0 = 0$

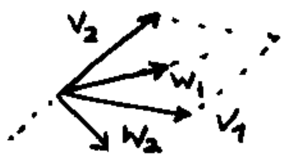
$\Phi_{t_0} : x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$

Usemos otra base para describir Z_1

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

<u>Ejercicio</u> $\{v_1, v_2\}$ base de $V \Longrightarrow \{w_1, w_2\}$ base de V

$w_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2, \quad w_2 = \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2$



Ahora Φ_0 (la misma aplicación) se expresa

$$\Phi_0 : x(t) = k_1 \operatorname{ch} t + k_2 \operatorname{sh} t \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

3) $x'' + t x' = 0$

$t_0 = 0$

$$x(t) = c_1 + c_2 \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Una forma cómoda de describir un espacio vectorial consiste en presentar una base. Para describir las soluciones de Z_1 nos bastará conocer n soluciones linealmente independientes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, entonces una sol cualquiera se expresa como

$$x(t) = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t); \quad c_1, \dots c_n \text{ constantes}$$

Independencia Lineal en $C^n(I)$. Wronskiano

Sean $\varphi_1, \dots \varphi_p$ funciones en $C^n(I)$. Se dice que son l. i. si de una expresión $c_1 \varphi_1 + \dots + c_p \varphi_p = 0$ se sigue que $c_1 = \dots = c_p = 0$.

Esta es la definición en cualquier espacio vectorial pero conviene hacer dos observaciones:

- $c_1, \dots c_p$ son constantes
- La identidad $c_1 \varphi_1 + \dots + c_p \varphi_p = 0$ es en el espacio de funciones y significa

$$c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_p \varphi_p(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Ejemplos

① $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2, \ldots, \varphi_p(t) = t^p$ son l.i. en cualquier intervalo I

Veamoslo para $1, t$ y t^2

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = 0 \quad \forall t \in I \quad , \text{ Derivando,}$$

$$c_1 + 2c_2 t = 0 \quad \forall t \in I \quad , \text{ Derivando de nuevo}$$

$$2c_2 = 0$$

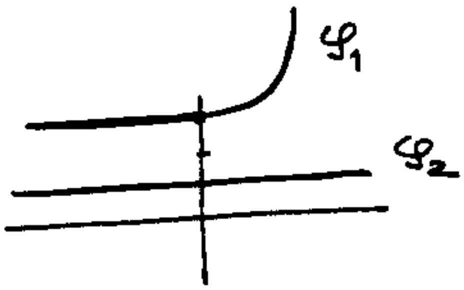
Resolvemos en escalera $c_2 = 0 \to c_1 = 0 \to c_0 = 0$

¿Cómo lo harías hasta p? Observa que esto demuestra que $C^n(I)$ tiene infinitas dimensiones

Una forma alternativa de mostrar independencia: dar a t valores concretos (3 para $1, t, t^2 \ldots$)

② $\varphi_1(t) = \operatorname{sen} t$, $\varphi_2(t) = \cos t$

③ $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = e^{-t}$



④ $$\varphi_1(t) = \begin{cases} 3 + t^3, & t \geq 0 \\ 3, & t < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = 1 \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$$

φ_1 y φ_2 son l.i. en $\mathbb{R}$ pero l. d. en $(-\infty, 0)$, $\varphi_1 = 3\varphi_2$

Esto demuestra que la noción de independencia lineal no sólo depende de las funciones sino también del intervalo I

Vamos ahora a extender la idea de derivar que hemos empleado en los ejemplos ①, ② y ③.

Sean $\varphi_1, \dots \varphi_n \in C^{n-1}(I)$, n funciones de clase n, con

$$c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \in I$$

Derivando

$$c_1 \varphi_1'(t) + \dots + c_n \varphi_n'(t) = 0$$

sucesivamente

$$c_1 \varphi_1''(t) + \dots + c_n \varphi_n''(t) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$c_1 \varphi_1^{n-1)}(t) + \dots + c_n \varphi_n^{n-1)}(t) = 0$$

Ahora tenemos n ecuaciones, pensamos que $c_1 \dots c_n$ son las incógnitas y la matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) \dots \varphi_n'(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^{n-1)}(t) \dots \varphi_n^{n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema lineal homogéneo

Recordatorio: $\underset{n\times n}{A}\underset{\text{vector en } \mathbb{R}^n}{x} = 0$, $\det A \neq 0 \Longrightarrow x = 0$

Sist Comp. Determinado

Así, si podemos encontrar un $t \in I$ tal que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) \dots \varphi_n'(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^{n-1)}(t) \dots \varphi_n^{n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

concluimos que $c_1 = \dots = c_n = 0$ y así $\varphi_1 \dots \varphi_n$ son l. i.

<u>Proposición</u> Sean $\varphi_1 .. \varphi_n \in C^{n-1}(I)$ tales que

$$W(\varphi_1 .. \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \\ \dots \\ \varphi_1^{n-1)}(t) \dots \varphi_n^{n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ para algún } t \in I.$$

"wronskiano"

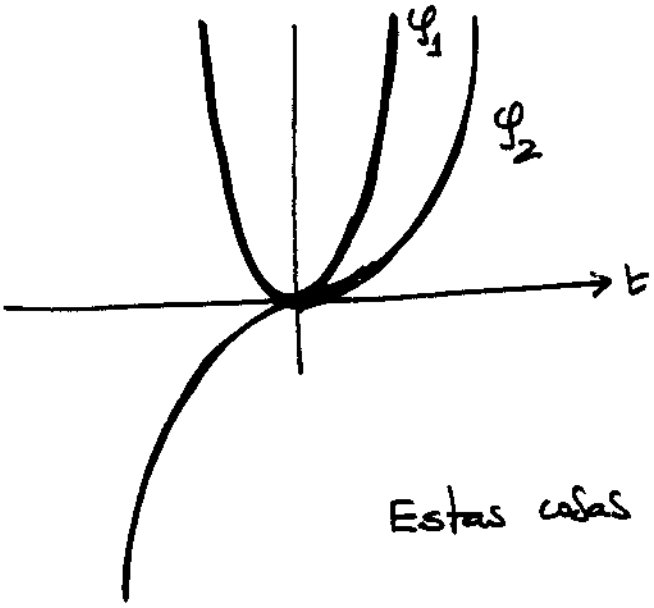
Entonces $\varphi_1 .. \varphi_n$ l. i. en I

Revisa los ejemplos ①, ② y ③ a la luz de esta proposición

El recíproco no es cierto, hay ejemplos rebuscados de funciones cuyo wronskiano es idénticamente cero pero son l. i.

<u>Ejemplo</u> $\varphi_1(t) = 2t^2$, $\varphi_2(t) = |t|t$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\mathbb{R})$

$W(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 0$, φ_1, φ_2 l. i. en $\mathbb{R}$



Estas cosas raras no pueden pasar en Z_1

<u>Bases de Z_1</u> Sean $\varphi_1, \dots \varphi_n \in Z_1$. Son equivalentes:

i) $\varphi_1, \dots \varphi_n$ l. i en I

ii) $W(\varphi_1, .. \varphi_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

iii) $W(\varphi_1, .., \varphi_n)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$

Observa la diferencia entre ii), el wronskiano nunca se anula, y iii) hay algún instante en el que el wronskiano no se anula

<u>Ejemplo</u> $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2$$

En este caso $W(\varphi_1, \varphi_2)$ se anula sólo en $t=0$. Esto quiere decir que φ_1 y φ_2 no pueden ser sols de la misma ecuación $L[x]=0$ de 2° orden y definida en $\mathbb{R}$.

<u>Importante</u>: La equivalencia de i), ii) y iii) se da para sols de una ec. lin. homogénea, <u>no</u> para funciones cualesquiera.

Vamos a probar la equivalencia de i), ii) y iii) en Z_1.

$$i) \Longrightarrow ii) \Longrightarrow iii) \Longrightarrow i)$$

<u>i) ⟹ ii)</u> Para cada $t \in I$ fijo consideramos el isomorfismo

$$Z_1 \to \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

[Recordatorio: un isomorfismo $L: V_1 \to V_2$ lleva bases en bases
$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(v_1|\dots|v_n) \neq 0$

Como $\varphi_1, \dots \varphi_n$ base de $Z_1 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_1^{n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \varphi_n'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ base de } \mathbb{R}^n \Longrightarrow$$

$$W(\varphi_1 \dots \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) es evidente. Si algo se cumple para cada t, también se cumple para algún t

iii) $\Longrightarrow$ i) Es consecuencia de la proposición anterior

Es tradicional llamar Sistema Fundamental a una base de Z_1. Un s. f. de $L[x]=0$ se puede caracterizar como un conjunto de n soluciones $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ que cumplen

$W(\varphi_1, \ldots \varphi_n) \neq 0$.

Ejemplo $\quad x'' - x = 0$

e^t, e^{-t} s. f. $\qquad$ $\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t$ s. f.

$e^t, \operatorname{ch} t$ s. f. $\qquad$ $e^t, 2e^t$ No es s. f.

Fórmula del Wronskiano (Liouville)

Vamos a encontrar una fórmula interesante para el wronskiano de n sols de $L[x]=0$.

Comenzamos con la ecuación de 2° orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad , \quad a_0, a_1 \in C(I)$$

y suponemos que $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ son dos sols. Vamos a derivar su wronskiano

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$$

$$\frac{d}{dt} W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi_1' - \varphi_2\varphi_1''$$

$$= \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1''$$

Utilizamos la ec. $\varphi_i'' = -a_1\varphi_i' - a_0\varphi_i$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}W(\varphi_1,\varphi_2) = \varphi_1(-a_1\varphi_2' - a_0\varphi_2) - \varphi_2(-a_1\varphi_1' - a_0\varphi_1)$$

$$= -a_1(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')$$

$$= -a_1\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix} = -a_1 W(\varphi_1,\varphi_2)$$

$W(\varphi_1,\varphi_2)$ es sol de la ec. de 1er orden $\frac{d}{dt}y = -a_1(t)y \Rightarrow$

$$\boxed{W(\varphi_1,\varphi_2)(t) = W(\varphi_1,\varphi_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\ ;\ t_0, t\in I}$$

Ahora, para la ec. de orden n se cumple

$$x^{n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \quad a_i \in C(I)$$

$\varphi_1, \dots \varphi_n$ sols.

$$\boxed{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t) = W(\varphi_1 .. \varphi_n)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds}}$$

Observa que esta fórmula explica por qué el wronskiano o bien es idénticamente zero o nunca se anula.

<u>Ejercicio</u> Demuestra esta fórmula. Para ello prueba antes la regla de derivación del determinante

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\phi_{11}(t) & \dots & \phi_{1n}(t)\\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\phi_{11}'(t) & \dots & \phi_{1n}'(t)\\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn}\end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix}\phi_{11} & \dots & \phi_{1n}\\ \phi_{21}' & \dots & \phi_{2n}'\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn}\end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix}\phi_{11} & \dots & \phi_{1n}\\ \phi_{21} & \dots & \phi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1}' & \dots & \phi_{nn}'\end{vmatrix}$$

(La derivada del determinante se expresa como n determinantes; cada uno se obtiene derivando una fila).

Reducción del orden

En general no es posible calcular de manera explícita el s.f. de una ecuación de 2° orden. Sin embargo, si se conoce una solución no trivial $\varphi(t)$ entonces sí es posible construir una segunda l.i. (Esto es reminiscente de lo que ocurría en la ecuación de Ricatti)

Sea por tanto una ec. dif. lineal homogénea de 2° orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

donde $a_0, a_1 \in C(I)$, I intervalo abierto.

Suponemos que $\varphi(t)$ es una solución (distinta de la cero) y conocida. Hacemos el cambio de variable

$$\boxed{x = \varphi(t)y} \leftarrow \text{nueva incógnita}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi' y + \varphi y' \\ x'' &= \varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y'' \end{aligned}\right] \xrightarrow[\text{en la ecuación}]{\text{Sustituyendo}}$$

$$\underline{\varphi'' y} + 2\varphi' y' + \varphi y'' + \underline{a_1 \varphi' y} + a_1 \varphi y' + \underline{a_0 y \varphi} = 0$$

Los tres términos subrayados se cancelan porque φ es solución $\Longrightarrow$ $\varphi'' + a_1\varphi' + a_0\varphi = 0$

Nos queda

$$\varphi y'' + (2\varphi' + a_1\varphi)y' = 0$$

En principio se trata de otra ec. lineal de 2° orden pero tiene la ventaja de que no hay término en y. Entonces se puede "rebajar el orden" mediante el cambio

$$\boxed{v = y'}$$

Llegamos a

$$\varphi v' + (2\varphi' + a_1 \varphi) v = 0,$$

una ecuación de 1^{er} orden que resolvemos por ~~variab~~ separación de variables. Una vez calculada v se integra y se recupera y ...

$$v \xrightarrow{\int} y \longrightarrow x = \varphi(t) y$$

<u>Ejemplo</u> $t^2 x'' + t x' - 4x = 0$

En este caso los coeficientes son $a_1(t) = \frac{1}{t}$, $a_0(t) = -\frac{4}{t^2}$ y trabajaremos en el intervalo $(0,\infty)$. Observa que en $t=0$ hay una singularidad al escribir la ecuación en forma normal.

Una sol. particular es $\varphi(t) = t^2$, $t \in (0,\infty)$.

$$x = t^2 y$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2ty + t^2 y' \\ x'' &= 2y + 4t y' + t^2 y'' \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} &2t^2 y + 4t^3 y' + t^4 y'' + \\ &+ 2t^2 y + t^3 y' - 4t^2 y = 0 \end{aligned}$$

$$t^4 y'' + 5t^3 y' = 0, \qquad t y'' + 5y' = 0$$

$$y' = v \longrightarrow \quad t v' + 5v = 0 \; ; \quad v = c_1 e^{-5\ln t} = \frac{c_1}{t^5}, \; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \int v \, dt + c_2 = c_1 \int \frac{dt}{t^5} + c_2 = -\frac{c_1}{4} t^{-4} + c_2$$

$$x = t^2 y = k_1 t^{-2} + k_2 t^2 ; \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

S. F. $\varphi_1(t) = t^2, \; \varphi_2(t) = \frac{1}{t^2}$

(Comprueba que $W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$)

Este método también se puede aplicar a una ecuación de orden $\geqslant 3$; se consigue con el cambio $x = \varphi y$ llegar a una ecuación de un orden menos $\geqslant 2$; en general una sol. no trivial no permite resolver (Hacen falta 2 l.i. si $n=3$, 3 l.i. si $n=4, \ldots$)

Hay una manera alternativa de rebajar el orden usando la fórmula de Liouville. Sea φ sol conocida y x otra solución, entonces

$$W(x, \varphi) = c\, e^{-\int a_1(t) dt}$$

y esto produce una ecuación de 1^{er} orden para x.

Volvemos al ejemplo anterior:

$$t^2 x'' + t x' - 4x = 0$$

$\varphi(t) = t^2, \; x = x(t)$ sol, $\quad W(x, \varphi) = c\, e^{-\int \frac{dt}{t}}$

(Un error frecuente lleva a escribir $W(x,\varphi) = c\,e^{-\int t\,dt}$.
Observa que la fórmula de Liouville sólo se aplica si la ec. está en forma normal).

porque $t>0$

$$W(x,\varphi) = c_1 e^{-\ln t} = \frac{c_1}{t}$$

$$x\varphi' - \varphi x' = \frac{c_1}{t}$$

$$2tx - t^2 x' = \frac{c_1}{t}$$

Hemos llegado así a una ec. completa de 1^{er} orden.
La podríamos resolver por variación de ctes ($\longrightarrow$ Ejercicio!)

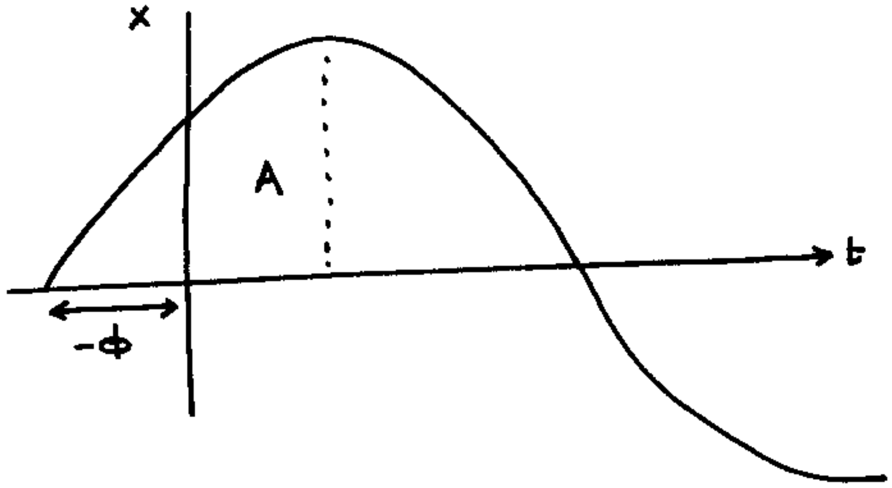
Ceros de las soluciones : separación

Comenzamos analizando un ejemplo concreto :

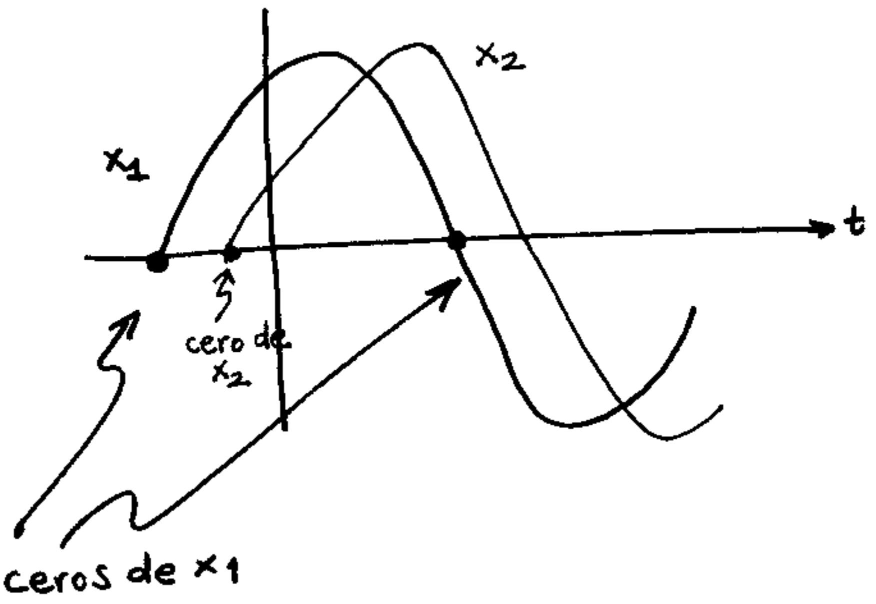
$$x'' + x = 0.$$

Las soluciones son de la forma $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$, pero nos interesará escribirlas en la forma equivalente

$$x(t) = A \operatorname{sen}(t+\phi), \quad A \geq 0, \ \phi \in [0, 2\pi)$$



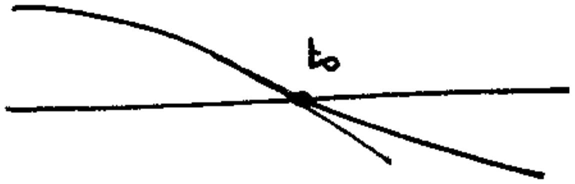
Los ceros de una solución no trivial son de la forma $-\phi + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Observamos que, para dos soluciones linealmente independientes, los ceros se intercalan.



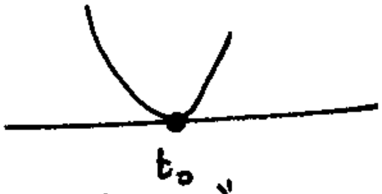
Este hecho se generaliza a la ec. general de 2° orden

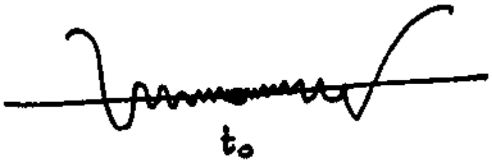
$$(*) \qquad x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0,$$

$a_0, a_1 \in C(I)$. Dada una solución no trivial $x(t)$ y un cero $t_0 \in I$, $x(t_0) = 0$, por unicidad se ha de cumplir $x'(t_0) \neq 0$. Entonces se tiene un cambio de signo en t_0,

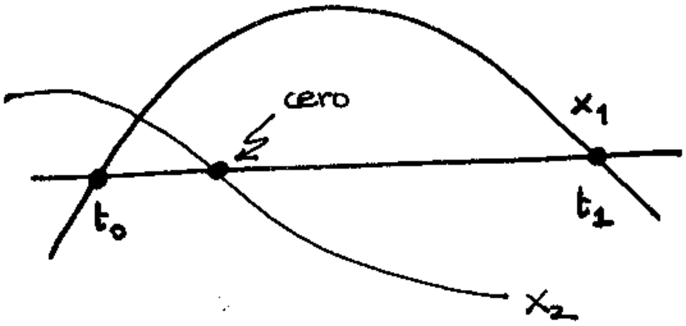


Las situaciones siguientes no son posibles





<u>Teorema</u> Sean $x_1(t), x_2(t)$ dos Soluciones linealmente independientes de $(*)$ y $t_0 < t_1$ dos ceros consecutivos de x_1. Entonces x_2 tiene un cero en el intervalo (t_0, t_1).



<u>Ejercicio</u> Encuentra un ejemplo que muestre que esta conclusión es falsa para ecuaciones de 3^{er} orden

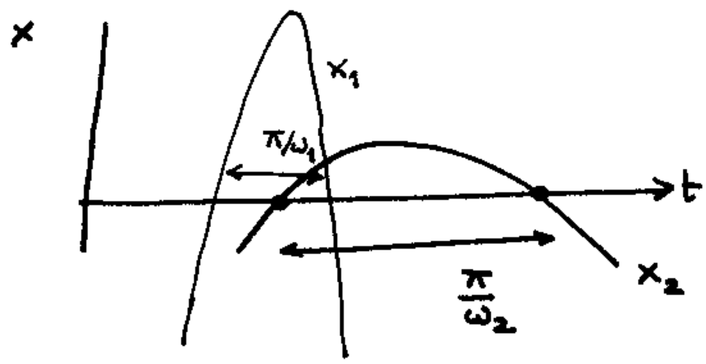
Ceros de las soluciones : comparación

De nuevo partimos de un ejemplo: dos muelles, I y II, con I más duro que II

$$\left.\begin{array}{l} x'' + \omega_1^2 x = 0 \\ x'' + \omega_2^2 x = 0 \end{array}\right\} \qquad \omega_1 > \omega_2 > 0$$

Es claro que las oscilaciones de I serán más rápidas que las de II,

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \end{array}\right\}$$



<u>Teorema</u> Consideramos dos ecuaciones

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \quad x'' + a_1(t)x' + \hat{a}_0(t)x = 0$$

donde $a_1, a_0, \hat{a}_0 \in C(I)$, la función a_1 aparece en las dos ecuaciones y

$$a_0(t) \geqslant \hat{a}_0(t) \quad \forall t \in I.$$

Sean $x(t)$, $\hat{x}(t)$ soluciones no triviales de las ecuaciones respectivas. Entonces, entre dos ceros de $\hat{x}(t)$ hay un cero de $x(t)$.

<u>Ejercicio</u> Demuestra que las soluciones de la ecuación $x'' + (2 + \operatorname{sen} t)x = 0$ tienen infinitos ceros.

La Ecuación Completa

Estudiamos $L[x] = b(t)$

donde

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x$$

y $a_0, a_1, \dots a_{n-1}, b \in C(I)$.

Lo primero que observamos es que ahora el conjunto de soluciónes, denotado como Z_b, <u>no</u> es un espacio vectorial. Observa que si b no es idénticamente cero, la función $x \equiv 0$ no es solución; pero un espacio vectorial siempre ha de contener al 0.

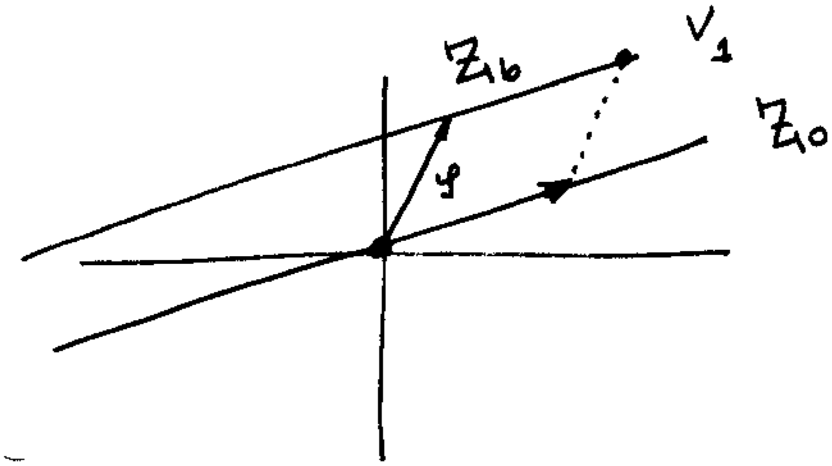
Vamos a pensar en la estructura de Z_b.

Para ello repasamos el Algebra Lineal :

Sea $L: V_1 \to V_2$ lineal, ~~$b \in V_2$~~, $b \in \operatorname{Im} L$

$\operatorname{Ker} L = Z_{10} = \{ x \in V_1 : L(x) = 0 \}$ es un espacio vectorial

$L^{-1}(b) = Z_{1b} = \{ x \in V_1 : L(x) = b \}$ no es un espacio vectorial pero sí es un espacio afín que se obtiene trasladando Z_{10}



Todos los vectores en Z_{1b} se obtienen a partir de uno fijo $\varphi \in Z_{1b}$ si se les suman los de Z_{10}; en fórmulas

$$\boxed{Z_{1b} = \varphi + Z_{10}}$$

donde φ es cualquier solución de $L(x) = b$.

Aplicando todo esto al operador diferencial $L: C^n(I) \to C(I)$ deducimos que el conjunto de sols de la ec. completa, Z_{1b}, es un espacio afín de dimensión n que se obtiene trasladando al espacio vectorial Z_{10}.

¿Tiene toda esta discusión algún valor practico?

Pues sí. Supongamos que conocemos una solución particular $\varphi(t)$ de la ec. completa y que también sabemos resolver la homogénea; entonces

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sol. General}\\ \text{de la Completa}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Sol. Particular}\\ \text{de la}\\ \text{Completa}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Sol General}\\ \text{de la}\\ \text{Homogénea}\end{array}}$$

Ejemplo $x'' + x = t$

Sol. Particular $\varphi(t) = t$

Sol. de la homogénea $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ $\Big] \Longrightarrow$

$$\boxed{x(t) = t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \,;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Hay otra observación del álgebra lineal que puede ser útil

(Principio de superposición: $L : V_1 \to V_2$ lineal

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 & \text{solución de} & L(x) = b_1 \\ x_2 & \quad '' & L(x) = b_2 \\ \cdots & & \cdots \\ x_m & \quad '' & L(x) = b_m \end{array}\right\} \Longrightarrow \textstyle\sum x_i \text{ sol de } L(x) = \sum b_i \;)$$

Ejemplo $x'' + x = t + \operatorname{sen} 2t$

Buscamos una sol particular descomponiendo $b = b_1 + b_2$,

$b_1(t) = t$, $b_2(t) = \operatorname{sen} 2t$

$x'' + x = t \longrightarrow \varphi_1(t) = t$

$x'' + x = \operatorname{sen} 2t \longrightarrow \varphi_2(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t$ $\Big] \Longrightarrow$

$$\boxed{\underbrace{x(t)}_{Z_b} = \underbrace{t - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t}_{\varphi} + \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t}_{Z_0}}$$

Vamos a diseñar un método para resolver la ec. completa supuesto que se sepa resolver la ec. homogénea.

Método de variación de las constantes

Por comodidad suponemos que se trata de una ec. de 2° orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t); \quad a_0, a_1 \in C(I), \ b \in C(I)$$

y que conocemos un s.f. de la ec. homogénea asociada

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \rightsquigarrow \varphi_1(t), \varphi_2(t) \text{ s.f.}$$

Sabemos que las sols de la homogénea son

$$x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t); \ c_1, c_2 \text{ ctes.}$$

Ahora, como en 1er orden, buscamos las sols de la completa haciendo $c_i = c_i(t)$,

$$x = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t).$$

Este cambio introduce dos incógnitas (c_1 y c_2) para una sola ecuación, por eso hay que introducir una ligadura entre c_1 y c_2; suponemos

$$c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0$$

En este momento la elección de la ligadura resulta arbitraria, en el cálculo que vamos a hacer quedará justificada por su eficacia. Resumiendo tenemos la ecuación

$$\left.\begin{array}{ll} & x'' + a_1x' + a_0x = b \\ \text{y el cambio} & x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \\ \text{con ligadura} & c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \end{array}\right]$$

Sustituimos el cambio en la ecuación

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \; , \quad x' = \underbrace{c_1'\varphi_1}_{} + c_1\varphi_1' + \underbrace{c_2'\varphi_2}_{} + c_2\varphi_2' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' ,$$

ligadura $=0$

$$x'' = c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' \quad \Longrightarrow$$

φ_2 sol hom, $= 0$

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + a_1 c_1\varphi_1' + a_1 c_2\varphi_2' + a_0 c_1\varphi_1 + a_0 c_2\varphi_2 = b$$

φ_1 sol de la homogénea $\Rightarrow\; = 0$

Uniendo la ligadura a esta ecuación llegamos a

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b \end{array}\right\}$$

Ahora pensamos en estas expresiones como en un sistema lineal algebraico donde las incógnitas son c_1' y c_2' y la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}$. El determinante es $W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0$ y por ~~tanto~~ se trata de un sistema compatible determinado.

Resolvemos con la regla de Cramer,

$$c_1' = \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ b & \varphi_2' \end{vmatrix} , \quad c_2' = \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b \end{vmatrix}$$

De aquí, integrando, podemos hallar c_1 y c_2 (cada una dependiente de una constante arbitraria k_1 y k_2) y desde el cambio obtenemos x.

Tres Observaciones

① A primera vista se podría criticar el método alegando que no hay garantías de que la solución x se pueda escribir como

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \quad \text{con} \quad c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0.$$

Sin embargo, los cálculos que hemos hecho (vistos ahora en sentido inverso) muestran que x siempre admite una expresión de ese tipo.

② ¿Qué habría pasado si hubiésemos intentado "engañar" a la ecuación usando φ_1 y φ_2 sols de la ec. pero no l.i.?
Todo habría funcionado hasta llegar al sistema

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b \end{array}\right\}$$

es incompatible si $b \neq 0$

Ahora, como $W(\varphi_1,\varphi_2)=0$, el sistema

$$r(A) = 1, \quad r\left(A \,\vdots\, \begin{matrix} 0 \\ b \end{matrix}\right) = r\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & b \end{pmatrix} = \underbrace{2}_{\text{si } b(t)\neq 0,\, \varphi_1(t)\neq 0} \text{ pues}$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b \end{vmatrix} = b\varphi_1$$

No sería posible expresar x de la manera que requiere la variación de constantes!

③ Este método vale para orden superior. Por ejemplo:

$$x''' + a_2x'' + a_1x' + a_0x = b$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ s.f. de la homogénea,

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 \longleftarrow \text{cambio}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + c_3'\varphi_3 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_3'\varphi_3' = 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{ligaduras}$$

Ejemplo $\quad x'' + x = \operatorname{sen}\omega t, \quad \omega > 0$

Ec. hom. $x'' + x = 0 \rightsquigarrow$ s.f. $\varphi_1(t) = \cos t,\ \varphi_2(t) = \operatorname{sen} t$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cambio} & x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \\ \text{Ligadura} & c_1' \cos t + c_2' \operatorname{sen} t = 0 \end{array}\right] \quad \text{Derivando } x', x'' \ldots$$

$$x' = \underset{\sim\sim}{c_1' \cos t} - c_1 \operatorname{sen} t + \underset{\sim\sim}{c_2' \operatorname{sen} t} + c_2 \cos t = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$$

$$x'' = -c_1' \operatorname{sen} t - c_1 \cos t + c_2' \cos t - c_2 \operatorname{sen} t$$

$$x'' + x = \operatorname{sen}\omega t \rightsquigarrow -c_1' \operatorname{sen} t + c_2' \cos t = \operatorname{sen}\omega t$$

Sist. Lineal:

$$\left.\begin{array}{r} c_1' \cos t + c_2' \operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1' \operatorname{sen} t + c_2' \cos t = \operatorname{sen}\omega t \end{array}\right\} \qquad W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen}\omega t & +\cos t \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} t$$

$$c_2' = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \operatorname{sen}\omega t \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\omega t \cos t$$

$$c_1 = -\int \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} t\, dt + k_1, \quad c_2 = \int \operatorname{sen}\omega t \cos t\, dt + k_2;\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Para hacer estas integrales empleamos las fórmulas

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \int \{ \cos(\omega+1)t - \cos(\omega-1)t \} dt + k_1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega+1)t}{\omega+1} - \frac{\operatorname{sen}(\omega-1)t}{\omega-1} \right] + k_1 \qquad \text{si } \omega \neq 1$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2} t + k_1 \qquad \text{si } \omega = 1$$

<u>Atención</u> : es frecuente cometer aquí un error no distinguiendo el caso $\omega = 1$.

$$c_2 = \frac{1}{2} \int \{ \operatorname{sen}(\omega+1)t + \operatorname{sen}(\omega-1)t \} dt + k_2 =$$

$$\frac{1}{2} \left[- \frac{\cos(\omega+1)t}{\omega+1} - \frac{\cos(\omega-1)t}{\omega-1} \right] + k_2 \qquad \text{si } \omega \neq 1$$

$$- \frac{1}{4} \cos 2t + k_2 \qquad \text{si } \omega = 1$$

En resumen :

$\omega \neq 1$, $\quad x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t =$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega+1)t}{\omega+1} - \frac{\operatorname{sen}(\omega-1)t}{\omega-1} \right] \cos t + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\omega+1)t}{\omega+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(\omega-1)t}{\omega-1} \right] \operatorname{sen} t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$$

$\omega = 1$

$$x = - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \operatorname{sen} t +$$

$$+ k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$$

Esta última fórmula la podemos simplificar con el ángulo doble

$$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t \cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \operatorname{sen} t =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos^2 t - \frac{1}{4}\cos^2 t \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 t$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} t \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t$$

$\omega = 1$,

$$x = -\frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t =$$

$$= -\frac{1}{2} t\cos t + k_1^* \cos t + k_2^* \operatorname{sen} t, \quad k_1^*, k_2^* \in \mathbb{R}$$

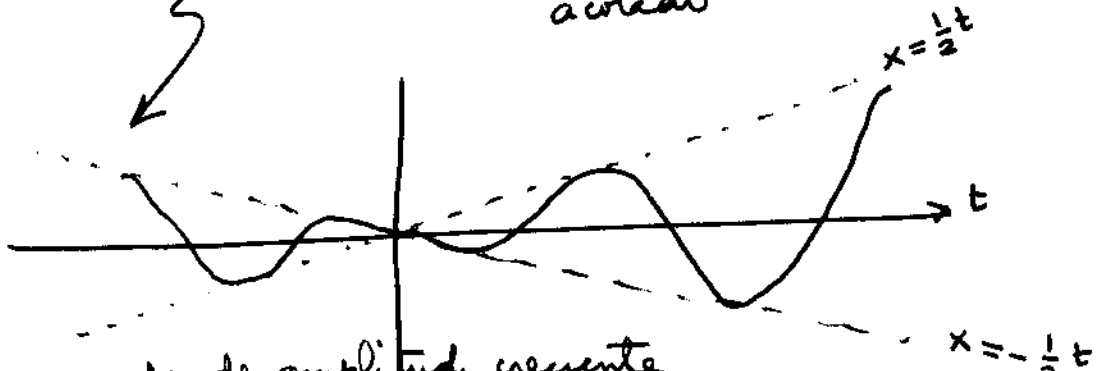
Vamos a analizar las fórmulas obtenidas:

Si $\omega \neq 1$ tenemos un producto de senos y cosenos y por tanto $x(t)$ está acotada en todo $\mathbb{R}$. Sería un error pensar que $x(t)$ es siempre periódica; si ω es irracional la función $x(t)$ no es periódica

Para comprender esto miramos un ejemplo más simple (Observa que la función $\psi(t) = \cos t \cos \sqrt{2}\, t$ no es periódica pues $\psi(0) = 1$ y $|\psi(t)| < 1 \quad \forall t \neq 0$)

Si $\omega = 1$ ~~tenemos~~ la solución $x(t)$ es no acotada pues

$$x(t) = -\frac{1}{2} t \cos t + \underbrace{k_1^* \cos t + k_2^* \operatorname{sen} t}_{\text{acotado}}$$



onda de amplitud creciente

A la hora de la practica El método de variación de ctes tiene la ventaja de funcionar siempre cuando se trata de resolver una ec. completa y se conoce un s. f. de la homogénea. Los cálculos suelen ser pesados y por eso conviene evitarlo mientras se pueda. En su lugar se puede usar la búsqueda de la solución "a ojo" (la idea consiste en buscar una sol de la misma naturaleza que $b(t)$, b polinomio de grado $n \rightsquigarrow x$ polinomio de grado n? b trigonométrica $\rightsquigarrow x$ trigonométrica ?...)

Ejemplos:

$x'' + x = t^2$, buscamos $x = A + Bt + Ct^2$ donde A, B, C son parámetros a determinar

$$2C + A + Bt + Ct^2 = t^2 \longrightarrow \left.\begin{array}{c} C = 1 \\ B = 0 \\ 2C + A = 0 \end{array}\right\}$$

Sol particular $x = t^2 - 2$

Sol General $x = t^2 - 2 + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

$x'' + x = \operatorname{sen} 2t$, buscamos $x = A\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t$

$$\underbrace{-4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t}_{+A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t} = \operatorname{sen} 2t, \quad A = 0, \quad B = -\frac{1}{3}$$

Sol Particular $x = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t$

Sol General $x = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t + c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

$x'' + x = \operatorname{sen} t$, buscamos $x = A\cos t + B \operatorname{sen} t$

llegamos a un sistema incompatible porque no existe tal sol. Sabemos por cálculos anteriores que una sol particular es $x = -\frac{1}{2} t\cos t$

La Resonancia Lineal

Si alguna vez has viajado en avión y has observado el ala te habrás dado cuenta de que vibra

Podemos pensar que dichas vibraciones se rigen por la ec. del oscilador

$$x'' + x = 0.$$

El motor del avión produce una fuerza externa actuando sobre el ala

$$x'' + x = \varepsilon \operatorname{sen} \omega t$$

con ε pequeño, $\varepsilon > 0$, y ω un parámetro que depende de la velocidad (nº de revoluciones del motor)

Si $\omega \neq 1$ la sol es acotada y las oscilaciones no crecen demasiado

Si $\omega = 1$ las sols son $x(t) = -\frac{\varepsilon}{2} t \cos t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$

y se produce una oscilación de amplitud creciente que tarde o temprano romperá el ala. El avión deberá estar diseñado para que no se alcance la velocidad que produce $\omega = 1$ (o cerca de ese valor).

Otras historias más o menos fantásticas sobre la resonancia se cuentan en el libro de Zill.