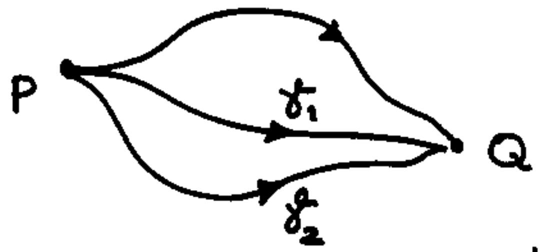
4. Cálculo de variaciones. La ecuación de Euler-Lagrange

Pensemos en el plano (x,y) como en un medio óptico no homogéneo e isótropo. La velocidad de ~~la~~ transmisión de la luz en cada punto viene dada por una función

$$v = v(x,y) > 0$$

que suponemos conocida. v será grande en las zonas más translúcidas y disminuirá en las zonas opacas.
Fermat postuló que los rayos de luz adoptan la forma que hace mínimo el tiempo empleado en viajar entre dos puntos cualesquiera.

Fijamos dos puntos distintos P y Q y consideramos todas las trayectorias que los unen



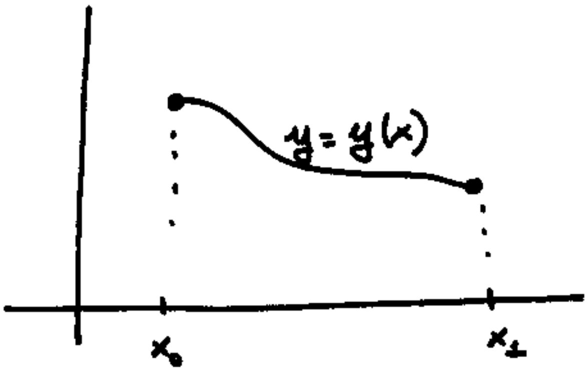
Cada trayectoria γ se describe por unas ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \ \cancel{y(t)}\ y = y(t), \quad t \in [0,T]$$

donde T es el tiempo que emplea el rayo virtual en viajar de P a Q.

Si $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$, $\quad y(0) = y_0,\ y(T) = y_1$
$\quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_1$

Suponemos que $\dfrac{dx}{dt} > 0$ y así la trayectoria se puede escribir en explícitas $y = y(x)$ con $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$



$y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$

Calculamos T:

Por la regla de la cadena $\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = y' \dfrac{dx}{dt}$

$$v = v(x,y) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}, \qquad \text{Como } x(0) = x_0,\ x(T) = x_1,$$

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x, y(x))}\,dx$$

Si queremos hallar la forma del rayo de luz deberemos encontrar la curva $y = y(x)$ con $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ que hace mínimo el tiempo $T = T[y]$.

Este problema parece del tipo "máximos y mínimos" pero hay algunas diferencias. La cantidad que pretendemos minimizar, $T = T[y]$, no es una función en el sentido usual. En lugar de depender de una o varias variables,

$f = f(x)$, $f = f(x_1, \ldots, x_N)$, depende de una función $y = y(x)$.

T es una "función de funciones" o funcional.

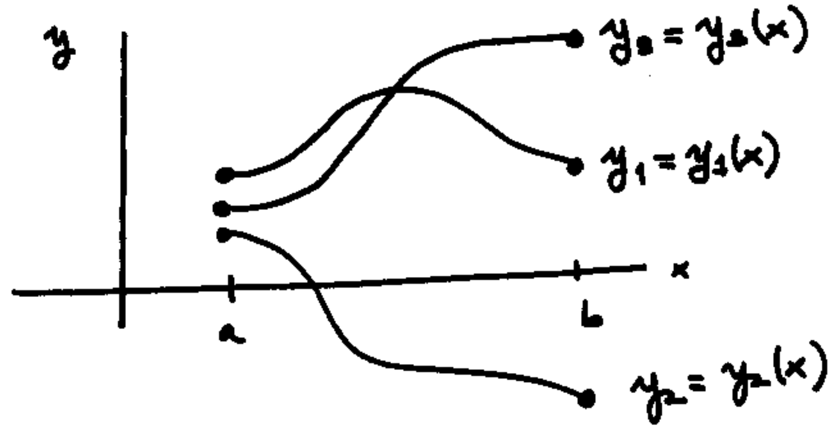
El cálculo de variaciones se ocupa de los problemas de máximos y mínimos para funcionales.

El espacio de funciones

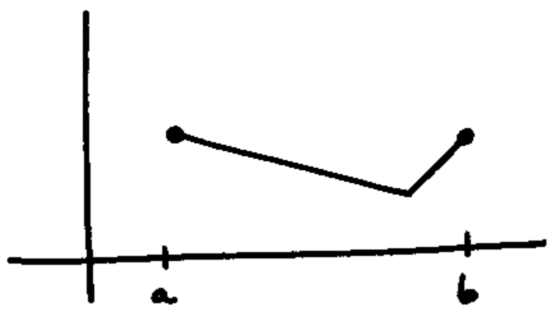
A partir de ahora fijamos un intervalo cerrado $[a,b]$ y consideramos el espacio

$$C^1[a,b] = \{ y : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, y \text{ es de clase } C^1 \}.$$

Podemos visualizar $C^1[a,b]$ como un espacio de curvas



La curva



no está en este espacio.

El funcional

Sea $\mathcal{D} \subset C^1[a,b]$. Un funcional definido sobre $\mathcal{D}$ es una aplicación

$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \mathcal{F}[y]$$

Notación $\mathcal{F} = \mathcal{F}[y]$ depende de una función

$f = f(x)$ depende de un número

Ejemplo Sea $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto v(x,y)$ una función continua y positiva

$$\mathcal{D} = \{ y \in C^1[x_0, x_1] \ / \ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x, y(x))} \, dx$$

Ejercicio $x_0 = 0 = y_0$, $x_1 = 1 = y_1$, $v \equiv 1$

Calcula $\mathcal{F}[y_1]$ y $\mathcal{F}[y_2]$ para $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ ¿Cuál de los dos valores es más pequeño? ¿Se podría predecir el resultado antes de calcular?

Los extremos

Un funcional $\mathcal{F}:\mathcal{D}\subset C^1[a,b]\to\mathbb{R}$ alcanza un mínimo en la función $y=y(x)$, $y\in\mathcal{D}$, si

$$\mathcal{F}[y]\leq\mathcal{F}[z]\quad\forall z\in\mathcal{D}.$$

En ese caso se dice que $\mathcal{F}[y]=\min_{\mathcal{D}}\mathcal{F}[z]$ es el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

<u>Ejemplo</u> $\mathcal{F}[y]=\int_0^1\{y'(x)^2+y(x)^2\}\,dx$, $y(0)=y(1)=0$

alcanza un mínimo en $y\equiv 0$.

De modo análogo se define máximo y max/min estricto.
Las definiciones anteriores hablan de extremos absolutos o globales. Es posible definir la noción de extremo relativo o local pero no vamos a entrar en eso.

La ecuación de Euler-Lagrange

Vamos a considerar funcionales $\mathcal{F}:\mathcal{D}\subset C^1[a,b]\to\mathbb{R}$ definidos por una integral del tipo

$$\mathcal{F}[y]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx$$

donde F es una función continua,

$$F:[a,b]\times D\to\mathbb{R},\quad (x,y,p)\mapsto F(x,y,p)$$

y $D \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y arco-conexo [Observa que empleamos la letra p en lugar de y' porque ahora se trata de una variable independiente].

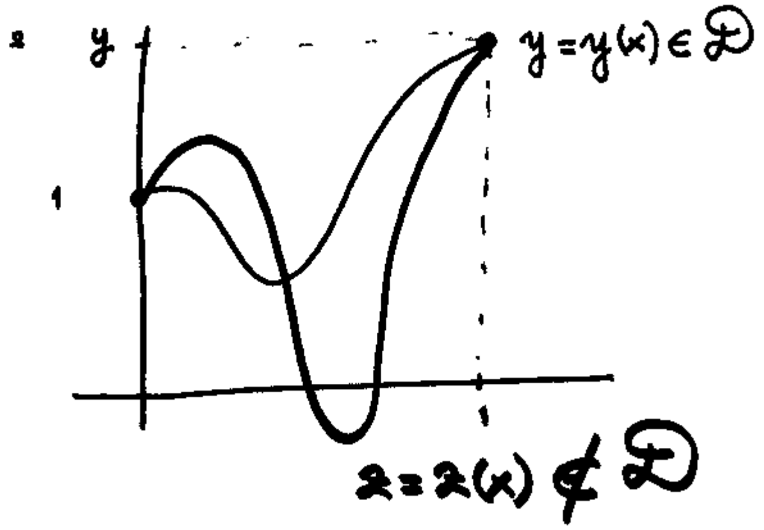
El dominio de $\mathcal{F}$ será

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1[a,b] : y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta,\ \begin{matrix}(y(x), y'(x)) \in D \\ \forall x \in [a,b]\end{matrix} \right\}$$

Ejemplo $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\, dx$, $y(0)=1$, $y(1)=2$

$$F(x,y,p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{y}} \quad , \quad D = \{ (y,p) : y > 0 \}$$

$$\mathcal{D} = \{ y \in C^1[0,1] : y(0) = 1,\ y(1) = 2\ ,\ y(x) > 0\ \ \forall x \in [0,1] \}$$



Dada una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que sea de clase C^1, se sabe que los puntos donde se alcanza un extremo han de ser soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_N) = 0 \ , \quad i = 1, \dots N.$$

Dado un funcional de los que acabamos de describir, y una las funciones en las que se alcance un extremo van a ser soluciones de una ecuación diferencial: la ecuación de Euler-Lagrange.

<u>Teorema</u> Suponemos que F es de clase C^2 en $[a,b]\times D$ y que ~~la función~~ $\mathcal{F}$ alcanza un extremo en la función $y=y(x)$, $y\in\mathcal{D}\cap C^2[a,b]$. Entonces $y(x)$ es solución de

$$F_y\left(x, y(x), y'(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[F_p\left(x, y(x), y'(x)\right)\right] = 0.$$

<u>Observación</u> Cuando escribimos F_y, F_p estamos pensando en F como en una función de 3 variables independientes x, y, p; así $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $F_p = \frac{\partial F}{\partial p}$. Por el contrario, cuando hacemos $\frac{d}{dx}$, la expresión dentro del corchete está evaluada en $y(x)$ y es por tanto función de una variable. Derivando el corchete

$$F_y(x,y,y') - F_{xp}(x,y,y') - F_{yp}(x,y,y')\,y' - F_{pp}(x,y,y')\,y'' = 0.$$

Es una ecuación de 2° orden. Las condiciones $F\in C^2$, $y\in C^2$ se han impuesto para que esta expresión tenga sentido.

<u>Ejemplo</u> $\mathcal{F}[y] = \int_0^L \{y'(x)^2 - y(x)^2\}dx$, $y(0)=y(L)=0$

$F(x,y,p) = p^2 - y^2$, $D=\mathbb{R}^2$, $F_y = -2y$, $F_p = 2p$

$$F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0 \Rightarrow -2y - \frac{d}{dx}\left[2y'\right] = 0$$

$y'' + y = 0$. Las soluciones de esta ecuación son

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

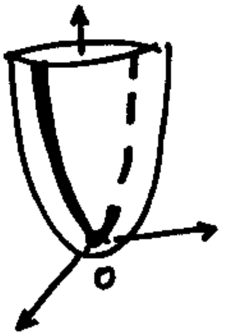
Si imponemos las condiciones $y(0) = y(L) = 0$ con objeto de que y esté en el dominio, obtenemos

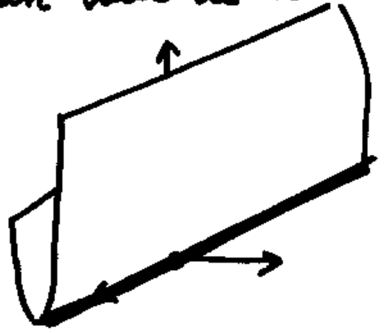
$y(x) \equiv 0$ si $L \neq n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$y(x) = c \operatorname{sen} x$, $c \in \mathbb{R}$ si $L = n\pi$.

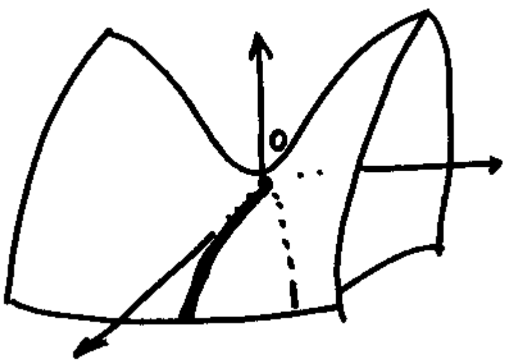
En este punto conviene observar que la ecuación de Euler-Lagrange es una condición <u>necesaria</u> pero no suficiente para que una función $y(x)$ sea extremo. De hecho, en este ejemplo la función $y(x) \equiv 0$ es mínimo si $L \leq \pi$, y no lo es si $L > \pi$. Aunque es difícil pintar en un espacio de curvas, dibujamos unas gráficas en $\mathbb{R}^3$ que dan idea de cómo se comporta $\mathcal{F}$

$0 < L < \pi$





$L = \pi$



$\pi < L < 2\pi$

La línea más gruesa representa la acción del funcional sobre las funciones

$$z_c(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \in \mathcal{D}$$

$$\mathcal{F}[z_c] = c^2 \frac{L}{2}\left(\frac{\pi^2}{L^2} - 1\right).$$

En ocasiones las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange reciben el nombre de <u>extremales</u>. El Teorema nos dice que una función que sea extremo (de clase C^2) es una extremal. El ejemplo anterior muestra que no siempre las extremales (en $\mathcal{D}$) son extremos.

En principio no podemos aplicar los métodos de las lecciones anteriores para resolver la ecuación de Euler-Lagrange porque se ~~trata~~ de una ecuación del 2° orden. Si la función F sólo depende de y, y', $F = F(y,y')$, las extremales cumplen la ecuación de primer orden

$$F(y,y') - y' F_p(y,y') = \text{cte.}$$

Vamos a comprobarlo. Para ello, sea $y = y(x)$ una extremal (sol. de E-L), calculamos la derivada

$$\frac{d}{dx}\left\{ F(y,y') - y' F_p(y,y') \right\} = F_y(y,y')y' + F_p(y,y')y'' -$$

$$- y'' F_p(y,y') - y' \left[F_{py}(y,y')y' + F_{pp}(y,y')y'' \right] =$$

$$\underbrace{\left\{ F_y(y,y') - \frac{d}{dx}\left[F_p(y,y')\right] \right\}}_{\text{“0” por ser extremal}} y' = 0.$$

[El mismo cálculo prueba que las soluciones de la ec. de 1er orden son extremales siempre que y' no se anule o la haga en puntos aislados].

Ejemplo (de nuevo el principio de Fermat)

$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto v(x,y) > 0$, v de clase C^2

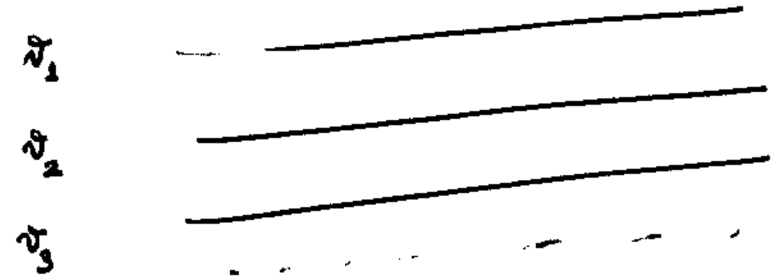
$$\varphi[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\, dx , \quad y(x_0) = y_0 . \; y(x_1) = y_1$$

$$F(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{v(x,y)} , \quad F_y = -\frac{v_y}{v^2}\sqrt{1+p^2}, \; F_p = \frac{1}{v}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Ecuación de las extremales:

$$-\frac{v_y(x,y)}{v(x,y)^2}\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left\{ \frac{1}{v(x,y)} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right\} = 0$$

Suponemos ahora que $v = v(y)$ sólo depende de y. El medio óptico es homogéneo sobre líneas horizontales



$F(y,p) = \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{v(y)}$. Podemos simplificar la ecuación de las extremales $(F - y' F_p = cte)$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} - y' \frac{y'}{v(y)\sqrt{1+y'^2}} = cte \implies$$

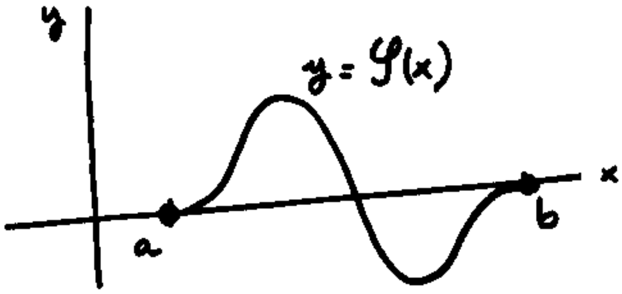
$$\boxed{v(y)\sqrt{1+y'^2} = cte}$$

Despejando y' llegamos a una ecuación de variables separables. ¿Qué ocurre si $v \equiv 1$? Encuentra un medio óptico $v = v(y)$ en el que un rayo de luz se curve según la fórmula $y(x) = e^x$.

Preliminares para la demostración del Teorema

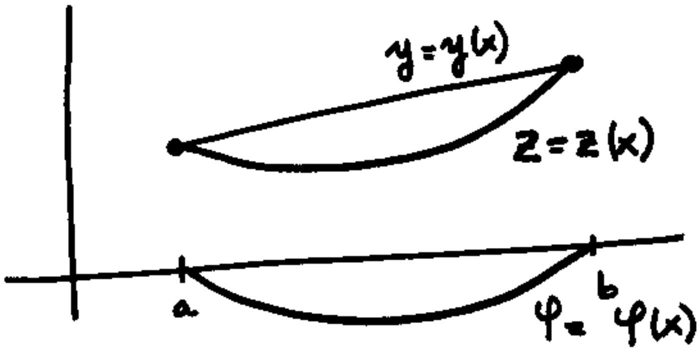
Emplearemos la clase de funciones

$$C_0^1[a,b] = \{ \varphi \in C^1[a,b] \,/\, \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \}$$



Estas funciones se llamarán funciones "test" o de prueba. Resaltamos dos propiedades útiles:

(i) Sea $y \in C^1[a,b]$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, $\varphi \in C_0^1[a,b]$. Entonces la función suma $z = y + \varphi$ cumple las mismas condiciones que y en los extremos, $z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$.



(ii) Lema fundamental del Cálculo de variaciones

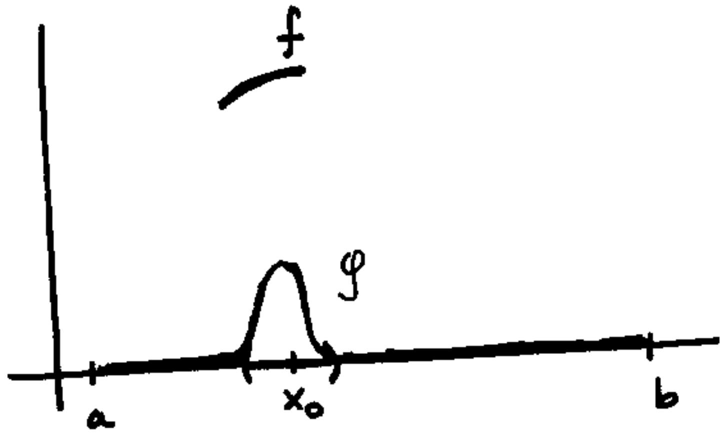
Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se cumple

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1[a,b].$$

Entonces $f \equiv 0$.

"Demostración": Por reducción al absurdo. Si f no fuese cero en algún punto x_0 de $[a,b]$, tampoco lo sería en un pequeño intervalo alrededor de x_0 (f continua)

Podemos suponer que x_0 es interior.



Construimos una función φ de $C_0^1[a,b]$ cuya gráfica es una "campana" soportada en ese pequeño intervalo.

Es claro que $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0$.

Demostración del Teorema

Sea $y \in C^2[a,b] \cap \mathcal{D}$ una función donde $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo (el caso del máximo es similar).

Tomamos una función test φ en $C_0^1[a,b]$. Esta función puede ser cualquiera pero por ahora la fijamos. Por la observación (i), si $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $y+\varepsilon\varphi$ cumple las mismas condiciones en a y b que y. Además, como D es abierto, si ε es pequeño, $(y(x)+\varepsilon\varphi(x), y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))$ permanecerá en D. Así, $y+\varepsilon\varphi\in\mathcal{D}$ para ε pequeño. Como se alcanza un mínimo en y,

$$\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]\geqslant\mathcal{F}[y].$$

Como y,φ están fijos, $\varepsilon\longmapsto\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]$ define una función real de variable real (ε), que tiene un mínimo en $\varepsilon=0$. Según la definición de $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]=\int_a^b F(x,y(x)+\varepsilon\varphi(x),y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))dx.$$

Podemos interpretar esta fórmula como una integral dependiente de un parámetro; derivando respecto a ε,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]=\int_a^b\Big\{F_y(x,y(x)+\varepsilon\varphi(x),y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi(x)$$

$$+F_p(x,y(x)+\varepsilon\varphi(x),y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi'(x)\Big\}dx.$$

Sabemos que $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]\right|_{\varepsilon=0}=0$ porque la función en ε tiene un mínimo en $\varepsilon=0$. Así,

$$\int_a^b \{ F_y(x,y,y')\varphi + F_p(x,y,y')\varphi' \} dx = 0$$

Pretendemos aplicar el lema del cálculo de variaciones y para ello necesitamos una expresión del tipo

$$\int_a^b \bullet \, \varphi = 0.$$

El primer sumando va bien, en el segundo integramos por partes

$$\int_a^b F_p(x,y,y')\varphi' dx = F_p \cancel{(x,y,y')}\varphi \Big]_{x=a}^{x=b} -$$

$$- \int_a^b \frac{d}{dx}[F(x,y,y')]\varphi dx$$

Es ahora cuando usamos que φ es una función test: como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, el corchete se anula. Uniendo esta identidad a la anterior

$$\int_a^b \{ F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}[F_p(x,y,y')] \} \varphi dx = 0.$$

Como φ es arbitraria (en $C_0^1[a,b]$) y

$f = F_y - \frac{d}{dx}[F_p]$ es continua, llegamos a la ecuación de Euler-Lagrange

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}[F_p(x,y,y')] = 0$$

Las variaciones y las funciones test

Los orígenes del Cálculo de Variaciones son fascinantes. Puedes encontrar una historia divertida en la página web

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/brachistochrone.html

El primer tratamiento sistemático se debe a Lagrange, quien introdujo el símbolo δ, la variación. La expresión δy representa en el espacio de funciones $y = y(x)$ lo análogo a dx en la recta real. Cumple las mismas reglas y además $(\delta y)' = \delta y'$.

Si dx se visualiza como un incremento infinitesimal, δy es una función test infinitesimal $(y + \varepsilon \varphi,\ \varepsilon \to 0)$.
$\approx y + \delta y$

Llegamos a la ecuación de Euler-Lagrange con variaciones: Φ alcanza un mínimo en $y \Rightarrow \delta\Phi = 0$ en y

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \Longrightarrow \delta\Phi = \int_a^b (F_y\,\delta y + F_p\,\delta y')\,dx$$

Integrando por partes, $\int_a^b F_p\,\delta y' = -\int_a^b \frac{d}{dx} F_p\,\delta y$

$0 = \int_a^b \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_p \right\} \delta y$. Como la variación δy es arbitraria, $F_y - \frac{d}{dx} F_p = 0$.

"... δz expresa una diferencia de z diferente de dz pero que, sin embargo, satisface las mismas reglas ..." Lagrange ([redacted])