3. Ecuaciones exactas. Factor integrante

En esta lección vamos a resolver ecuaciones diferenciales usando ideas diferentes. Comenzamos con un ejemplo:

$$x' = \frac{t}{x}, \quad x(0) = 1, \qquad D = \{(t,x) : x > 0\}$$

$$x x' - t = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left\{ \frac{x^2 - t^2}{2} \right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2-t^2}{2} = k \\ x(0) = 1 \end{array}\right\} \quad k = \frac{1}{2}, \qquad x^2 - t^2 = 1, \quad x(t) = +\sqrt{1+t^2}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

El paso crucial, indicado con una flecha, ha consistido en reescribir la ecuación como una diferencial exacta. En general podemos resolver $x' = f(t,x)$ si la reescibimos como

$$\frac{d}{dt}\{V(t,x)\} = 0;$$

las soluciones, en forma implícita, están dadas por

$$V(t,x) = \text{cte}.$$

El problema central de esta lección será ~~encontrar una~~ decidir cuándo se puede escibir una ecuación en forma exacta.

Será conveniente escribir las ecuaciones en forma un poco distinta a la usual. Consideraremos

$$(*) \qquad P(t,x) + Q(t,x)\,x' = 0$$

donde $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1

(D es un dominio, abierto y arco-conexo).

Si la ecuación se puede escribir en forma exacta,

$$\frac{d}{dt}\{V(t,x)\} = 0, \quad \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)}_{P} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)}_{Q}\,x' = 0.$$

Problema : Dadas dos funciones $P, Q : D \to \mathbb{R}$,

¿Cuándo existe V: $\frac{\partial V}{\partial t} = P$, $\frac{\partial V}{\partial x} = Q$?

No siempre existe, hay una restricción con las derivadas cruzadas. Si suponemos que V está en C^2,

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x} & = & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} \\ \| & & \| \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} & & \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{array}$$

Definición La ecuación $(*)$ es exacta si se cumple

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} \text{ en } D$$

[Condición de Exactitud

Ejemplo $\quad -\frac{t}{x} + x' = 0$ no es exacta

$$P = -\frac{t}{x}, \quad Q = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{t}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$x x' - t = 0$ es exacta

$$P = -t, \quad Q = x, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

[Hemos supuesto que P y Q eran C^1, y no sólo continuas, para que la definición de exactitud tenga sentido. Las condiciones iniciales $(t_0, x_0) \in D$ habrá que imponerlas en puntos donde $Q(t_0, x_0) \neq 0$. Así podemos dividir por Q y escribir la ecuación en forma normal $x' = -\frac{P}{Q}$. En el ejemplo $x x' - t = 0$, $x(0) = 1$ es una buena condición inicial; no lo es $x(1) = 0$].

Ahora vamos a probar un resultado importante, dice que, en muchos casos, la condición de exactitud garantiza la existencia de la V.

Teorema Sean $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Son equivalentes:

(i) Existe $V \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = Q \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

(ii) $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Demostración (i) ⟹ (ii) Sin apercibirnos ya la hemos probado: Repetición de la jugada:

Como V es C^2, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} = P \implies \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = Q \implies \dfrac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t} \end{array}\right] \implies \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

La prueba de (ii) ⟹ (i) es más complicada. Antes tenemos que familiarizarnos con la derivación de integrales dependientes de parámetros

Dada una función de dos variables, $\phi = \phi(s, \lambda)$, interpretamos la segunda como un parámetro e integramos en la primera (sobre un intervalo fijo)

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(s, \lambda)\, ds$$

Obtenemos así una función en la variable λ.

Ejemplo $F(\lambda) = \int_0^1 \operatorname{sen}(\lambda s)\, ds$

$$F(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\lambda}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

Supongamos que ϕ está definida en un rectángulo cerrado $[a,b]\times[c,d]$ y es de clase C^1; entonces

$$F\in C^1[c,d]\ ,\quad F'(\lambda)=\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(s,\lambda)\,ds$$

(En realidad, es suficiente que ϕ sea continua y exista $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}$ y también sea continua)

Continuación del ejemplo

$$F'(\lambda)=\int_0^1 s\cos(\lambda s)\,ds$$

No hay que confundir las funciones definidas por el teorema del cálculo (se integra una función de una variable sobre un intervalo que cambia)

$$F(\lambda)=\int_a^\lambda f(s)\,ds\ ,\quad F'(\lambda)=f(\lambda)$$

y las integrales dependientes de parámetros (se integra una función de dos variables sobre un intervalo fijo)

$$F(\lambda)=\int_a^b f(s,\lambda)\,ds\ ,\quad F'(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(s,\lambda)\,ds$$

Volvemos a la demostración

(ii) $\Rightarrow$ (i) Definimos la función

$$V(t,x)=\int_0^t P(s,0)\,ds+\int_0^x Q(t,s)\,ds$$

La función V es de clase C^1; esto se debe a una acción conjunta del teorema del cálculo (TC) y las integrales dependientes de parámetros (IP). Lo vemos,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \underbrace{P(t,0)}_{\text{TC}} + \underbrace{\int_0^x \frac{\partial Q}{\partial t}(t,s)\,ds}_{\text{IP}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 + \underbrace{Q(t,x)}_{\text{TC}}$$

A primera vista no parece que V sea la función buscada pues $\frac{\partial V}{\partial t}$ no parece ser P. Vamos a trabajar un poco, usemos la hipótesis $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P(t,0) + \int_0^x \frac{\partial P}{\partial x}(t,s)\,ds$$

Regla de Barrow

$$= P(t,0) + \Big[P(t,s) \Big]_{s=0}^{s=x} =$$

$$= P(t,0) + P(t,x) - P(t,0) = P(t,x).$$

Todavía no hemos completado la demostración. Tenemos $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\frac{\partial V}{\partial t} = P$, $\frac{\partial V}{\partial x} = Q$. Necesitamos que V sea de clase C^2. Resulta fácil: como P y Q son C^1, V ha de ser C^2.

Ahora la demostración está completa pero hay algo que no es satisfactorio: ¿de dónde ha salido la definición de V en términos de las integrales?

Los campos conservativos y la condición de exactitud

Un campo vectorial

$F:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,\ x=(x_1,\dots x_N) \mapsto F(x) = (F_1(x_1,\dots x_N),\dots, F_N(x_1\dots x_N))$

se dice <u>conservativo</u> si existe una función $V:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

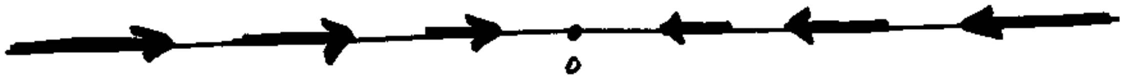
de manera que $\nabla V = -F$; en coordenadas

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -F_1 , \dots , \frac{\partial V}{\partial x_N} = -F_N .$$

En un grado de libertad $(N=1)$ todos los campos continuas son conservativos gracias al teorema del cálculo

$$F = F(x),\ F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\quad V(x) = -\int_0^x F(s)\,ds$$

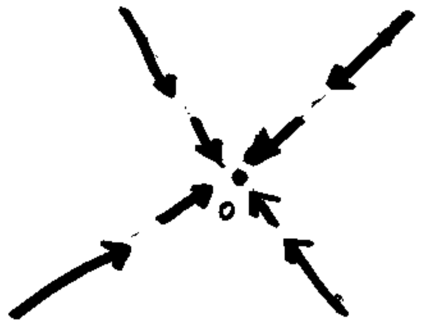
<u>Ejemplo</u> (ley de Hooke) $\quad F(x) = -kx,\ k>0,\quad V(x) = \dfrac{kx^2}{2}$



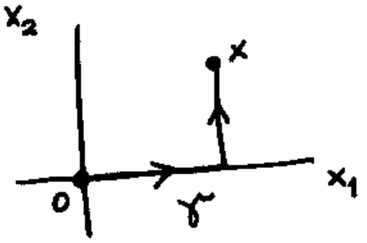
Para $N=2$ el teorema anterior dice que un campo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F=(F_1,F_2)$, de clase C^1, es conservativo si y sólo si se cumple la condición de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} .$$

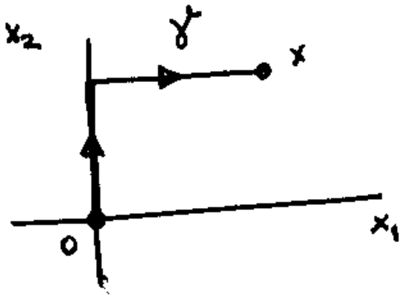
<u>Ejemplo</u> $\quad F(x) = -kx\ ,\quad V(x) = \dfrac{k\,(x_1^2+x_2^2)}{2}$



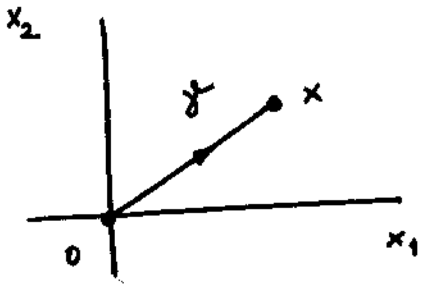
La definición que hemos dado de V no es más que el trabajo $\int_\gamma F \cdot d\vec{r}$ a lo largo del camino



Se puede repetir la demostración con otras opciones



$$V(x_1,x_2) = \int_0^{x_2} Q(0,s)\,ds + \int_0^{x_1} P(s,x_2)\,ds$$

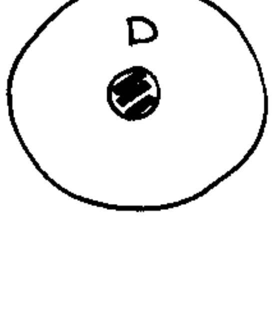


$$V(x_1,x_2) = x_1 \int_0^1 P(sx_1,sx_2)\,ds + x_2 \int_0^1 Q(sx_1,sx_2)\,ds$$

La existencia del potencial y los agujeros

En el Teorema supusimos que P y Q estaban definidas en todo el plano $\mathbb{R}^2$ y no en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$; esto es importante. ~~No siempre se puede asegurar que~~ ~~la condición~~ En dominios con agujeros la condición de exactitud no garantiza que haya potencial; son ejemplos de dominios con agujeros:

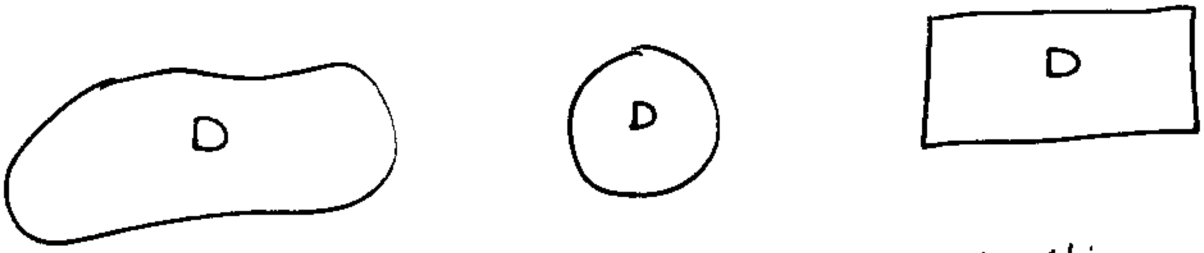
una corona



D =

$D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$

Por el contrario, en un dominio (abierto y arco-conexo) $D \subset \mathbb{R}^2$ que no tenga agujeros el teorema anterior sí es cierto



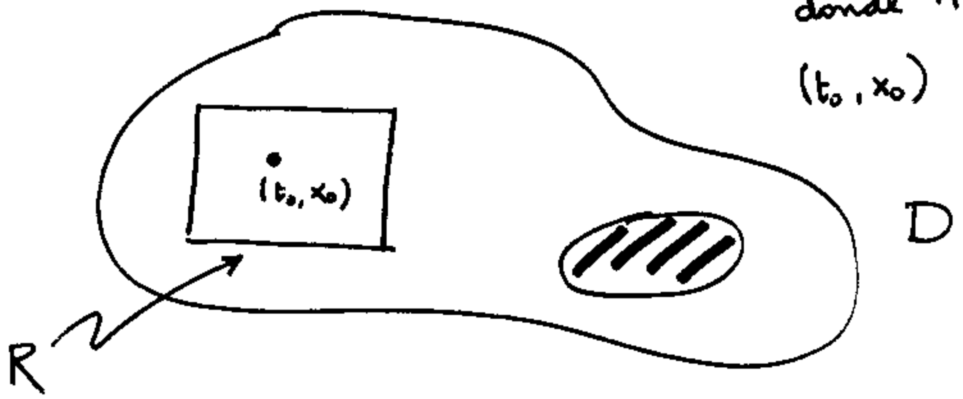
[La noción de "dominio sin agujeros" se hace matemáticamente precisa = D simplemente conexo]

Es frecuente que los campos que aparecen en Física tengan singularidades ; se producen así "agujeros".

En todo caso la condición de exactitud siempre implica que hay un potencial local :

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in C^1(D),\ (t_0, x_0) \in D \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Existe } V \in C^2(R) : \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = P,\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = Q \text{ en } R \end{array}$$

donde R es un entorno de (t_0, x_0)



Ecuaciones exactas : resolución

$$P(t,x) + Q(t,x)\,x' = 0 \,, \quad x(t_0) = x_0$$

$$P, Q \in C^1(D) \,, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} \,, \quad Q(t_0, x_0) \neq 0$$

Buscamos un potencial V alrededor de (t_0, x_0); la ecuación se escribe

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)x' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{V(t,x)\} = 0$$

La solución será $V(t,x) = cte = V(t_0, x_0)$

[Comprueba que podemos aplicar el Teorema de la función implícita].

Ejemplo $\quad x' = -\dfrac{2t+1+2tx}{t^2+4x^3}$, $x(0)=1$

$$\underbrace{2t+1+2tx}_{P} + \underbrace{(t^2+4x^3)}_{Q}x' = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{Exacta}$$

Buscamos V : $\dfrac{\partial V}{\partial t} = P$, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = Q$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2t+1+2tx \quad \text{(Integramos respecto a } t\text{)}$$

$$V = \int (2t+1+2tx)\,dt + C(x)$$

[Con la primitiva nos aparece una constante respecto a t; es decir, una función de x]

$$V = t^2 + t + t^2x + C(x)$$

Para hallar C derivamos respecto a x,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = t^2 + C'(x). \text{ Por otra parte } \frac{\partial V}{\partial x} = t^2+4x^3$$

$$t^2 + C'(x) = t^2 + 4x^3 \Longrightarrow C'(x) = 4x^3,$$

$$C(x) = x^4$$

$$V = t^2 + t + t^2 x + x^4$$

Solución General : $t^2 + t + t^2 x + x^4 = cte$

$x(0) = 1, \quad cte = 1$

$x(t)$ está definida implícitamente por

$$\boxed{t^2 + t + t^2 x + x^4 = 1 \ , \ x(0) = 1}$$

Repite el ejercicio integrando primero en x, $\frac{\partial V}{\partial x} = Q \cdots$

Factores integrantes

Comenzamos con dos observaciones sobre las ecuaciones exactas.

- "El hecho de que una ecuación sea exacta o no depende de la forma en que se escriba"

$\frac{t}{x} - x' = 0$ no es exacta

$P = \frac{t}{x}, \ Q = -1, \ \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}, \ \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

$t - x x' = 0$ es exacta

$P = t, \ Q = -x, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial t}$

- "A veces, multiplicar por una función puede mejorar las cosas"

$x' + x = 0$ no es exacta. Multiplicamos por e^t

$e^t x' + e^t x = 0$ sí lo es, $\frac{\partial P}{\partial x} = e^t = \frac{\partial Q}{\partial t}$.

Consideramos la ecuación

$$(*) \qquad P(t,x) + Q(t,x)\,x' = 0$$

donde $P, Q \in C^1(D)$, D abierto y arco-conexo de $\mathbb{R}^2$.

<u>Definición</u> Una función $\mu \in C^1(D)$, $\mu = \mu(t,x)$, es un <u>factor integrante</u> de $(*)$ si cumple

$\mu(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D$

$\mu P + \mu Q x' = 0$ es una ecuación exacta

<u>Ejemplo</u>

$\mu(t,x) = e^t$ es un f.i. de $x + x' = 0$

¿Qué ecuaciones admiten el f.i. $\mu \equiv 1$?

Diseñamos una estrategia para calcular factores integrantes:

Nota: exigimos en la definición $\mu \neq 0$ para que se cumpla

$$P\,dt + Q\,dx = 0 \iff \mu P\,dt + \mu Q\,dx = 0$$

De la condición de exactitud :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu Q)$$

P y Q son conocidas y buscamos μ. Podemos ver la expresión anterior como una ecuación en derivadas parciales con incógnita μ. También se puede escribir como

$$\mu_x P + \mu P_x = \mu_t Q + \mu Q_t \implies$$

$$\boxed{\mu_x P - \mu_t Q = (Q_t - P_x)\mu}$$

Ecuación del factor integrante

En este momento se puede pensar que esta vía no es interesante: para resolver una ec. dif. ordinaria ($P dt + Q dx = 0$) llegamos a una ec. en derivadas parciales, a primera vista más complicada. Sin embargo las cosas marchan porque no pretendemos resolver la E. D. P., sólo necesitamos una solución no trivial. El truco será buscar soluciones especiales que sean función de una variable $\mu = \mu(t)$, $\mu = \mu(x)$, o de una combinación lineal $\mu = \mu(\alpha t + \beta x)$, o del producto $\mu = \mu(t \cdot x)$, cociente $\mu = \mu\left(\frac{x}{t}\right)$, etcétera.

i) Factor integrante del tipo $\mu = \mu(t)$

$\mu_t = \mu'(t)$, $\mu_x = 0$, $\quad -\mu'(t) Q = (Q_t - P_x)\mu(t) \implies$

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{P_x - Q_t}{Q} \qquad (\text{Se supone } Q \neq 0)$$

Para que esta identidad sea posible $\frac{P_x - Q_t}{Q}$ ha de depender sólo de t, digamos

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \varphi(t).$$ Entonces μ cumple

la ecuación de variables separables $\mu' = \varphi(t)\mu$

y por tanto podemos tomar

$$\mu(t) = e^{\int \varphi(t)\,dt}$$

<u>Ejemplo</u> $x' + x = 0$

$P = x,\ Q = 1,\qquad P_x = 1,\ Q_t = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = 1 \quad [= \varphi(t)].$$ Esto nos dice que

hay f. i. $\mu = \mu(t)$, en concreto $\mu(t) = e^{\int 1\,dt} = e^t$

ii) <u>Factor integrante del tipo</u> $\mu = \mu(x)$

Existe f. i. de este tipo si

$\mu_t = 0,\ \mu_x = \mu'$. Existe f. i. de este tipo si

$$\frac{Q_t - P_x}{P} = \varphi(x); \qquad \mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

<u>Ejemplo</u> $\frac{x}{t} + x' = 0$

$$P = \frac{x}{t},\ Q = 1,\quad \frac{Q_t - P_x}{P} = \frac{-1/t}{x/t} = -\frac{1}{x},$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

iii) Factor integrante del tipo $\mu = \mu(t^2 + x^2)$

Antes de empezar vamos a aclarar la notación, que es abusiva pero cómoda. Pensemos un ejemplo concreto, digamos $\mu(t,x) = \operatorname{sen}(t^2+x^2)$; el factor integrante es una función de dos variables (t,x) que se puede expresar como composición

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R} \arrow[ur, "M"'] & \end{tikzcd} \qquad \mu = M \circ \nu$$

donde $\nu(t,x) = t^2 + x^2$ y $M(\xi) = \operatorname{sen} \xi$. En la práctica la notación no distingue entre μ y M, cuando se escribe $\mu_t, \mu_x \ldots$ se está derivando μ, cuando se escribe μ' nos referimos a la derivada de M. Si esto se ha entendido ha de haber acuerdo en las identidades

$$\mu_t = 2t\,\mu' \quad , \quad \mu_x = 2x\,\mu'.$$

Buscamos un f. i. del tipo $\mu = \mu(t^2+x^2)$. De la ec. del f. i.

$$2x\mu' P - 2t\mu' Q = (Q_t - P_x)\mu \, ;$$

suponiendo que se puede dividir

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_t - P_x}{2xP - 2tQ}$$

Como μ y μ' son funciones de t^2+x^2, también lo ha de ser el cociente. Por tanto, si

$$\frac{Q_t - P_x}{2xP - 2tQ} = \varphi(t^2+x^2)$$ podemos encontrar un

f. i.

$$\mu = \mu(t^2+x^2) \quad \text{con} \quad \mu(\xi) = e^{\int \varphi(\xi)\,d\xi}$$

<u>Ejemplo</u> $(t-x)\,dt + (x+t)\,dx = 0$

$P = t - x, \; Q = x + t$

$$\frac{Q_t - P_x}{2xP - 2tQ} = \frac{1 - (-1)}{2x(t-x) - 2t(x+t)} = \frac{-1}{t^2+x^2}$$

Existe f. i. $\mu = \mu(t^2+x^2)$ con

$$\mu(\xi) = e^{-\int \frac{d\xi}{\xi}} = \frac{1}{\xi}.$$

Es decir,

$$\mu = \frac{1}{t^2+x^2}.$$

¿Existe en este caso $\mu = \mu(t)$? ¿y $\mu = \mu(x)$?

Conviene observar que en el cálculo del f. i. se busca primero la función de una variable, M o $\mu(\xi)$, mediante la fórmula $\mu(\xi) = e^{\int \varphi(\xi)\, d\xi}$. Una vez hallada M se obtiene $\mu = M \circ \mathcal{P}$ o $\mu(t,x) = \mu(t^2+x^2)$.

Encuentra condiciones para que haya f. i. del tipo

$\mu = \mu(t+x)$, $\mu = \mu(t \cdot x)$, ...