1. Introducción a las ecuaciones diferenciales. Primeros ejemplos y definiciones. Interpretación geométrica

Hasta ahora las ecuaciones que has estudiado tenían por solución un número o una serie de números (un vector). Vamos a estudiar ecuaciones cuyas soluciones son funciones (ecuaciones funcionales) y en las que aparecen la ~~sola~~ función incógnita y algunas de sus derivadas (ecuaciones diferenciales). En general son expresiones del tipo

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0$$

donde

t = tiempo o variable independiente

x = variable dependiente, $x = x(t)$ solución

$F = F(t, x, x', \dots x^{(n)})$ función dada

n orden de la ecuación

<u>Ejemplos</u>

1. $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$

Orden, $n = 1$, $F(t, x, x') = x^2 + x'^2 - 1$

2. $x''(t) + \operatorname{sen} x(t) = 0$

Orden, $n = 2$, $F(t, x, x', x'') = x'' + \operatorname{sen} x$

3. $x'(t) = \dfrac{x(t)}{t}$

Orden $n=1$, $F(t,x,x') = x' - \frac{x}{t}$

La notación

Preferimos $x = x(t)$

variable dependiente

variable independiente

a

$$y = y(x)$$

variable dependiente

variable independiente

La primera notación es más empleada en problemas dinámicos (se busca la posición de un cuerpo, x, en función del tiempo, t); la segunda es más común en estática o problemas geométricos.

La función F depende de $n+2$ variables independientes; sin embargo, $x, x', \ldots$ están destinadas a ser evaluadas sobre la solución (que depende del tiempo)

Ejemplos

1. $F(t,x,x') = x^2 + x'^2 - 1$ depende de tres variables

$x(t) = \operatorname{sen} t$ es una solución pues

$$F(t, \underbrace{\operatorname{sen} t}_{x(t)}, \underbrace{\cos t}_{x'(t)}) = 0$$

2. $F(t,x,x',x'') = x'' + \operatorname{sen} x$ función de 4 variables

Una solución es $x(t) = \pi$ (constante) pues

$$F(\underbrace{t}, \underbrace{\pi}_{x(t)}, \underbrace{0}_{x'(t)}, \underbrace{0}_{x''(t)}) = 0$$

3. $F(t,x,x') = x' - \frac{x}{t}$

3. Solución $x(t) = 3t$,

$$F(t, \underbrace{3t}_{x(t)}, \underbrace{3}_{x'(t)}) = 0$$

Ejercicio En cada ejemplo, encuentra otras soluciones

La notación completa para una ecuación diferencial es

$$F(t, x(t), x'(t), \dots x^{(n)}(t)) = 0$$

pero escribiremos

$x = x(t)$ soy la derivada

$$F(t, x, x', \dots x^{(n)}) = 0$$

Vamos a empezar por analizar un ejemplo concreto en detalle.

La ecuación

$x(t) = \lambda x(t)$

$$x' = \lambda x$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro

En realidad no se trata de una ecuación sino de una familia uniparamétrica de ecuaciones (para $\lambda = 1$, $x' = x$, $\lambda = 2$, $x' = 2x$, $\lambda = -\sqrt{2}$, $x' = -\sqrt{2}x, \dots$)

Empezamos por el caso más simple

$\lambda = 0$

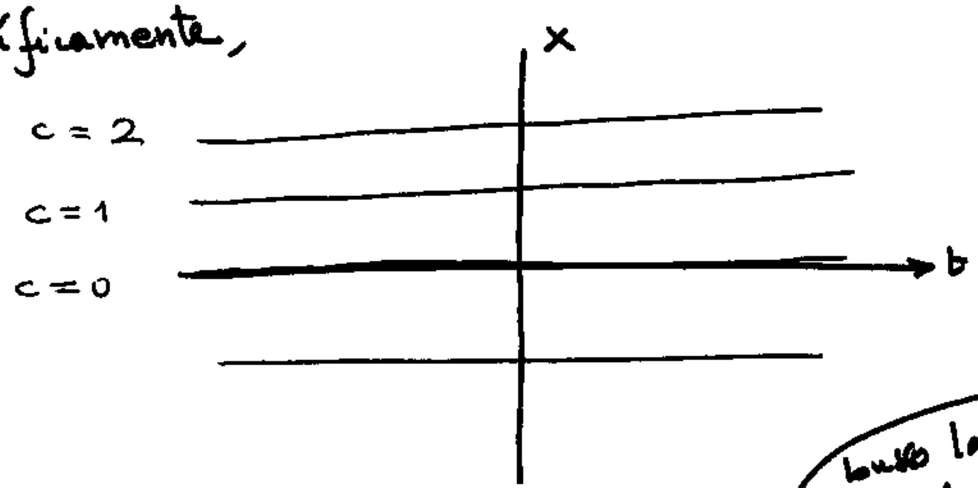
$$x' = 0$$

busco las funciones cuya derivada es cero en todo instante

Sabemos que las soluciones son las funciones constantes

$$x(t) = c, \quad c \text{ constante arbitraria en } \mathbb{R}$$

Gráficamente,



$\lambda = 1$

$$x' = x \quad [\Longleftrightarrow x'(t) = x(t)]$$

busco las funciones cuya derivada coincide con la propia función

Acude a la mente la función $x(t) = e^t$. Pero hay otras soluciones

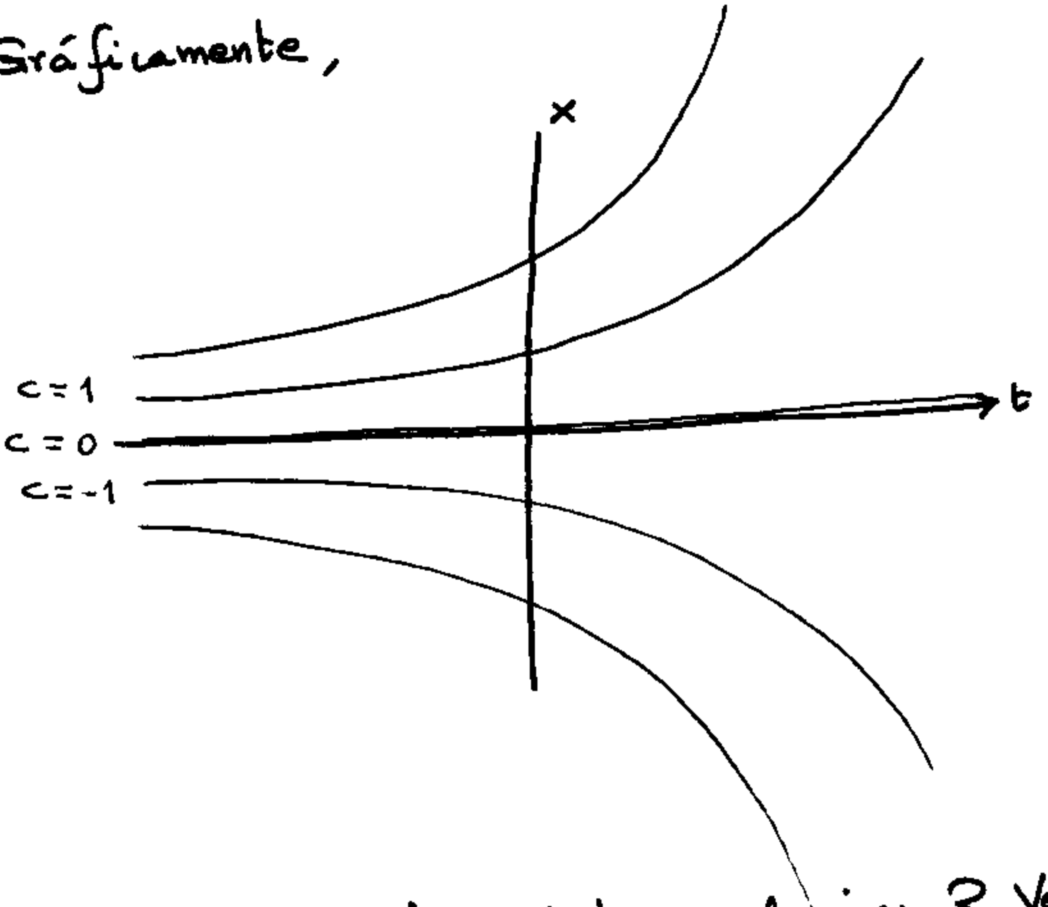
$$x(t) = -e^t, \quad x(t) = 2e^t$$

En general,

$$x(t) = c\, e^t, \quad c \in \mathbb{R}$$

Observa que $x \equiv 0$ es solución

Gráficamente,



Una pregunta: ¿habrá otras soluciones? Veamos un argumento que muestra que no.

Nos dan una solución $x(t)$ de la ecuación (de momento no sabemos que sea del tipo exponencial que conocemos), podemos multiplicarla por e^{-t} y derivar,

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}x(t)\right\} = -e^{-t}x(t) + e^{-t}x'(t)$$

$$= \underbrace{\left\{-x(t) + x'(t)\right\}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ pues } x \text{ es solución}} e^{-t}$$

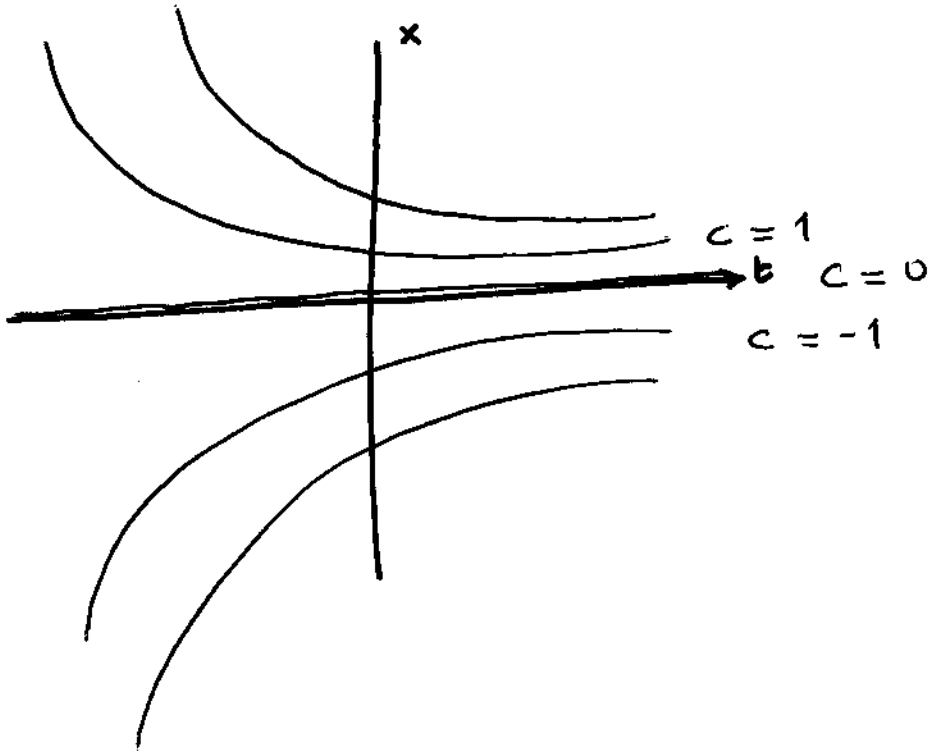
Es decir, $\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}x(t)\right\} = 0$ y por tanto $e^{-t}x(t)$ es constante,

$$e^{-t}x(t) = c \Longrightarrow x(t) = c\,e^{t}$$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad x(t) = c\,e^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$

La gráfica es similar a la anterior; las curvas varían más rápido para $t > 0$ y más lento para $t < 0$.

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad x(t) = c\,e^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$



En general, para $x' = \lambda x$ las soluciones son

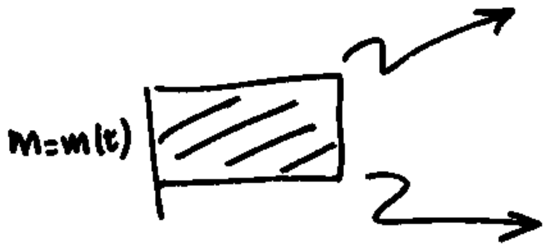
$$x(t) = c\,e^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Mirando a las gráficas observamos un hecho geométrico interesante: por cada punto del plano (t, x) pasa exactamente una curva solución.

La ecuación $x' = \lambda x$ es muy simple pero ya es útil para algunos modelos. Digamos $x' = \lambda x$ en palabras: se busca una magnitud x que depende del tiempo y cuya variación (x') es proporcional a la propia magnitud ($x' \sim x$, parámetro $\lambda \equiv$ cte de proporcionalidad)

Desintegración radiactiva

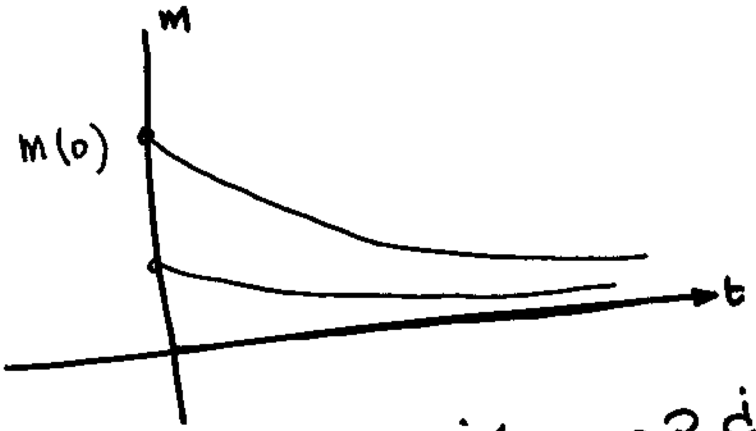
Una sustancia radiactiva tiene masa $m = m(t)$, al radiar va perdiendo masa según la ley



$$\frac{dm}{dt} \sim m$$

Se cumple la ec. dif. $\quad \dfrac{dm}{dt} = -km \quad$ con $k > 0$

(En este caso el parámetro $\lambda = -k$ es negativo)



¿Qué significa la solución $m \equiv 0$? ¿y las negativas?

Dos sustancias se rigen por $\dfrac{dm}{dt} = -k_1 m$ y $\dfrac{dm}{dt} = -k_2 m$ con $k_1 > k_2$, ¿Cuál es más radiactiva? Además de la ley $\left(\dfrac{dm}{dt} \sim m\right)$ y el parámetro (k), que conducen a la ec. dif.; para precisar una solución hay que prescribir la condición inicial $m(0)$ (con cuanto material radiactivo partimos).

En este curso nos vamos a concentrar en las ecuaciones diferenciales en forma normal ; esto quiere decir que la derivada de orden más alto aparece despejada. La forma general es

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$$

¿Cuáles de los ejemplos que se han discutido estaban en forma normal?

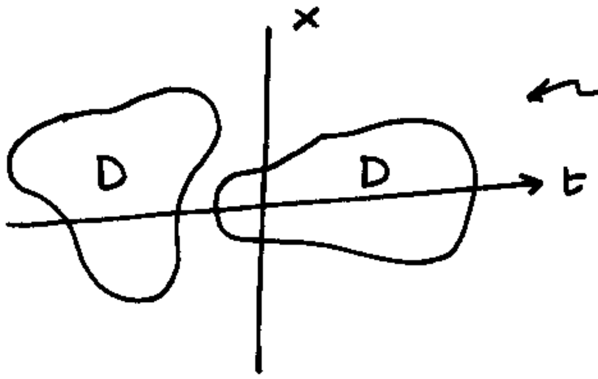
Las primeras lecciones del curso las dedicaremos a la ecuación en forma normal y de orden 1 ; es decir.

$$x' = f(t,x) \quad \text{o} \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

Vamos a empezar con definiciones precisas.

La función f estará definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, que llamaremos el dominio de la ecuación.

El conjunto D será abierto y arco-conexo



No es admisible pues no es arco-conexo (escogeremos una de las componentes)

$D = \{(t,x) : x \geq 0\}$ no es admisible pues no es abierto.

La función

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (t,x) \mapsto f(t,x)$$

se supondrá siempre continua.

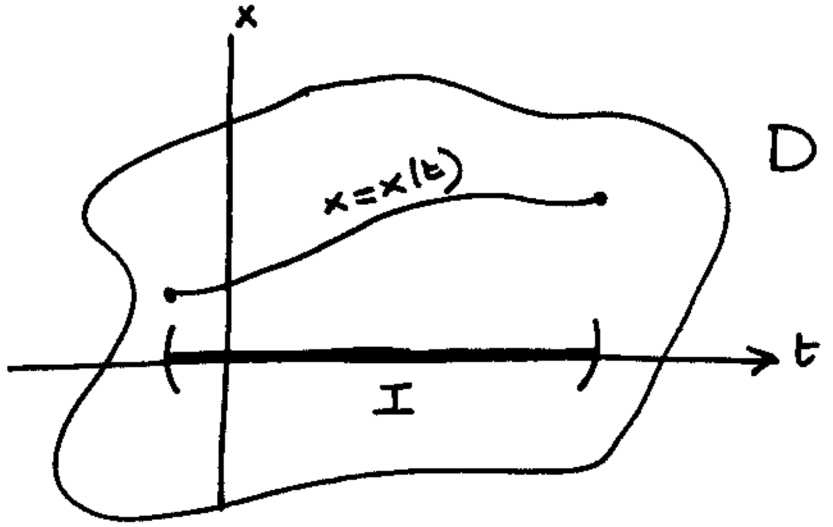
Una <u>solución</u> de $x' = f(t,x)$ es una función $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = x(t)$, definida en un intervalo abierto I que cumple:

i) $x \in C^1(I)$

ii) $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$

iii) $x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I$

El intervalo ~~d~~ I se suele llamar el dominio o intervalo de definición de la solución. No hay que confundirlo con D.



<u>Ejemplos</u>

1. $x' = \frac{1}{t} x$ ¿Es $x(t) = t$ solución?

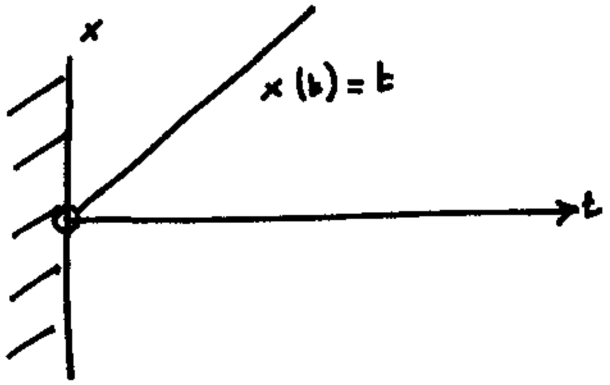
(Si sustituimos "sale". Una solución no es una fórmula; hay que especificar dónde vale)

$$f(t,x) = \frac{x}{t}$$

Hay dos dominios posibles; nos quedamos con uno de ellos

$$D = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \}.$$

$x(t) = t$, $t \in (0,\infty)$, es solución

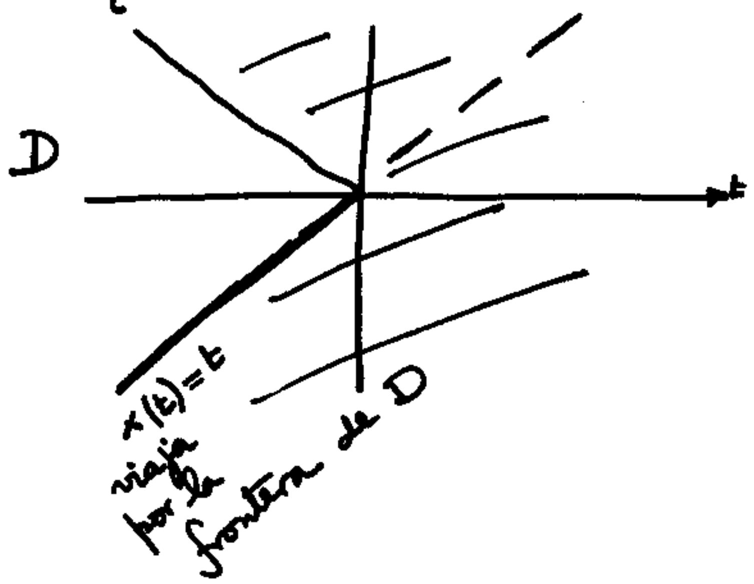


2. $x' = 1 + \sqrt{t^2 - x^2}$ ¿Es $x(t) = t$ solución?

(A pesar de que, al sustituir, "sale", veamos que no es solución)

De nuevo tenemos dos alternativas para D; escogemos una de ellas,

$$D = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : |x| < -t \}$$



Falla la condición ii)

$(t,t) \notin D$

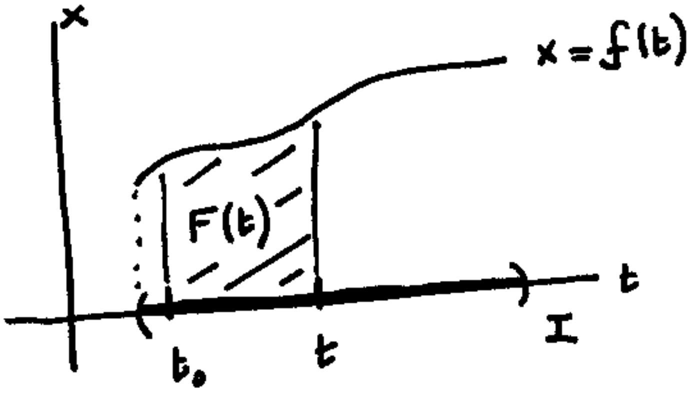
Hasta ahora estás acostumbrado a estudiar funciones que están dadas por una fórmula explícita; muchas veces las soluciones de una ecuación diferencial están dadaS por expresiones más complejas.

Las cuadraturas y el teorema del Cálculo

Dada una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo, y $t_0 \in I$ un instante fijo, podemos definir la función primitiva

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \ , \quad t \in I.$$

Se cumple $F \in C^1(I)$, $F'(t) = f(t)$, $t \in I$



Un ejemplo muy obvio es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \operatorname{sen} t$, $t_0 = 0$

$$F(t) = \int_0^t \operatorname{sen} s\,ds = 1 - \cos t$$

Otro ejemplo menos evidente es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{t^2}$, $t_0 = 0$

$$F(t) = \int_0^t e^{s^2}\,ds \quad \text{(Función no expresable en términos de las elementales)}$$

Ejercicio Dibuja la gráfica de F; para ello prueba que es creciente, impar y $\lim_{t \to +\infty} F(t) = +\infty$.

Ejemplo 3 $\quad x' = (\mathrm{sen}(t^2))x$

$$x(t) = e^{F(t)} \text{ es solución}, \quad F(t) = \int_0^t \mathrm{sen}(s^2)\,ds$$

$$f(t,x) = x\,\mathrm{sen}(t^2), \quad D = \mathbb{R}^2$$

Por el teorema del cálculo $x(t)$ es C^1 y

$$x'(t) = e^{F(t)} F'(t) = e^{F(t)} \mathrm{sen}(t^2)$$
$$= x(t)\,\mathrm{sen}(t^2).$$

Para pensar :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right] = f(t) \qquad \text{T}^{\text{a}} \text{ del Cálculo } (f \in C^0)$$

$$\int_0^t \frac{df}{dt}(s)\,ds = f(t) - f(0) \qquad \text{Regla de Barrow } (f \in C^1)$$

Derivación implícita

En ocasiones una función no se presenta en explícitas, $x = x(t)$, y sí en implícitas, $F(t, x(t)) = 0$.

Veamos un ejemplo:

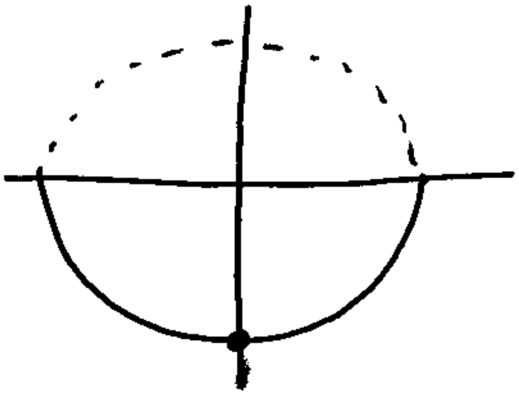
$$t^2 + x^2 = 1$$

Buscamos x como función de t, despejando

$$x(t) = \pm\sqrt{1 - t^2}$$

Nos aparecen dos posibles funciones. Podemos decidir qué rama queremos dando un punto; por ejemplo $x(0) = -1$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\sqrt{1-t^2}, \quad t \in (-1,1)$$



Sabemos derivar esta función a partir de su expresión explícita; pero también podemos efectuar derivación implícita

$$t^2 + x(t)^2 = 1$$

$$t^2 + x^2 = 1$$

Derivando respecto a t,

$$2t + 2x(t)\,x'(t) = 0 \Longrightarrow x'(t) = -\frac{t}{x(t)}$$

[Compruébalo a partir de $x = -\sqrt{1-t^2}$]

En general,

$$F(t, x(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$F(t,x) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\,x' = 0 \Longrightarrow$$

$$x' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)}{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)}$$

Las operaciones anteriores son legítimas si F es de clase C^1 como función de dos variables y $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) \neq 0$ a lo largo de la solución.

Teorema de la función implícita

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$, $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto F(t,x)$, $F \in C^1(\Omega)$. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$ con $F(t_0,x_0)=0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) \neq 0.$$

Entonces existe un intervalo abierto I, $t_0 \in I$, y una [única] función $x \in C^1(I)$ tal que

$$F(t, x(t)) = 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Se cumple,
$$x'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t))}{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))}.$$

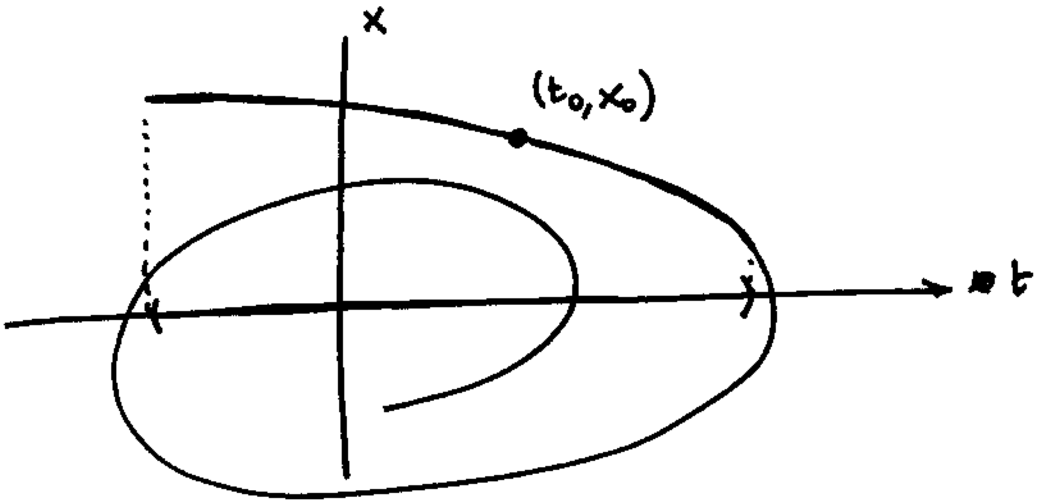
Dos observaciones

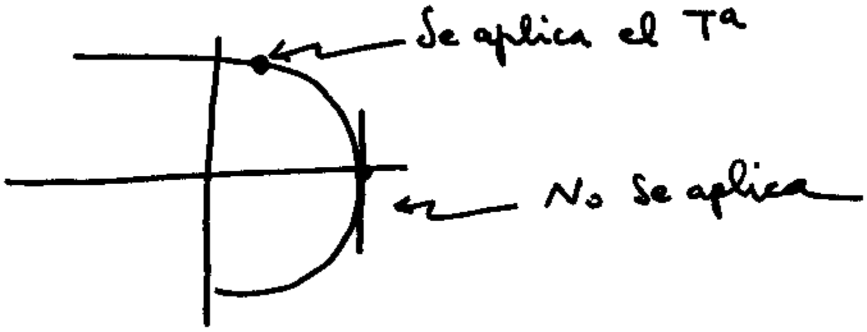
- El teorema es local: nos dice que existe $x(t)$ definida en I pero no nos dice cómo de grande es I
- El teorema se interpreta geométricamente:

$F(t,x)=0$ Ec. de una curva en implícitas

$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) \neq 0$ la recta tangente no es vertical $\Bigg] \longrightarrow$

La curva (localmente) se escribe en explícitas $x = x(t)$





Ejemplo 4 La función definida implícitamente por

$x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = t$, $x(0)=0$, es solución de

$$x' = \frac{2}{2 - \cos x}$$

Paso 1 $x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = t$, $x(0)=0$ define una función

$F(t,x) = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - t$

$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(t_0, x_0) = (0,0)$, $F(t_0,x_0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x$, $\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = 1 - \frac{1}{2} \neq 0$

El T^a de la Función implícita nos dice que hay una única función $x \in C^1(I)$ que cumple

$$x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = t \ , \ x(0)=0$$

[El T^a no nos dice el tamaño de I; con otros argumentos se puede comprobar en este caso $I = \mathbb{R}$]

Paso 2 $x(t)$ es solución

La ec. dif. $x' = f(t,x)$ esta definida en $D = \mathbb{R}^2$ pues $f(t,x) = \dfrac{2}{2-\cos x}$ no tiene singularidades

Nos falta por comprobar que cumple la ec.

$$x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = t \longrightarrow \quad x' - \left(\frac{1}{2}\cos x\right)x' = 1$$

$$\longrightarrow \quad x' = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos x} = \frac{2}{2-\cos x}.$$

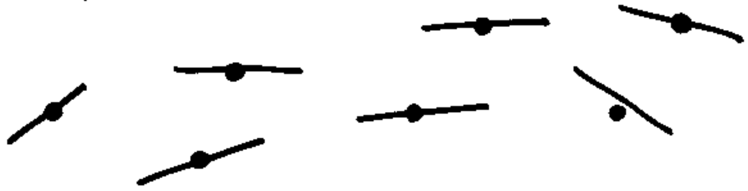
Campos de direcciones

Partimos de una ecuación diferencial

$$x' = f(t,x)$$

con $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.

Vamos a asociar a f un campo de direcciones; es decir, una regla que asigna ~~una recta~~ a cada punto de D una recta que pasa por dicho punto

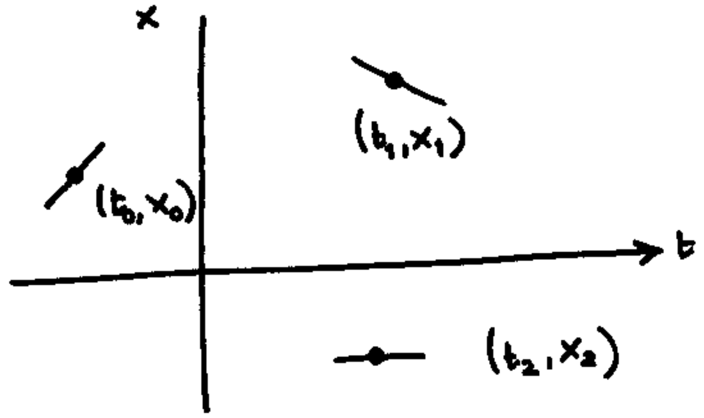


Podemos pensar en virutas de hierro imantadas o en la corriente de un río.

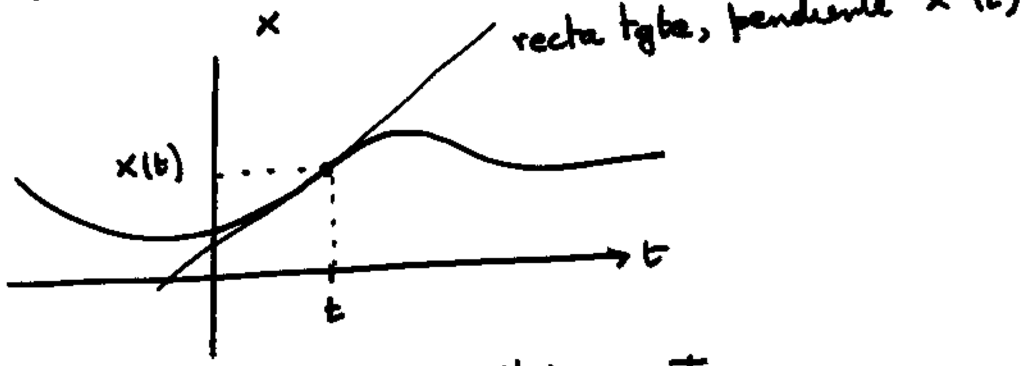
Definimos el campo

$$(t,x)\in D \longmapsto \text{recta que pasa por } (t,x) \text{ y tiene pendiente } f(t,x)$$

<u>Ejemplo</u> $f(t_0,x_0)=1$, $f(t_1,x_1)=-1$, $f(t_2,x_2)=0$



Recordamos que, dada una curva $x=x(t)$, la recta tangente en el punto $(t,x(t))$ tiene pendiente $x'(t)$



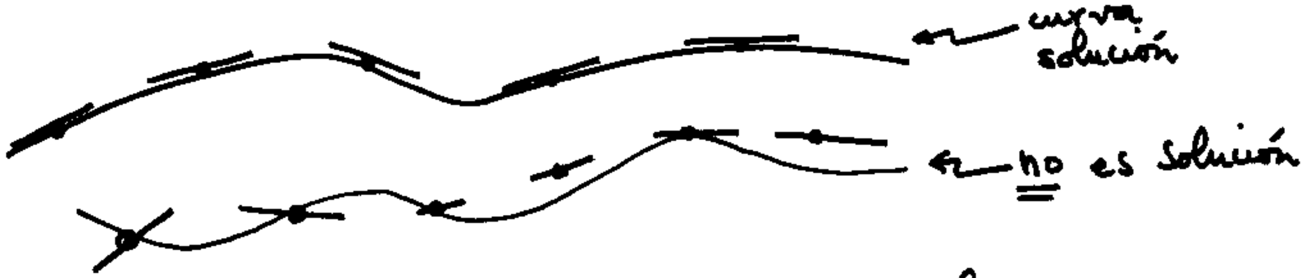
Leemos la ecuación geométricamente

$$x'(t) = f(t,x(t))$$

pendiente de la recta tangente a la curva solución

pendiente del campo de direcciones

Una curva es solución de la ecuación diferencial si es tangente en todo punto al campo de direcciones

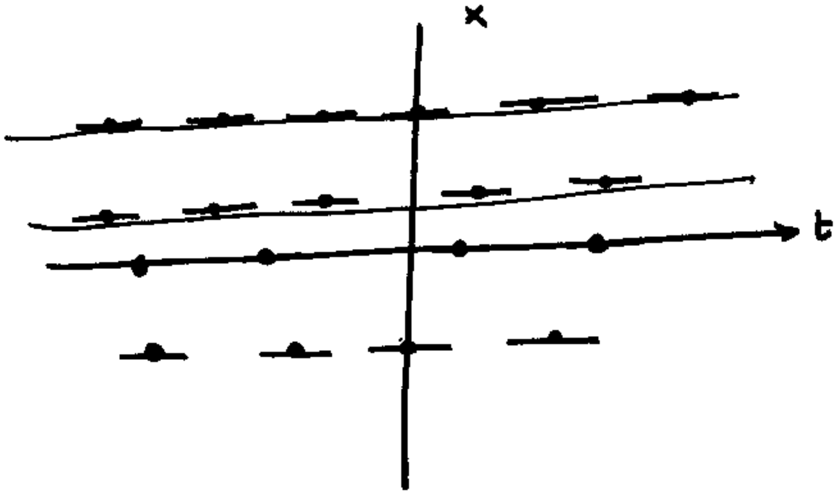


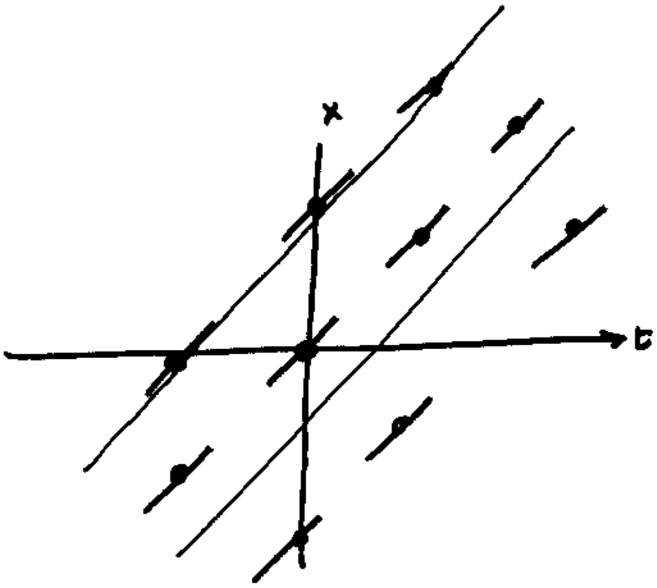
(Si el campo de direcciones fuese un proceloso océano, una frágil barquilla describiría una curva solución)

Ejemplos

1. $x' = 0$

$D = \mathbb{R}^2, \ f(t,x) \equiv 0$ La pendiente siempre es 0 → rectas horizontales





2. $x' = 1$

$D = \mathbb{R}^2, \ f(t,x) \equiv 1$

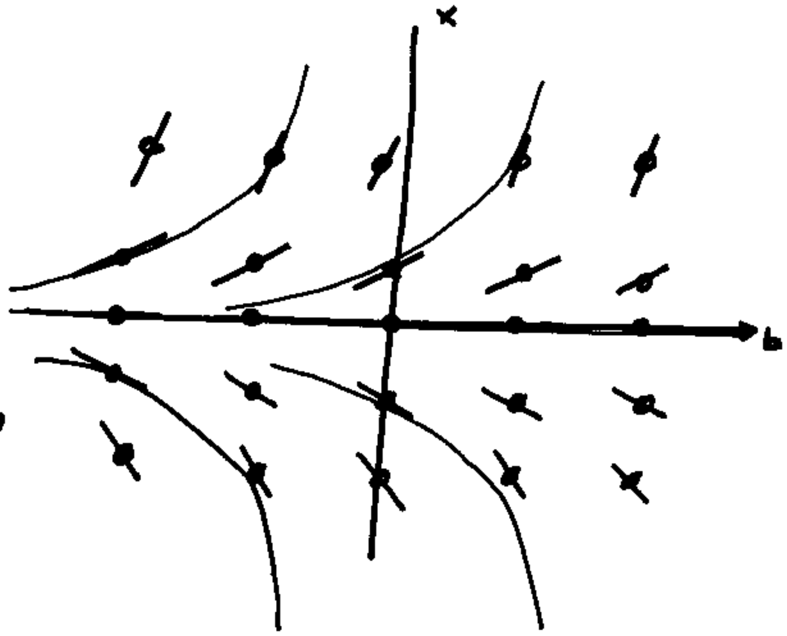
rectas paralelas a la diagonal

3. $x' = x$

$D = \mathbb{R}^2, \ f(t,x) = x$

$f(t,0) = 0, \ f(t,1) = 1$

$f(t,2) = 2, \ldots$

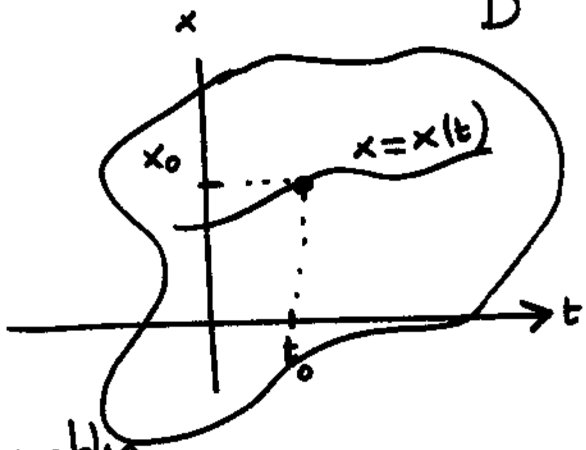


El campo de direcciones es simétrico

Condiciones iniciales

Típicamente una ecuación diferencial tiene muchas soluciones. Las soluciones de una ecuación de 1er orden se suelen presentar en familias que dependen de un parámetro. Para distinguir una solución añadiremos a la ecuación diferencial una condición inicial (un punto por el que pasa la curva solución)

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$



donde $(t_0, x_0) \in D$.

Se habla entonces del Problema de Cauchy o problema de valores iniciales. Bajo condiciones razonables sobre f se puede probar que el problema de Cauchy tiene una única solución (Si lanzamos un corcho al oceano, describe una trayectoria ...)

Ejemplo $x' = 3x \,,\; x(1) = 2$

Sols de la ec. $x(t) = k\,e^{3t}$

Determinamos k, $x(1) = 2 \Rightarrow 2 = k e^{3}$, $k = 2e^{-3}$

$$\boxed{x(t) = 2\,e^{3(t-1)} \,,\; t \in \mathbb{R}}$$ Solución

El número de condiciones iniciales dependerá del orden de la ecuación. Más adelante veremos que una ec de 2° orden requiere dos condiciones, etc.