

Lagrange critica la cuadratura del círculo

Aprender de los clásicos 4. Notas por Rafael Ortega Ríos

¿Existirán las matemáticas en el año 3000? No parece posible contestar ahora a esta pregunta pero creo que, si la respuesta acaba siendo afirmativa, también en esa época futura Lagrange será considerado uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos. Giuseppe Lodovico Lagrangia nació en Turín en 1736 y murió en París en 1813. Siendo muy joven se ganó la admiración del gran Euler, quien más adelante ejercería su influencia para que se instalara en la corte de Federico II de Prusia. Lagrange permaneció en Berlín hasta la muerte del emperador en 1786, entonces recibió una invitación de Luis XVI y se marchó a París, donde residió el resto de su vida. Hoy vamos a analizar un informe que Lagrange escribió en 1781 para la Academia Real de Berlín, en este informe da su opinión sobre un trabajo que pretendía poder realizar la cuadratura del círculo.¹

Cuando un matemático cree haber encontrado un resultado nuevo y de interés, lo normal es que escriba un artículo e intente publicarlo en alguna revista científica. Cada revista tiene su propio comité editorial, que se encarga de decidir si el trabajo merece publicación. Para formarse una opinión los editores suelen enviar el manuscrito a un experto (*referee*)² que queda encargado de escribir un informe. Es muy frecuente que los matemáticos se quejen de esta tarea de arbitraje, que les resta tiempo para su propia obra y les fuerza a intentar entender trabajos mal redactados y que en ocasiones acaban siendo incomprensibles. También los autores se quejan de las decisiones de referees y editores, pero a pesar de la mala prensa este sistema ha sido esencial para la construcción de las matemáticas en los últimos siglos. Leeremos un informe de este tipo escrito por Lagrange, en el proceso aprenderemos algo sobre el número π y sobre la rectitud de carácter.

¹Este informe se encuentra al final del quinto volumen de las obras completas de Lagrange, aparecido en 1869, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2292245/f714>

²al igual que en el fútbol la tarea de los árbitros o referees es bastante ingrata; pero a diferencia de lo que ocurre en el deporte rey, el referee es anónimo y no recibe emolumentos

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME CINQUIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXX

Antes de empezar a leer a Lagrange conviene recordar en qué consiste el

problema de la cuadratura del círculo: se da un círculo y se pretende realizar una construcción con regla y compás que produzca un cuadrado con área igual a la del círculo. Hoy sabemos que esto es imposible pero en el tiempo de Lagrange era una cuestión abierta. Se sabía que la cuadratura sería posible si y solo si el número π fuese expresable mediante una fórmula que incluyera números enteros, operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) y extracción de raíces cuadradas. En términos modernos, si π estuviese en la clase de números reales α para los que existe una cadena de cuerpos

$$K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

de manera que $\alpha \in K_n$ y cada K_{j+1} es una extensión de K_j del tipo $K_{j+1} = K_j(\alpha_{j+1})$ con $\alpha_{j+1}^2 \in K_j$. Por ejemplo, $\alpha = \frac{7}{\sqrt{8+\sqrt{3}}}$ es un número de este tipo con $\alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_2 = \sqrt{8+\sqrt{3}}$.

Comenzamos la lectura del informe:

Como la Academia me había encargado informar de esta Obra sobre la cuadratura del círculo, la he examinado con toda la atención de la que soy capaz; a pesar de ello debo confesar que no me ha sido posible descubrir los principios del Autor, ni los caminos que siguen sus cálculos. No he encontrado traza alguna de demostraciones geométricas, y menos todavía de cálculos algebraicos; y no he podido comprender lo que significan las Tablas de progresiones aritméticas de la cuadratura del círculo, que parecen servir de fundamento a toda la Obra.

Tampoco entiendo lo que el Autor denomina puntos matemáticos al cuadrado, ni lo que llama la ligadura del diámetro y la periferia [...] Al no poder decir nada del método y de los razonamientos del Autor, me contentaré con examinar el resultado, esto es, el valor que da para la proporción entre la circunferencia y el diámetro.³ Este valor se expresa por la fracción $\frac{207\frac{1}{3}}{66}$, que se reduce⁴ a la más simple $\frac{311}{99}$, y el Autor la da por exacta y rigurosa; de manera que ya por esta única razón se tiene derecho a mirar [la Obra] como incierta.

Es interesante observar que en 1768 Lambert había publicado la primera prueba de la irracionalidad de π , y precisamente en una memoria de la Academia de Berlín.

Pero, para poder juzgar mejor cuánto se aleja de la verdad, la reduzco a

³ π =Longitud de la circunferencia/Diámetro. Lagrange no usa el símbolo π que ya venía siendo empleado por algunos matemáticos, entre ellos Euler

⁴ $207\frac{1}{3}$ es el número mixto $207 + \frac{1}{3} = \frac{622}{3}$

decimales, lo que me da 3,1414... donde las dos cifras 14 se repiten infinitamente. Cuando se compara este valor con el valor conocido 3,14159..., se ve que es falso desde el cuarto decimal, y que es necesariamente menor que el verdadero valor de la proporción entre la circunferencia y el diámetro. De manera que ha de existir una infinidad de polígonos inscritos en el círculo para los que los perímetros son mayores que el pretendido valor que el Autor asigna a la circunferencia, lo que debe ser suficiente para probar la falsedad.

Snellius,⁵ siguiendo a Arquímedes y para continuar el trabajo de ese gran hombre, se ha tomado la molestia de calcular numéricamente el valor de los perímetros de algunos polígonos inscritos y circunscritos al círculo, partiendo de polígonos de 5 lados y duplicando de modo continuado el número de lados. Y se ve en las Tablas que da en su *Cyclometricus*, página 17, que el polígono inscrito de 640 lados tiene perímetro más grande que 3,14157, que como se ve es más grande que el pretendido valor de la circunferencia.⁶

El libro *Cyclometricus* apareció en 1621,
Lagrange se refiere a la frase de la página 17,

Perimeter polygoni inscripti 640 laterum erit major quam $3\frac{14157}{100000}...$

⁵Matemático de principios del siglo XVII, profesor de la Universidad de Leiden. Su nombre era Willebrord Snel van Royen pero, siguiendo la moda de su tiempo, lo latinizó. Hoy es más conocido como Snell, y es recordado sobre todo por su ley sobre la refracción de la luz

⁶ $p_n < \pi < P_n$, p_n = perímetro del polígono regular de n lados e inscrito en una circunferencia de diámetro 1, P_n se corresponde con el polígono circunscrito

VVILLEBRORDI SNELLII R.F.
CYCLOMETRICVS,

De circuli dimensioe secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima.

*Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum
inventione longe elegantissimus, &
quidem ex ratione diametri ad
suam peripheriam data.*



LVGDVNI BATAVORVM.
Ex Officinâ ELZEVIANA,
ANNO MDCLXXXII

A continuación Lagrange propone usar otras tablas elaboradas por Nicole⁷ en 1747. En particular observa que el polígono regular de 192 lados inscrito en una circunferencia de diámetro 1 tiene un perímetro mayor que $\frac{311}{99}$. Como esta parte no presenta grandes novedades dejaremos unos párrafos sin traducir.

Para continuar con la lectura del informe necesitamos conocer algunos resultados sobre aproximación de números irracionales. Dado un número

⁷Matemático que se había dado a conocer al refutar otra pretendida cuadratura del círculo. Se trata de una historia curiosa. Mathulon había encontrado un método de cuadratura del círculo y estaba tan convencido de su validez que depositó una cantidad de dinero ante un notario de Lyon, esa cantidad debería ser entregada a cualquier persona que, a juicio de la Academia de Ciencias, demostrara que su método era erróneo. Nicole refutó dicho método y donó el premio al hospital público de Lyon

rum & circumscriptorum ambitus quantitatem numeris expressam subiciam, ut inde liquidò pateat intra quos terminos ratio diametri ad perimetrum secundum Archimedem paulatim cogatur.

Posita itaque diametro partis unius, tum

Perimeter octogintanguli inscripti erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 160 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 320 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 640 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 1280 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 2560 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 5120 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 10240 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 40960 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 81920 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 163840 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

Perimeter polygoni inscripti 327680 laterum erit major quam $3\frac{14159}{10000}$, circumscripti autem minor quam $3\frac{14159}{10000}$.

C Perimeter

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, diremos que la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es una mejor aproximación⁸ de α si el error que se comete al aproximar α por $\frac{p}{q}$ es menor que el que se cometería con cualquier otra fracción de denominador inferior o igual a q ; es decir,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{m}{n} \right|$$

si $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q}$ es una fracción que cumple $n \leq q$.

⁸Se trata de la aproximación de primera especie, hay una aproximación más exigente llamada de segunda especie

Las mejores aproximaciones se construyen a partir del desarrollo en fracción continua,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Las reducidas $\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$ son mejores aproximaciones, también lo son algunas de las fracciones intermedias

$$\frac{p_n + kp_{n+1}}{q_n + kq_{n+1}}, \quad 0 < k < a_{n+2}.$$

En el caso del número π se cumple

$$\pi = [3; 7, 15, \dots] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\ddots}}}$$

y las primeras reducidas son $\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}$. La fracción $\frac{311}{99}$ es la fracción intermedia

$$\frac{311}{99} = \frac{p_0 + 14p_1}{q_0 + 14q_1}$$

y resulta ser una mejor aproximación.

Euler había escrito un libro sobre Álgebra que más tarde Lagrange había complementado con un Apéndice.

ELEMENTS OF ALGEBRA,

BY

LEONARD EULER,

TRANSLATED FROM THE FRENCH;

by Francis Horner

WITH THE

NOTES OF M. BERNOULLI, &c.

AND THE

ADDITIONS OF M. DE LA GRANGE.

THIRD EDITION,

CAREFULLY REVISED AND CORRECTED.

BY THE REV. JOHN HEWLETT, B.D. F.A.S. &c.

TO WHICH IS PREFIXED

A Memoir of the Life and Character of Euler,

BY THE LATE

FRANCIS HORNER, ESQ., M. P.

L

LONDON:

PRINTED FOR LONGMAN, HURST, REES, ORME, AND CO.
PATERNOSTER-ROW.

1822.

En ese Apéndice aparece una tabla con las mejores aproximaciones del número π , obtenidas por el procedimiento de las fracciones intermedias.

404

ADDITIONS.

CHAP. I.

creasing, and the other decreasing, towards the true ratio in question; in this manner we shall have

Fractions less than the ratio of the circumference to the diameter.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}, \frac{9}{19}, \frac{10}{21}, \frac{11}{23}, \frac{12}{25}, \frac{13}{27}, \frac{14}{29}, \frac{15}{31}, \frac{16}{33}, \frac{17}{35}, \frac{18}{37}, \frac{19}{39}, \frac{20}{41}, \frac{21}{43}, \frac{22}{45}, \frac{23}{47}, \frac{24}{49}, \frac{25}{51}, \frac{26}{53}, \frac{27}{55}, \frac{28}{57}, \frac{29}{59}, \frac{30}{61}, \frac{31}{63}, \frac{32}{65}, \frac{33}{67}, \frac{34}{69}, \frac{35}{71}, \frac{36}{73}, \frac{37}{75}, \frac{38}{77}, \frac{39}{79}, \frac{40}{81}, \frac{41}{83}, \frac{42}{85}, \frac{43}{87}, \frac{44}{89}, \frac{45}{91}, \frac{46}{93}, \frac{47}{95}, \frac{48}{97}, \frac{49}{99}, \frac{50}{101}, \frac{51}{103}, \frac{52}{105}, \frac{53}{107}, \frac{54}{109}, \frac{55}{111}, \frac{56}{113}, \frac{57}{115}, \frac{58}{117}, \frac{59}{119}, \frac{60}{121}, \frac{61}{123}, \frac{62}{125}, \frac{63}{127}, \frac{64}{129}, \frac{65}{131}, \frac{66}{133}, \frac{67}{135}, \frac{68}{137}, \frac{69}{139}, \frac{70}{141}, \frac{71}{143}, \frac{72}{145}, \frac{73}{147}, \frac{74}{149}, \frac{75}{151}, \frac{76}{153}, \frac{77}{155}, \frac{78}{157}, \frac{79}{159}, \frac{80}{161}, \frac{81}{163}, \frac{82}{165}, \frac{83}{167}, \frac{84}{169}, \frac{85}{171}, \frac{86}{173}, \frac{87}{175}, \frac{88}{177}, \frac{89}{179}, \frac{90}{181}, \frac{91}{183}, \frac{92}{185}, \frac{93}{187}, \frac{94}{189}, \frac{95}{191}, \frac{96}{193}, \frac{97}{195}, \frac{98}{197}, \frac{99}{199}, \frac{100}{201}, \frac{101}{203}, \frac{102}{205}, \frac{103}{207}, \frac{104}{209}, \frac{105}{211}, \frac{106}{213}, \frac{107}{215}, \frac{108}{217}, \frac{109}{219}, \frac{110}{221}, \frac{111}{223}, \frac{112}{225}, \frac{113}{227}, \frac{114}{229}, \frac{115}{231}, \frac{116}{233}, \frac{117}{235}, \frac{118}{237}, \frac{119}{239}, \frac{120}{241}, \frac{121}{243}, \frac{122}{245}, \frac{123}{247}, \frac{124}{249}, \frac{125}{251}, \frac{126}{253}, \frac{127}{255}, \frac{128}{257}, \frac{129}{259}, \frac{130}{261}, \frac{131}{263}, \frac{132}{265}, \frac{133}{267}, \frac{134}{269}, \frac{135}{271}, \frac{136}{273}, \frac{137}{275}, \frac{138}{277}, \frac{139}{279}, \frac{140}{281}, \frac{141}{283}, \frac{142}{285}, \frac{143}{287}, \frac{144}{289}, \frac{145}{291}, \frac{146}{293}, \frac{147}{295}, \frac{148}{297}, \frac{149}{299}, \frac{150}{301}, \frac{151}{303}, \frac{152}{305}, \frac{153}{307}, \frac{154}{309}, \frac{155}{311}, \frac{156}{313}, \frac{157}{315}, \frac{158}{317}, \frac{159}{319}, \frac{160}{321}, \frac{161}{323}, \frac{162}{325}, \frac{163}{327}, \frac{164}{329}, \frac{165}{331}, \frac{166}{333}, \frac{167}{335}, \frac{168}{337}, \frac{169}{339}, \frac{170}{341}, \frac{171}{343}, \frac{172}{345}, \frac{173}{347}, \frac{174}{349}, \frac{175}{351}, \frac{176}{353}, \frac{177}{355}, \frac{178}{357}, \frac{179}{359}, \frac{180}{361}, \frac{181}{363}, \frac{182}{365}, \frac{183}{367}, \frac{184}{369}, \frac{185}{371}, \frac{186}{373}, \frac{187}{375}, \frac{188}{377}, \frac{189}{379}, \frac{190}{381}, \frac{191}{383}, \frac{192}{385}, \frac{193}{387}, \frac{194}{389}, \frac{195}{391}, \frac{196}{393}, \frac{197}{395}, \frac{198}{397}, \frac{199}{399}, \frac{200}{401}, \frac{201}{403}, \frac{202}{405}, \frac{203}{407}, \frac{204}{409}, \frac{205}{411}, \frac{206}{413}, \frac{207}{415}, \frac{208}{417}, \frac{209}{419}, \frac{210}{421}, \frac{211}{423}, \frac{212}{425}, \frac{213}{427}, \frac{214}{429}, \frac{215}{431}, \frac{216}{433}, \frac{217}{435}, \frac{218}{437}, \frac{219}{439}, \frac{220}{441}, \frac{221}{443}, \frac{222}{445}, \frac{223}{447}, \frac{224}{449}, \frac{225}{451}, \frac{226}{453}, \frac{227}{455}, \frac{228}{457}, \frac{229}{459}, \frac{230}{461}, \frac{231}{463}, \frac{232}{465}, \frac{233}{467}, \frac{234}{469}, \frac{235}{471}, \frac{236}{473}, \frac{237}{475}, \frac{238}{477}, \frac{239}{479}, \frac{240}{481}, \frac{241}{483}, \frac{242}{485}, \frac{243}{487}, \frac{244}{489}, \frac{245}{491}, \frac{246}{493}, \frac{247}{495}, \frac{248}{497}, \frac{249}{499}, \frac{250}{501}, \frac{251}{503}, \frac{252}{505}, \frac{253}{507}, \frac{254}{509}, \frac{255}{511}, \frac{256}{513}, \frac{257}{515}, \frac{258}{517}, \frac{259}{519}, \frac{260}{521}, \frac{261}{523}, \frac{262}{525}, \frac{263}{527}, \frac{264}{529}, \frac{265}{531}, \frac{266}{533}, \frac{267}{535}, \frac{268}{537}, \frac{269}{539}, \frac{270}{541}, \frac{271}{543}, \frac{272}{545}, \frac{273}{547}, \frac{274}{549}, \frac{275}{551}, \frac{276}{553}, \frac{277}{555}, \frac{278}{557}, \frac{279}{559}, \frac{280}{561}, \frac{281}{563}, \frac{282}{565}, \frac{283}{567}, \frac{284}{569}, \frac{285}{571}, \frac{286}{573}, \frac{287}{575}, \frac{288}{577}, \frac{289}{579}, \frac{290}{581}, \frac{291}{583}, \frac{292}{585}, \frac{293}{587}, \frac{294}{589}, \frac{295}{591}, \frac{296}{593}, \frac{297}{595}, \frac{298}{597}, \frac{299}{599}, \frac{300}{601}, \frac{301}{603}, \frac{302}{605}, \frac{303}{607}, \frac{304}{609}, \frac{305}{611}, \frac{306}{613}, \frac{307}{615}, \frac{308}{617}, \frac{309}{619}, \frac{310}{621}, \frac{311}{623}, \frac{312}{625}, \frac{313}{627}, \frac{314}{629}, \frac{315}{631}, \frac{316}{633}, \frac{317}{635}, \frac{318}{637}, \frac{319}{639}, \frac{320}{641}, \frac{321}{643}, \frac{322}{645}, \frac{323}{647}, \frac{324}{649}, \frac{325}{651}, \frac{326}{653}, \frac{327}{655}, \frac{328}{657}, \frac{329}{659}, \frac{330}{661}, \frac{331}{663}, \frac{332}{665}, \frac{333}{667}, \frac{334}{669}, \frac{335}{671}, \frac{336}{673}, \frac{337}{675}, \frac{338}{677}, \frac{339}{679}, \frac{340}{681}, \frac{341}{683}, \frac{342}{685}, \frac{343}{687}, \frac{344}{689}, \frac{345}{691}, \frac{346}{693}, \frac{347}{695}, \frac{348}{697}, \frac{349}{699}, \frac{350}{701}, \frac{351}{703}, \frac{352}{705}, \frac{353}{707}, \frac{354}{709}, \frac{355}{711}, \frac{356}{713}, \frac{357}{715}, \frac{358}{717}, \frac{359}{719}, \frac{360}{721}, \frac{361}{723}, \frac{362}{725}, \frac{363}{727}, \frac{364}{729}, \frac{365}{731}, \frac{366}{733}, \frac{367}{735}, \frac{368}{737}, \frac{369}{739}, \frac{370}{741}, \frac{371}{743}, \frac{372}{745}, \frac{373}{747}, \frac{374}{749}, \frac{375}{751}, \frac{376}{753}, \frac{377}{755}, \frac{378}{757}, \frac{379}{759}, \frac{380}{761}, \frac{381}{763}, \frac{382}{765}, \frac{383}{767}, \frac{384}{769}, \frac{385}{771}, \frac{386}{773}, \frac{387}{775}, \frac{388}{777}, \frac{389}{779}, \frac{390}{781}, \frac{391}{783}, \frac{392}{785}, \frac{393}{787}, \frac{394}{789}, \frac{395}{791}, \frac{396}{793}, \frac{397}{795}, \frac{398}{797}, \frac{399}{799}, \frac{400}{801}, \frac{401}{803}, \frac{402}{805}, \frac{403}{807}, \frac{404}{809}, \frac{405}{811}, \frac{406}{813}, \frac{407}{815}, \frac{408}{817}, \frac{409}{819}, \frac{410}{821}, \frac{411}{823}, \frac{412}{825}, \frac{413}{827}, \frac{414}{829}, \frac{415}{831}, \frac{416}{833}, \frac{417}{835}, \frac{418}{837}, \frac{419}{839}, \frac{420}{841}, \frac{421}{843}, \frac{422}{845}, \frac{423}{847}, \frac{424}{849}, \frac{425}{851}, \frac{426}{853}, \frac{427}{855}, \frac{428}{857}, \frac{429}{859}, \frac{430}{861}, \frac{431}{863}, \frac{432}{865}, \frac{433}{867}, \frac{434}{869}, \frac{435}{871}, \frac{436}{873}, \frac{437}{875}, \frac{438}{877}, \frac{439}{879}, \frac{440}{881}, \frac{441}{883}, \frac{442}{885}, \frac{443}{887}, \frac{444}{889}, \frac{445}{891}, \frac{446}{893}, \frac{447}{895}, \frac{448}{897}, \frac{449}{899}, \frac{450}{901}, \frac{451}{903}, \frac{452}{905}, \frac{453}{907}, \frac{454}{909}, \frac{455}{911}, \frac{456}{913}, \frac{457}{915}, \frac{458}{917}, \frac{459}{919}, \frac{460}{921}, \frac{461}{923}, \frac{462}{925}, \frac{463}{927}, \frac{464}{929}, \frac{465}{931}, \frac{466}{933}, \frac{467}{935}, \frac{468}{937}, \frac{469}{939}, \frac{470}{941}, \frac{471}{943}, \frac{472}{945}, \frac{473}{947}, \frac{474}{949}, \frac{475}{951}, \frac{476}{953}, \frac{477}{955}, \frac{478}{957}, \frac{479}{959}, \frac{480}{961}, \frac{481}{963}, \frac{482}{965}, \frac{483}{967}, \frac{484}{969}, \frac{485}{971}, \frac{486}{973}, \frac{487}{975}, \frac{488}{977}, \frac{489}{979}, \frac{490}{981}, \frac{491}{983}, \frac{492}{985}, \frac{493}{987}, \frac{494}{989}, \frac{495}{991}, \frac{496}{993}, \frac{497}{995}, \frac{498}{997}, \frac{499}{999}, \frac{500}{1001}, \frac{501}{1003}, \frac{502}{1005}, \frac{503}{1007}, \frac{504}{1009}, \frac{505}{1011}, \frac{506}{1013}, \frac{507}{1015}, \frac{508}{1017}, \frac{509}{1019}, \frac{510}{1021}, \frac{511}{1023}, \frac{512}{1025}, \frac{513}{1027}, \frac{514}{1029}, \frac{515}{1031}, \frac{516}{1033}, \frac{517}{1035}, \frac{518}{1037}, \frac{519}{1039}, \frac{520}{1041}, \frac{521}{1043}, \frac{522}{1045}, \frac{523}{1047}, \frac{524}{1049}, \frac{525}{1051}, \frac{526}{1053}, \frac{527}{1055}, \frac{528}{1057}, \frac{529}{1059}, \frac{530}{1061}, \frac{531}{1063}, \frac{532}{1065}, \frac{533}{1067}, \frac{534}{1069}, \frac{535}{1071}, \frac{536}{1073}, \frac{537}{1075}, \frac{538}{1077}, \frac{539}{1079}, \frac{540}{1081}, \frac{541}{1083}, \frac{542}{1085}, \frac{543}{1087}, \frac{544}{1089}, \frac{545}{1091}, \frac{546}{1093}, \frac{547}{1095}, \frac{548}{1097}, \frac{549}{1099}, \frac{550}{1101}, \frac{551}{1103}, \frac{552}{1105}, \frac{553}{1107}, \frac{554}{1109}, \frac{555}{1111}, \frac{556}{1113}, \frac{557}{1115}, \frac{558}{1117}, \frac{559}{1119}, \frac{560}{1121}, \frac{561}{1123}, \frac{562}{1125}, \frac{563}{1127}, \frac{564}{1129}, \frac{565}{1131}, \frac{566}{1133}, \frac{567}{1135}, \frac{568}{1137}, \frac{569}{1139}, \frac{570}{1141}, \frac{571}{1143}, \frac{572}{1145}, \frac{573}{1147}, \frac{574}{1149}, \frac{575}{1151}, \frac{576}{1153}, \frac{577}{1155}, \frac{578}{1157}, \frac{579}{1159}, \frac{580}{1161}, \frac{581}{1163}, \frac{582}{1165}, \frac{583}{1167}, \frac{584}{1169}, \frac{585}{1171}, \frac{586}{1173}, \frac{587}{1175}, \frac{588}{1177}, \frac{589}{1179}, \frac{590}{1181}, \frac{591}{1183}, \frac{592}{1185}, \frac{593}{1187}, \frac{594}{1189}, \frac{595}{1191}, \frac{596}{1193}, \frac{597}{1195}, \frac{598}{1197}, \frac{599}{1199}, \frac{600}{1201}, \frac{601}{1203}, \frac{602}{1205}, \frac{603}{1207}, \frac{604}{1209}, \frac{605}{1211}, \frac{606}{1213}, \frac{607}{1215}, \frac{608}{1217}, \frac{609}{1219}, \frac{610}{1221}, \frac{611}{1223}, \frac{612}{1225}, \frac{613}{1227}, \frac{614}{1229}, \frac{615}{1231}, \frac{616}{1233}, \frac{617}{1235}, \frac{618}{1237}, \frac{619}{1239}, \frac{620}{1241}, \frac{621}{1243}, \frac{622}{1245}, \frac{623}{1247}, \frac{624}{1249}, \frac{625}{1251}, \frac{626}{1253}, \frac{627}{1255}, \frac{628}{1257}, \frac{629}{1259}, \frac{630}{1261}, \frac{631}{1263}, \frac{632}{1265}, \frac{633}{1267}, \frac{634}{1269}, \frac{635}{1271}, \frac{636}{1273}, \frac{637}{1275}, \frac{638}{1277}, \frac{639}{1279}, \frac{640}{1281}, \frac{641}{1283}, \frac{642}{1285}, \frac{643}{1287}, \frac{644}{1289}, \frac{645}{1291}, \frac{646}{1293}, \frac{647}{1295}, \frac{648}{1297}, \frac{649}{1299}, \frac{650}{1301}, \frac{651}{1303}, \frac{652}{1305}, \frac{653}{1307}, \frac{654}{1309}, \frac{655}{1311}, \frac{656}{1313}, \frac{657}{1315}, \frac{658}{1317}, \frac{659}{1319}, \frac{660}{1321}, \frac{661}{1323}, \frac{662}{1325}, \frac{663}{1327}, \frac{664}{1329}, \frac{665}{1331}, \frac{666}{1333}, \frac{667}{1335}, \frac{668}{1337}, \frac{669}{1339}, \frac{670}{1341}, \frac{671}{1343}, \frac{672}{1345}, \frac{673}{1347}, \frac{674}{1349}, \frac{675}{1351}, \frac{676}{1353}, \frac{677}{1355}, \frac{678}{1357}, \frac{679}{1359}, \frac{680}{1361}, \frac{681}{1363}, \frac{682}{1365}, \frac{683}{1367}, \frac{684}{1369}, \frac{685}{1371}, \frac{686}{1373}, \frac{687}{1375}, \frac{688}{1377}, \frac{689}{1379}, \frac{690}{1381}, \frac{691}{1383}, \frac{692}{1385}, \frac{693}{1387}, \frac{694}{1389}, \frac{695}{1391}, \frac{696}{1393}, \frac{697}{1395}, \frac{698}{1397}, \frac{699}{1399}, \frac{700}{1401}, \frac{701}{1403}, \frac{702}{1405}, \frac{703}{1407}, \frac{704}{1409}, \frac{705}{1411}, \frac{706}{1413}, \frac{707}{1415}, \frac{708}{1417}, \frac{709}{1419}, \frac{710}{1421}, \frac{711}{1423}, \frac{712}{1425}, \frac{713}{1427}, \frac{714}{1429}, \frac{715}{1431}, \frac{716}{1433}, \frac{717}{1435}, \frac{718}{1437}, \frac{719}{1439}, \frac{720}{1441}, \frac{721}{1443}, \frac{722}{1445}, \frac{723}{1447}, \frac{724}{1449}, \frac{725}{1451}, \frac{726}{1453}, \frac{727}{1455}, \frac{728}{1457}, \frac{729}{1459}, \frac{730}{1461}, \frac{731}{1463}, \frac{732}{1465}, \frac{733}{1467}, \frac{734}{1469}, \frac{735}{1471}, \frac{736}{1473}, \frac{737}{1475}, \frac{738}{1477}, \frac{739}{1479}, \frac{740}{1481}, \frac{741}{1483}, \frac{742}{1485}, \frac{743}{1487}, \frac{744}{1489}, \frac{745}{1491}, \frac{746}{1493}, \frac{747}{1495}, \frac{748}{1497}, \frac{749}{1499}, \frac{750}{1501}, \frac{751}{1503}, \frac{752}{1505}, \frac{753}{1507}, \frac{754}{1509}, \frac{755}{1511}, \frac{756}{1513}, \frac{757}{1515}, \frac{758}{1517}, \frac{759}{1519}, \frac{760}{1521}, \frac{761}{1523}, \frac{762}{1525}, \frac{763}{1527}, \frac{764}{1529}, \frac{765}{1531}, \frac{766}{1533}, \frac{767}{1535}, \frac{768}{1537}, \frac{769}{1539}, \frac{770}{1541}, \frac{771}{1543}, \frac{772}{1545}, \frac{773}{1547}, \frac{774}{1549}, \frac{775}{1551}, \frac{776}{1553}, \frac{777}{1555}, \frac{778}{1557}, \frac{779}{1559}, \frac{780}{1561}, \frac{781}{1563}, \frac{782}{1565}, \frac{783}{1567}, \frac{784}{1569}, \frac{785}{1571}, \frac{786}{1573}, \frac{787}{1575}, \frac{788}{1577}, \frac{789}{1579}, \frac{790}{1581}, \frac{791}{1583}, \frac{792}{1585}, \frac{793}{1587}, \frac{794}{1589}, \frac{795}{1591}, \frac{796}{1593}, \frac{797}{1595}, \frac{798}{1597}, \frac{799}{1599}, \frac{800}{1601}, \frac{801}{1603}, \frac{802}{1605}, \frac{803}{1607}, \frac{804}{1609}, \frac{805}{1611}, \frac{806}{1613}, \frac{807}{1615}, \frac{808}{1617}, \frac{809}{1619}, \frac{810}{1621}, \frac{811}{1623}, \frac{812}{1625}, \frac{813}{1627}, \frac{814}{1629}, \frac{815}{1631}, \frac{816}{1633}, \frac{817}{1635}, \frac{818}{1637}, \frac{819}{1639}, \frac{820}{1641}, \frac{821}{1643}, \frac{822}{1645}, \frac{823}{1647}, \frac{824}{1649}, \frac{825}{1651}, \frac{826}{1653}, \frac{827}{1655}, \frac{828}{1657}, \frac{829}{1659}, \frac{830}{1661}, \frac{831}{1663}, \frac{832}{1665}, \frac{833}{1667}, \frac{834}{1669}, \frac{835}{1671}, \frac{836}{1673}, \frac{837}{1675}, \frac{838}{1677}, \frac{839}{1679}, \frac{840}{1681}, \frac{841}{1683}, \frac{842}{1685}, \frac{843}{1687}, \frac{844}{1689}, \frac{845}{1691}, \frac{846}{1693}, \frac{847}{1695}, \frac{848}{1697}, \frac{849}{1699}, \frac{850}{1701}, \frac{851}{1703}, \frac{852}{1705}, \frac{853}{1707}, \frac{854}{1709}, \frac{855}{1711}, \frac{856}{1713}, \frac{857}{1715}, \frac{858}{1717}, \frac{859}{1719}, \frac{860}{1721}, \frac{861}{1723}, \frac{862}{1725}, \frac{863}{1727}, \frac{864}{1729}, \frac{865}{1731}, \frac{866}{1733}, \frac{867}{1735}, \frac{868}{1737}, \frac{869}{1739}, \frac{870}{1741}, \frac{871}{1743}, \frac{872}{1745}, \frac{873}{1747}, \frac{874}{1749}, \frac{875}{1751}, \frac{876}{1753}, \frac{877}{1755}, \frac{878}{1757}, \frac{879}{1759}, \frac{880}{1761}, \frac{881}{1763}, \frac{882}{1765}, \frac{883}{1767}, \frac{884}{1769}, \frac{885}{1771}, \frac{886}{1773}, \frac{887}{1775}, \frac{888}{1777}, \frac{889}{1779}, \frac{890}{1781}, \frac{891}{1783}, \frac{892}{1785}, \frac{893}{1787}, \frac{894}{1789}, \frac{895}{1791}, \frac{896}{1793}, \frac{897}{1795}, \frac{898}{1797}, \frac{899}{1799}, \frac{900}{1801}, \frac{901}{1803}, \frac{902}{1805}, \frac{903}{1807}, \frac{904}{1809}, \frac{905}{1811}, \frac{906}{1813}, \frac{907}{1815}, \frac{908}{1817}, \frac{909}{1819}, \frac{910}{1821}, \frac{911}{1823}, \frac{912}{1825}, \frac{913}{1827}, \frac{914}{1829}, \frac{915}{1831}, \frac{916}{1833}, \frac{917}{1835}, \frac{918}{1837}, \frac{919}{1839}, \frac{920}{1841}, \frac{921}{1843}, \frac{922}{1845}, \frac{923}{1847}, \frac{924}{1849}, \frac{925}{1851}, \frac{926}{1853}, \frac{927}{1855}, \frac{928}{1857}, \frac{929}{1859}, \frac{930}{1861}, \frac{931}{1863}, \frac{932}{1865}, \frac{933}{1867}, \frac{934}{1869}, \frac{935}{1871}, \frac{936}{1873}, \frac{937}{1875}, \frac{938}{1877}, \frac{939}{1879}, \frac{940}{1881}, \frac{941}{1883}, \frac{942}{1885}, \frac{943}{1887}, \frac{944}{1889}, \frac{945}{1891}, \frac{946}{1893}, \frac{947}{1895}, \frac{948}{1897}, \frac{949}{1899}, \frac{950}{1901}, \frac{951}{1903}, \frac{952}{1905}, \frac{953}{1907}, \frac{954}{1909}, \frac{955}{1911}, \frac{956}{1913}, \frac{957}{1915}, \frac{958}{1917}, \frac{959}{1919}, \frac{960}{1921}, \frac{961}{1923}, \frac{962}{1925}, \frac{963}{1927}, \frac{964}{1929}, \frac{965}{1931}, \frac{966}{1933}, \frac{967}{1935}, \frac{968}{1937}, \frac{969}{1939}, \frac{970}{1941}, \frac{971}{1943}, \frac{972}{1945}, \frac{973}{1947}, \frac{974}{1949}, \frac{975}{1951}, \frac{976}{1953}, \frac{977}{1955}, \frac{978}{1957}, \frac{979}{1959}, \frac{980}{1961}, \frac{981}{1963}, \frac{982}{1965}, \frac{983}{1967}, \frac{984}{1969}, \frac{985$

Debo observar además que la fracción $\frac{311}{99}$, aceptada por el Autor, es una de las de la sucesión de fracciones convergentes hacia la proporción entre la periferia y el diámetro, pero más pequeña que esa proporción, como se ve en la Tabla que he dado en las Additions à l'Algèbre de M. Euler [...] Como consecuencia esta fracción tiene la ventaja de que aproxima con más precisión de lo que podría hacer cualquier fracción más pequeña que el verdadero valor y para la que el denominador fuese menor que 99; pero aproxima menos que la fracción que le sigue inmediatamente y que es $\frac{333}{106}$; y todavía menos que la fracción⁹ $\frac{355}{113}$ que es la de Metius,¹⁰ aunque esta es mayor que el valor exacto.

Leamos ahora las conclusiones finales del informe.

Así pues concluyo:

- 1° Que la cuadratura propuesta es errónea, puesto que contradice resultados conocidos, y da para la circunferencia del círculo un valor menor al del polígono inscrito de 192 lados;
- 2° Que no es posible emitir juicio alguno sobre los métodos y razonamientos del Autor, puesto que son ininteligibles;
- 3° Que convendría exhortar a este Autor, que por otra parte parece bastante laborioso, a emplear su tiempo y su trabajo en cuestiones que estén más a su alcance y sobre todo que puedan ser de mayor utilidad; pues, además de que no se ha prometido ni se espera premio alguno para aquel que cuadrará el círculo, tampoco resultaría de esta cuadratura ventaja real alguna para la Geometría. En efecto, si fuera posible encontrar una expresión finita de la proporción entre la circunferencia y el diámetro, esta expresión tendría necesariamente tanta complicación de raíces,¹¹ que para usarla siempre sería necesario reducirla a decimales, y por tanto a un valor aproximado; en tanto que ya se tienen valores que aproximan tan bien la verdadera medida de la circunferencia del círculo, que el error es menor que una fracción que tuviera la unidad por numerador, y por denominador la unidad seguida de

⁹Hay un error en el denominador, $\frac{355}{113} = \frac{22+333}{7+106}$. En el Álgebra de Euler aparece la fracción correcta, probablemente se trata de una errata en la edición de las Obras de Lagrange

¹⁰Estudió en Leiden y tuvo a Snellius como profesor, más adelante fue profesor de la Universidad de Franecker. Parece ser que el padre de Metius, también matemático, había encontrado la fracción $\frac{355}{113}$ como aproximación de π y este hallazgo lo recogió Metius en una de sus publicaciones

¹¹Probablemente en ese comentario Lagrange tenía en mente la posibilidad de que π fuese raíz de algún polinomio con coeficientes enteros y grado una potencia de 2

126 ceros;¹² pues así es el valor encontrado por Lagny¹³ en las Mémoires de Paris de 1719.¹⁴

l'une par addition continuelle, & l'autre par des additions
& foustractions alternatives, que le diametre étant exprimé
par l'unité suivie de cent-vingt-sept zero, la circonference
du Cercle est

3 141. 5926. 5358. 9793. 2384. 6264. 3383. 2795.
0288. 4197. 1693. 9937. 5105. 8209. 7494. 4592.
3078. 1640. 6286. 2089. 9862. 8034. 8253. 4211.
7067. 9821. 4808. 6513. 2723. 0664. 7093.
8446. + & 8447. —

Ce calcul dont je ne veux ici que prendre datte, & dont
je donnerai la démonstration tout au long dans un autre
Memoire, a été fait avec une extreme facilité. En matiere
de grands calculs il ne suffit pas que la methode soit, pour
ainsi dire, infaillible de droit, il faut par le concours de
deux

Estas consideraciones finales muestran que Lagrange tenía el problema de la cuadratura por un problema muy difícil y quizás no demasiado interesante. Pensaba que el producto final de la cuadratura, si algún día esta se llegaba a realizar, sería una fórmula exacta para el número π , fórmula que debería ser muy complicada y sin valor práctico. Estos argumentos habrían sido muy sensatos si el problema de la cuadratura hubiera sido soluble, pero hoy sabemos que la cuadratura es imposible porque el número π es trascendente. De manera que el problema de la cuadratura acabó siendo esencial para el nacimiento de la teoría de los números trascendentes, un campo hermoso a mitad de camino entre el Álgebra y el Análisis.¹⁵

No parece fácil acertar en las predicciones sobre el desarrollo de las matemáticas, y menos aún cuando se hacen a mil años vista.

¹²10⁻¹²⁶

¹³Thomas Fantet de Lagny nació en 1660 y vivió en la época del desarrollo del Cálculo Infinitesimal pero sus matemáticas, de tipo computacional, tenían un perfil más clásico

¹⁴Parece ser que había un error en el dígito 113

¹⁵Recordamos que un número se dice trascendente cuando no se puede obtener como raíz de un polinomio con coeficientes enteros. En la primera mitad del siglo XIX Liouville construyó los primeros números trascendentes, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$; en 1873 Hermite probó la trascendencia del número e y poco después, en 1882, Lindemann probó la trascendencia de ciertas potencias de e , lo que implicaba la trascendencia de π . Para 1900 las cuestiones sobre números trascendentes se consideraban lo bastante importantes como para que Hilbert les dedicara un problema de su famosa lista

RAPPORTS (*).

(*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin,*
années 1781 et 1782.)

Rapport d'une quadrature du cercle.

L'Académie m'ayant chargé de lui rendre compte de cet Ouvrage sur la quadrature du cercle, je l'ai examiné avec toute l'attention dont je suis capable; mais je suis obligé d'avouer qu'il ne m'a pas été possible de découvrir les principes de l'Auteur, ni la marche de ses opérations. Je n'y ai trouvé nulle trace de démonstrations géométriques, et moins encore de calculs algébriques; et je n'ai pas pu comprendre ce que signifient les Tables des progressions arithmétiques de la quadrature du cercle, lesquelles paraissent servir de fondement à tout l'Ouvrage.

Je n'entends pas non plus ce que l'Auteur nomme *points carrés mathématiques*, ni ce qu'il appelle *liaison du diamètre et de la périphérie*, et qu'il fait consister dans la somme de leurs valeurs.

Ne pouvant donc rien dire de la méthode et des raisonnements de l'Auteur, je me contenterai d'en examiner le résultat, c'est-à-dire la valeur qu'il donne pour le rapport de la circonférence au diamètre. Cette valeur est exprimée par la fraction $\frac{207\frac{1}{2}}{66}$, laquelle se réduit à celle-ci plus

(*) Nous reproduisons ici les deux seuls Rapports de Lagrange que l'*Histoire de l'Académie de Berlin* nous ait transmis. Bien que les Mémoires dont l'illustre Géomètre avait à rendre compte soient absolument dépourvus d'intérêt, nous avons le devoir de conserver les Rapports qui les concernent.
(*Note de l'Éditeur.*)

simple $\frac{311}{99}$, et l'Auteur la donne pour exacte et rigoureuse; de sorte que par cette seule raison on est déjà en droit de la regarder comme fausse.

Mais, pour pouvoir mieux juger de combien elle s'éloigne de la vérité, je la réduis en décimales, ce qui me donne 3,1414..., où les deux chiffres 14 reviennent à l'infini. Cette valeur étant comparée avec la valeur connue 3,14159..., on voit qu'elle est fausse dès la quatrième décimale, et qu'elle est nécessairement moindre que la véritable valeur du rapport de la circonférence au diamètre. Ainsi il existe nécessairement une infinité de polygones inscrits au cercle dont les périmètres sont plus grands que la prétendue valeur que l'Auteur assigne à la circonférence, ce qui doit suffire pour en prouver la fausseté.

Snellius, à l'exemple d'Archimède et pour renchérir sur le travail de ce grand homme, a pris la peine de calculer en nombres la valeur des périmètres de quelques polygones inscrits et circonscrits au cercle, en partant des polygones de 5 côtés et doublant continuellement le nombre des côtés. Et l'on voit par les Tables qu'il en donne dans son *Cyclometricus*, page 17, que le polygone inscrit de 640 côtés a son périmètre plus grand que 3,14157, ce qui est, comme l'on voit, plus grand que la valeur prétendue de la circonférence.

Mais on peut trouver des polygones inscrits d'un moindre nombre de côtés dont les périmètres soient aussi plus grands que cette valeur. Il n'y a pour cela qu'à consulter les Tables que M. Nicole a données dans les *Mémoires de Paris* pour l'année 1747, à l'occasion d'une nouvelle prétendue quadrature du cercle.

Dans ces Tables on trouve les valeurs numériques des aires et des périmètres des polygones inscrits et circonscrits au cercle, dans lesquels le nombre des côtés augmente dans la progression double depuis le triangle équilatéral jusqu'au polygone régulier de $3 \cdot 2^{17}$ ou 393216 côtés, valeurs qui sont poussées par l'extraction des racines carrées jusqu'à 15 décimales.

On voit donc par ces Tables que le polygone inscrit de 96 côtés a pour périmètre (en supposant le diamètre 1) 3,14103195..., ce qui est moins

dre que la valeur proposée; mais que le polygone suivant de 192 côtés a pour périmètre 3,14145247..., quantité plus grande que cette valeur.

Ainsi la prétendue valeur de la circonférence du cercle se trouve moindre que le périmètre du polygone régulier de 192 côtés; ce qui est une preuve palpable de sa fausseté, puisqu'il saute aux yeux que la périphérie du cercle est nécessairement plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit.

Si l'Auteur savait assez de Géométrie et d'Arithmétique pour faire lui-même le calcul de ce polygone, il pourrait se convaincre de la vérité de ce que je viens d'avancer. Et, s'il voulait se fier pour cet effet aux Tables trigonométriques déjà calculées, il n'aurait qu'à remarquer que le côté du polygone inscrit de 192 côtés étant la corde de l'angle $\frac{360^\circ}{192}$, et par conséquent le double du sinus de la moitié de cet angle, c'est-à-dire de l'angle $\frac{360^\circ}{384} = 56'15''$, il suffit de multiplier le sinus de $56'15''$ par 384 pour avoir le périmètre cherché du polygone de 192 côtés.

Faisant donc le calcul par les logarithmes, on a

$$\log \sin 56'15'' = 8,2138293$$

$$\log 384 = 2,5843312$$

$$\hline 0,7981605$$

Nombre : 6,28290.

Ainsi 6,28290 est la valeur approchée de ce périmètre en prenant le rayon pour l'unité; donc, si l'on prend le diamètre pour l'unité, on a 3,14145 pour la valeur dont il s'agit, laquelle s'accorde, comme l'on voit, avec celle de M. Nicole, et qui est évidemment plus grande que celle de la prétendue quadrature.

Je dois remarquer au reste que la fraction $\frac{311}{99}$, adoptée par l'Auteur, est une de celles de la suite des fractions convergentes vers le rapport de la périphérie au diamètre, mais plus petites que ce rapport, comme on le voit par la Table que j'en ai donnée dans les *Additions à l'Algèbre de M. Euler*, page 440.

Ainsi cette fraction a l'avantage qu'elle approche plus de la vérité que ne pourrait faire aucune autre fraction plus petite que la vraie valeur et dont le dénominateur serait moindre que 99; mais elle approche moins que la fraction qui la suit immédiatement et qui est $\frac{333}{106}$; et moins encore que la fraction $\frac{355}{113}$ qui est celle de Metius, mais qui est plus grande que la vraie valeur. Je conclus donc :

1° Que la quadrature proposée est fausse, parce qu'elle diffère des résultats connus, et qu'elle donne pour la circonférence du cercle une valeur moindre que le périmètre du polygone inscrit de 192 côtés;

2° Que l'on ne peut porter aucun jugement sur la méthode et les raisonnements de l'Auteur, parce qu'ils sont inintelligibles;

3° Qu'il conviendrait d'exhorter cet Auteur, qui paraît d'ailleurs assez laborieux, à employer son temps et son travail à des objets qui soient plus à sa portée et surtout qui puissent être d'une plus grande utilité; car, outre qu'il n'y a aucune récompense promise ou à espérer pour celui qui carrera le cercle, il ne résulterait même de cette quadrature aucun avantage réel pour la Géométrie. En effet, s'il était possible de trouver une expression finie du rapport de la circonférence au diamètre, cette expression serait nécessairement si compliquée de radicaux, que pour en faire usage il faudrait toujours la réduire en décimales, et par conséquent à une valeur seulement approchée; or on a déjà des valeurs qui approchent si près de la vraie mesure de la circonférence du cercle, que l'erreur est moindre qu'une fraction qui aurait l'unité pour numérateur, et pour dénominateur l'unité suivie de 126 zéros; car telle est la valeur trouvée par M. Lagny dans les *Mémoires de Paris* de 1719.

*Rapport fait à l'Académie le 3 août 1782 d'un Mémoire intitulé :
Méthode pour connaître si la Terre est aplatie vers les pôles
et renflée sous l'équateur.*

La méthode que l'Auteur de ce Mémoire propose pour déterminer la figure de la Terre avec plus de précision et moins de peine qu'on ne l'a