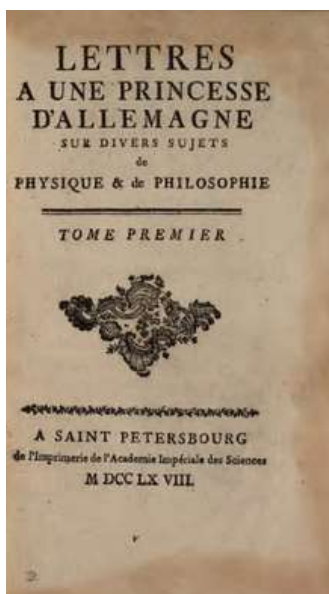


Euler, la escala musical y una princesa

Aprender de los clásicos 5. Notas por Rafael Ortega Ríos

En 1741, procedente de Rusia, Euler llegó a la corte prusiana. Durante veinticinco años permaneció en Berlín y desde allí, entre 1760 y 1762, escribió más de doscientas cartas dirigidas a la joven Sophie Charlotte Frederike Von Brandenburg-Schwedt. Esta princesa, pariente del rey Federico, recibió así una extensa instrucción científica. Una vez regresó a San Petersburgo, Euler publicó en 1768 el libro *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversas materias de Física y Filosofía*. La edición original estaba escrita en francés pero muy pronto se tradujo a un gran número de idiomas y se convirtió en el primer *best seller* de la literatura de divulgación científica. Revisaremos algunas de las cartas iniciales, que tratan de las relaciones entre la música y las matemáticas.



CARTA III

(20 de Abril de 1760.)

Del sonido y de su velocidad

[...] cuando una cuerda efectúa 100 vibraciones en un segundo y otra cuerda 200, sus sonidos serán esencialmente distintos: el primero será más grave o más bajo, el otro más agudo o más alto. Aquí radica la verdadera diferencia entre los sonidos graves y agudos y sobre ella trata toda la música, que enseña a combinar sonidos que difieren entre sí por graves o agudos pero que puestos en conjunto producen una agradable armonía [...]

Así el sonido que se designa por la letra C produce poco más o menos 100 vibraciones por segundo y el sonido representado por la letra $\bar{\bar{c}}$ produce 1600 vibraciones en un segundo [...]

En sus cartas Euler usa la notación alemana, $Do = C$, $Re = D$, $Mi = E$, $Fa = F$, $Sol = G$, $La = A$, $Si = H$. Los signos $C, c, \bar{c}, \bar{\bar{c}}$ representan las notas *do* en las octavas sucesivas. Como veremos, cada una se obtiene doblando el número de vibraciones de la anterior. De ahí los números aproximados de vibraciones por segundo 100, 200, 400, 800, 1600. Es interesante observar que en los pianos modernos el primer *do* tiene un poco menos de 33 vibraciones por segundo y el segundo un poco más de 65. Cuando escuchamos una de las sonatas de Scarlatti interpretada por Horowitz las vibraciones en el aire no deben ser las mismas que en las primeras interpretaciones del siglo XVIII.

CARTA IV

(29 de Abril de 1760.)

De las consonancias y las disonancias

Su alteza acaba de interrumpir el hilo de mis pensamientos de manera muy gentil

Es por eso que vuelvo a mi materia con el espíritu lleno de agradecimiento [...]

la sensación de un sonido simple en música se puede comparar con una sucesión de puntos a igual distancia, como por ejemplo

[illegible]

Según los intervalos entre estos puntos sean más grandes o más pequeños, el sonido que se representa será más grave o más agudo. Sin duda la sensación de un sonido simple será parecida o análoga a la visión de una de estas sucesiones de puntos a igual distancia; y de esta manera se puede percibir a través de los ojos la misma cosa que sienten los oídos cuando se escucha un sonido. Si las distancias entre los puntos no fueran iguales y los puntos se situaran al azar, se estaría representando un ruido confuso y contrario a la armonía.

Podemos pensar en una recta temporal en la que los puntos representan los instantes para los que la vibración alcanza su máximo. La simetría en el tiempo que percibimos con los oídos se traduce en una simetría espacial que percibimos con los ojos.

• • • • • • • • • • grave

• • • • • • • • • • • • • • • agudo

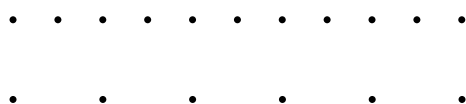
• • • • • • • • • • • • ruido

Dicho esto, consideramos el efecto que deben producir sobre el oído dos sonidos emitidos a la vez. Es claro que si los dos sonidos son iguales o

si realizan igual número de vibraciones en un mismo tiempo¹, el oído reaccionará de la misma manera que si se tratara de un solo sonido; en la música se dice que estos dos sonidos están al unísono, lo que constituye el acorde más simple. Se llama acorde a la mezcla de dos o más sonidos que se escuchan a la vez. Por el contrario, cuando los dos sonidos no son lo mismo de graves o agudos, se percibirá la mezcla de dos series de pulsos [...] Una mezcla de este tipo o acorde de dos sonidos se puede representar a la vista por dos sucesiones de puntos situados sobre dos líneas ab y cd. Para tener

DES CONSONNANCES.											15	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
<i>a</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	<i>b</i>	
<i>c</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	<i>d</i>	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

una idea clara de estas dos sucesiones hay que observar el orden que las rige o, lo que es lo mismo, la relación entre los intervalos de una y otra línea. Al numerar los puntos de una y otra línea [...] se observa que el segundo sonido realiza 12 vibraciones cuando el primero no ha hecho más que 11. Pero si no se hubieran escrito los números, los ojos no descubrirían prácticamente nada de este orden, y lo mismo le pasa a los oídos [...] Sin embargo en la siguiente figura



se descubre al primer vistazo que la línea superior contiene dos veces más puntos que la inferior, o que los intervalos en la línea inferior son dos veces más grandes que en la superior. No hay duda de que se trata del caso más simple después del unísono [...] Entonces, cuando el oído descubre con facilidad la relación que cumplen dos sonidos, su acorde se llama una consonancia. Cuando esta relación es muy difícil o imposible de descubrir, el acorde se llama una disonancia. Por tanto la consonancia más simple

¹al golpear la misma tecla del piano con distinta intensidad los sonidos producidos no son iguales pero tienen igual número de vibraciones

es aquella en la que el sonido agudo realiza exactamente dos veces más vibraciones que el sonido grave. En música esta consonancia se llama una octava. Dos sonidos que difieren exactamente en una octava armonizan tan bien y se parecen tanto que los músicos los denotan con las mismas letras. Así mismo, vemos en las iglesias que las mujeres cantan una octava más alta que los hombres pero todos creen entonar los mismos sonidos. Su alteza podrá comprobar con facilidad este hecho en un clavecín² y disfrutará los hermosos acordes que hay entre los sonidos que difieren en una octava, mientras que otros dos sonidos cualesquiera no suenan tan bien.

²Este instrumento con teclado era muy popular en la época en la que Euler escribió estas cartas, poco después fue reemplazado por el fortepiano

CARTA IV

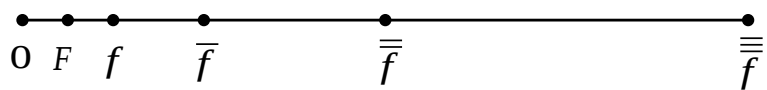
(3 de Mayo de 1760.)

Del unísono y las octavas

[...] Vuestra alteza entenderá con facilidad que, cuanto más simple sea una proporción que venga expresada en términos de números pequeños, más clara será su comprensión y más agradable será la sensación. También los arquitectos siguen con gran cuidado este principio y emplean en todas las partes de un edificio proporciones tan simples como permiten las circunstancias. En las puertas y ventanas acostumbran a hacer la altura dos veces más grande que la anchura y en general procuran emplear proporciones expresables en números pequeños, esto agrada a la mente.



[...] Consideremos varios sonidos como F , f , $\bar{f}$, $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{\bar{f}}}$, en los que cada uno es una octava más alto que el precedente. Así, como los intervalos de F a f , de f a $\bar{f}$, de $\bar{f}$ a $\bar{\bar{f}}$, de $\bar{\bar{f}}$ a $\bar{\bar{\bar{f}}}$ son octavas, el intervalo de F a $\bar{f}$ será una doble octava, el de F a $\bar{\bar{f}}$ una triple octava y el de F a $\bar{\bar{\bar{f}}}$ una cuádruple octava. Cuando el sonido F da una vibración, el sonido f da dos, el sonido $\bar{f}$ cuatro, el sonido $\bar{\bar{f}}$ ocho, el sonido $\bar{\bar{\bar{f}}}$ dieciséis [...] Como la proporción de 1 a 4 no es tan simple como la de 1 a 2, ya que no salta a la vista con tanta sencillez, una octava doble no se percibe tan fácilmente como una octava simple; la octava triple es menos fácil de percibir y la octava cuádruple todavía menos. Por eso al afinar un clavecín, si se ha fijado el sonido F , no es tan fácil afinar la octava doble $\bar{f}$ como la simple f , y es



todavía más difícil afinar la octava triple $\overline{\overline{f}}$ y la cuádruple $\overline{\overline{\overline{f}}}$ sin pasar por las octavas intermedias.[...]

CARTA VI

(3 de Mayo de 1760.)

Otras consonancias

Se puede decir que todas las proporciones de 1 a 2, de 1 a 4, de 1 a 8, de 1 a 16, que hemos considerado hasta ahora y que encierran las nociones de octava simple, doble, triple o cuádruple, tienen su origen únicamente en el número 2, puesto que 4 es dos veces dos, 8 dos veces cuatro y 16 es dos veces ocho.[...] Si un instrumento no contuviera más que octavas, por ejemplo los sonidos denotados por C , c , $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, y se excluyeran los demás sonidos, no se sabría cómo producir música agradable, debido a la excesiva simplicidad. Por eso vamos a introducir, además del número 2, el número 3 y vamos a ver qué acordes o qué consonancias resultarán. En principio la proporción de 1 a 3 nos presenta dos sonidos, uno de los cuales da en el mismo tiempo tres veces más vibraciones que el otro. Sin duda esta proporción es la más fácil de comprender después de la de 1 a 2; partiendo de ella se producirán consonancias muy hermosas y de una naturaleza completamente diferente a las de las octavas.

A partir de aquí Euler se embarca en una larga discusión de tono escolar en la que con paciencia introduce la terminología musical: octavas, quintas, cuartas, segundas... Desde nuestro punto de vista, para entender la construcción de la escala, lo más importante es la conclusión final de la carta, que se resume en la tabla siguiente

C ,	D ,	F ,	G ,	c ,	d ,	f ,	g ,	$\bar{c}$,	$\bar{d}$,	$\bar{f}$,	$\bar{g}$,
24.	27.	32.	36.	48.	54.	64.	72.	96.	108.	128.	144
$\bar{\bar{c}}$,	$\bar{\bar{d}}$,	$\bar{\bar{f}}$,	$\bar{\bar{g}}$,	$\bar{\bar{\bar{c}}}$,							
192.	216.	256.	288.	384,							

Para entender cómo se llega a estos números establecemos unas reglas para la construcción de alturas³ admisibles:

1. Dos sonidos definen la misma nota si sus alturas están relacionadas por

³en música la altura de un sonido es el número de vibraciones por unidad de tiempo

una potencia de 2,

$$X = 2^n Y, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Generamos nuevos sonidos admisibles a partir de las proporciones 2 : 1 y 3 : 1,

$$X = 2^n 3^m Y, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

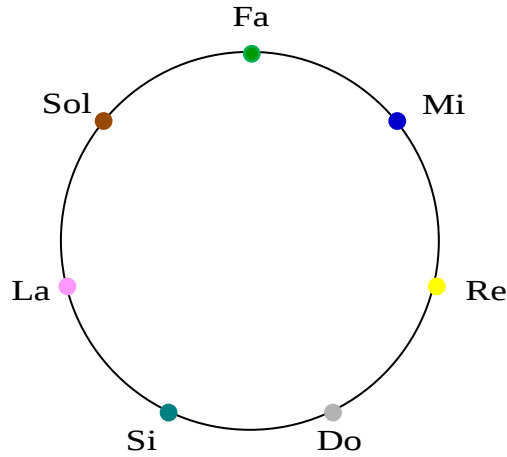
En todo el proceso se dará preferencia a los enteros n y m pequeños.

Comenzamos fijando una altura C y construimos los nuevos sonidos $c = 2C$, $\bar{c} = 2c$, $\bar{\bar{c}} = 2\bar{c}$, $\bar{\bar{\bar{c}}} = 2\bar{\bar{c}}$. Definimos la primera nota

$$Do = \{C, c, \bar{c}, \bar{\bar{c}}, \bar{\bar{\bar{c}}}\}.$$

En principio no habría problema en incluir más octavas; por ejemplo, en el teclado de un piano moderno hay algo más de 7 octavas. Seguiremos a Euler y trabajaremos con cuatro octavas, a partir de ahora todas las alturas estarán comprendidas entre C y $\bar{\bar{\bar{c}}}$.

Antes de generar las siguientes notas conviene recordar el círculo de quintas. Se trata de una circunferencia sobre la que se ubican ordenadamente las siete notas musicales



Fijada una nota, obtenemos sus notas consonantes avanzando o retrocediendo cinco casillas. Es claro que cada nota tiene dos consonantes. Por ejemplo, las consonantes de *Do* son *Sol* y *Fa*. Vamos a generar estas dos

notas multiplicando o dividiendo por 3 la altura de *Do*. Es decir,

$$Sol = \{2^n \cdot 3C : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{G, g, \bar{g}, \bar{\bar{g}}\}$$

y

$$Fa = \{2^n \cdot \frac{1}{3}C : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{F, f, \bar{f}, \bar{\bar{f}}\}.$$

En el primer caso los enteros admisibles son $n = -1, 0, 1, 2$ y se cumple $2G = 3C$. En el segundo $n = 2, 3, 4, 5$ y $3D = 4C$.

La cuarta nota vuelve a usar la proporción 3 : 1 para crear la consonante en orientación anti-horaria de *Sol*,

$$Re = \{2^n \cdot 3G : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{D, d, \bar{d}, \bar{\bar{d}}\},$$

Ahora $n = -2, -1, 0, 1$ y $4F = 3G$.

Hemos completado la construcción de la tabla. Si se elige $C = 24$ los demás números se obtienen de cálculos sencillos.

Llegados a este punto parece natural generar las notas restantes repitiendo el proceso. Esa vía lleva a la escala pitagórica⁴, pero como veremos en la siguiente carta Euler procede de un modo diferente.

⁴Hay más información sobre esta escala en el manual Modelos Matemáticos, Editorial Universidad de Granada, 2013, que escribí para los alumnos de matemáticas de segundo año

CARTA VII

(3 de Mayo de 1760.)

Los doce tonos del clavecín

La materia sobre la que me tomo la libertad de conversar con su alteza es tan árida que me lleva a temer que pronto os aburrirá. Así que para no dedicarle demasiado tiempo, os envió hoy tres cartas con el fin de acabar de una vez con este asunto que resulta poco agradable. Mi intención era presentar a la vista de vuestra alteza el verdadero origen de los sonidos empleados en la música, que es casi completamente desconocido para los músicos. No es la teoría la que los lleva al conocimiento de todos los tonos y más bien lo deben a la fuerza oculta de la verdadera armonía que actúa tan eficazmente en sus oídos que, por así decirlo, los obliga a aceptar los tonos que se usan en la actualidad; y eso aunque no se hayan decidido todavía sobre cuáles deban ser sus determinaciones exactas.⁵ Como he tenido el honor de haceros ver, los principios de la armonía se reducen en definitiva a los números. He observado que el número 2 no produce más que octavas. Si fijamos por ejemplo el tono F , obtenemos los sonidos $f, \bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}$. Luego el número 3 proporciona los tonos $C, c, \bar{c}, \bar{\bar{c}}, \bar{\bar{\bar{c}}}$ que difieren de los anteriores en una quinta y la repetición de este mismo número 3 proporciona todavía las quintas de los anteriores, que son $G, g, \bar{g}, \bar{\bar{g}}, \bar{\bar{\bar{g}}}$. Por último la repetición de este número 3 añade los tonos $D, d, \bar{d}, \bar{\bar{d}}^6$. Los principios de la armonía, al estar ligados a la simplicidad, no permiten que se lleve más lejos la repetición del 3.

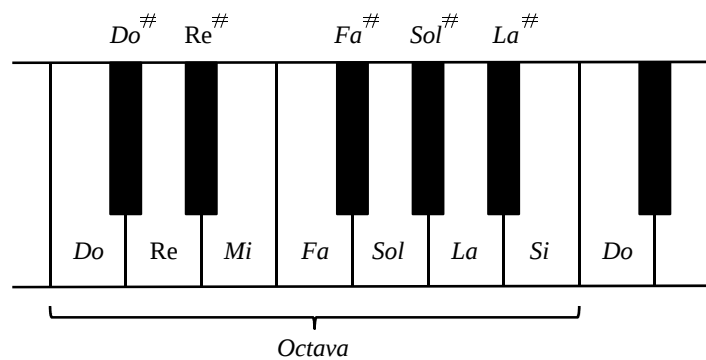
En opinión de Euler no es posible usar más veces el número 3 y por eso va a incorporar la proporción 1 : 5.

[...] Introduzcamos también el número 5 y veamos cuál será el tono que da 5 vibraciones mientras que el tono F no hace más que una.

En la carta anterior se han construido las primeras cuatro notas Fa, Do, Sol, Re y ahora Euler presentará la construcción de las restantes notas hasta completar el teclado de un piano (La, Mi, Si y los sostenidos que corresponden a las teclas negras).

⁵Los músicos de hoy en día continúan usando las mismas notas, aunque las alturas actuales son distintas de las descritas en estas cartas

⁶Es fácil comprender que esta construcción es consistente con la descrita anteriormente porque ahora Euler parte de F y antes empezábamos con C



La tabla siguiente resume todos sus cálculos.

			Difference.
C	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . . .	384	
C _s	2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 5	400	16
D	2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3	432	32
D _s	2 . 3 . 3 . 3 . 5	450	18
E	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5	480	30
F	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 .	512	32
F _s	2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5	540	28
G	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . .	576	36
G _s	2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5	600	24
A	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . .	640	40
B	3 . 3 . 3 . 5 . 5	675	35
H	2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5	720	45
c	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 .	768	48

Si hacemos $F = 2^9$, de los cálculos anteriores sabemos que $C = 3 \cdot 2^7$, $G = 3^2 \cdot 2^6$ y $D = 3^3 \cdot 2^4$. Las restantes notas se definen a partir de combinaciones del 3 y 5 en las que el 3 se repite a los sumo tres veces y el 5 a lo sumo dos. Definimos

$$La = \{2^n \cdot 5F : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{A, a, \bar{a}, \bar{\bar{a}}\}$$

$$Mi = \{2^n \cdot 5C : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{E, e, \bar{e}, \bar{\bar{e}}\}$$

$$Si = \{2^n \cdot 5G : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{H, h, \bar{h}, \bar{\bar{h}}\}$$

y ya hemos completado las teclas blancas. El primer sostenido se define como

$$Fa^\sharp = \{2^n \cdot 5D : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{Fs, fs, \bar{f}s, \bar{\bar{f}}s\}.$$

Ahora volvemos a multiplicar por 5 para completar la escala,

$$Do^\sharp = \{2^n \cdot 5A : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{Cs, cs, \bar{c}s, \bar{\bar{c}}s\}$$

$$Sol^\sharp = \{2^n \cdot 5E : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{Gs, gs, \bar{g}s, \bar{\bar{g}}s\}$$

$$Re^\sharp = \{2^n \cdot 5H : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{Ds, ds, \bar{d}s, \bar{\bar{d}}s\}$$

$$La^\sharp = \{2^n \cdot 5Fs : n \in \mathbb{Z}\} \cap [C, \bar{\bar{c}}] = \{B, b, \bar{b}, \bar{\bar{b}}\}.$$

Conviene observar que la tabla anterior⁷ tiene una pequeña errata en las potencias que definen Ds .

Euler concluye esta carta con el siguiente comentario

Hemos presentado el verdadero origen de las notas que se usan hoy en día, que se obtienen de los números 2, 3 y 5. Si se quisiera introducir también el número 7, el número de tonos en una octava crecería y toda la música se llevaría a un nivel superior. Pero es aquí donde la Matemática deja la armonía en manos de la música.

Hay distintas maneras de construir la escala musical⁸ y a primera vista la construcción anterior puede parecer arbitraria. Algunas de las reglas tienen una razón matemática profunda, sobre todo el hecho de que la escala tenga 12 notas⁹ y el manejo de proporciones con números enteros pequeños. Los procedimientos concretos para construir las notas pueden variar según el tipo de escala. Hasta cierto punto se puede pensar en un paralelismo con las distintas formas métricas de un poema.

⁷extraída de una edición publicada por Hachette, París 1842

⁸Se puede encontrar mucha información en el libro clásico de H. Helmholtz, On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. La edición original en alemán es de 1862

⁹se puede consultar el reciente libro de D.J. Benson, Music: A Mathematical Offering

CARTA VIII

(6 de Mayo de 1760.)

Sobre el encanto de la buena música

¿Por qué la buena música nos produce una sensación agradable? Es esta una pregunta tan importante como curiosa. Los sabios están muy divididos sobre esta cuestión. Hay quienes pretenden que no es más que una pura extravagancia y que no hay razones que expliquen que la música pueda resultar agradable, pues lo que agrada a unos puede desagradar a otros. Pero esta respuesta está lejos de resolver la cuestión, que es mucho más complicada; se trata de saber la razón por la que una misma obra musical puede provocar efectos tan diversos. Aceptemos que todo ocurre por alguna razón. Hay quienes dicen que la sensación placentera que se siente al escuchar buena música consiste en la percepción del orden que reina sobre ella. En principio esta impresión parece tener base y merece ser examinada con algo de cuidado. Hay dos aspectos de la música en los que el orden aparece. Por una parte está la diferencia entre los tonos, ya sean más altos o más bajos, más agudos o más graves [...] Pero la música contiene, además de la armonía otro aspecto que se somete al orden. Se trata de la medida, gracias a la que se asigna a cada tono una cierta duración. La percepción de la medida consiste en el conocimiento de la duración de los tonos y de las proporciones que producen, pues un tono puede durar dos, tres o cuatro veces más que otro. [...] Ahora bien, es cierto que quien escucha una música y comprende, gracias a su buen oído, todas las proporciones en las que se basan tanto la armonía como la medida, tiene el conocimiento más perfecto que es posible tener sobre esa música. En tanto que tendrán un conocimiento más imperfecto quienes solo perciben estas proporciones en parte o quienes no las perciben en absoluto. Pero la sensación agradable de la que hablábamos en nuestra pregunta va más allá de este conocimiento del que acabo de hablar. Con cierta audacia se podría sostener que una música no resultará agradable a menos que se tenga cierto conocimiento. Pero el exclusivo conocimiento de todas las proporciones que rigen la música, tanto en la armonía como en la medida, no será suficiente para producir un sentimiento de agrado. Hace falta alguna cosa más que nadie ha desarrollado todavía. Para convencerse de que la exclusiva percepción de todas las proporciones de una música no es suficiente, no hay más que considerar una música simple en extremo, que solo se mueva por octavas. Es claro que se trata del caso más sencillo para la percepción de las proporciones y sin embargo esta música está lejos de agradar, aunque se tenga el conocimiento más perfecto. Hay que acep-

tar que la sensación de placer exige un conocimiento que no sea demasiado fácil, sino que conlleve alguna dificultad. Por así decirlo, es necesario que este conocimiento nos cueste algo; pero en mi opinión eso todavía no es suficiente. Puede resultar más difícil comprender una disonancia producida por números grandes; pero lo que no agradará será una sucesión de disonancias colocadas sin criterio y sin propósito. Así que se requiere que el compositor haya seguido un plan o propósito que se expresará por proporciones reales que se pueden percibir. Entonces, cuando un entendido escucha la pieza, más allá de las proporciones comprende el plan y la intención misma que el compositor tenía en mente. Sentirá esta satisfacción que es el placer que la buena música produce en el oído inteligente. Este placer deriva por tanto de lo que, por así decir, se adivina de la visión y los sentimientos del compositor y cuando la ejecución es buena llena el espíritu de una satisfacción agradable. Poco más o menos se trata de algo parecido a la satisfacción que se experimenta al ver una buena pantomima; en ella se adivinan, por los gestos y acciones, los sentimientos y los diálogos que se representan [...] Estos son, en mi opinión, los principios ciertos sobre los que se asientan todos los juicios sobre la belleza de una pieza de música; pero esta no es más que la opinión de un hombre que no oye nada¹⁰ y que por tanto debería sentirse avergonzado por haber osado hablar a su alteza de esta materia.

¹⁰¿Se refiere Euler a un defecto auditivo o a un pobre oído musical?