# Niels Abel estudia el curso de Análisis del Profesor Cauchy

### Aprender de los clásicos 3. Notas por Rafael Ortega Ríos

La convergencia uniforme es una noción que aparece en la mayoría de los cursos de Análisis de la carrera de Matemáticas. Al principio es difícil entender su razón de ser y su uso, por eso hoy vamos a hablar de una historia que tiene que ver con el nacimiento de este tipo de convergencia. Los actores invitados serán Cauchy y Abel, quienes amablemente descenderán del Olimpo y nos contarán las dificultades que encontraron en el estudio de las propiedades de las series convergentes.

En 1821 Augustin-Louis Cauchy tenía 32 años y era un eminente profesor de la Escuela Politécnica de París. Parece que los alumnos de ingeniería encontraban sus cursos muy difíciles y algunos de sus colegas pensaban que no había necesidad de enseñar con tanto rigor. Por esa época Cauchy publicó su Curso de Análisis[1], un libro que pronto se convertiría en un clásico. A nosotros nos interesa el Capítulo VI, "De las series (reales) convergentes y divergentes". Las series se venían usando desde los inicios del Cálculo Infinitesimal, pero hasta ese momento no había una discusión general sobre la convergencia. Cauchy es consciente de esto y nos avisa en la introducción:

*Así, antes de efectuar la suma de cualquier serie, he debido examinar en qué casos las series pueden ser sumadas, o, en otros términos, cuáles son las condiciones para su convergencia; sobre este asunto he establecido reglas generales que creo que merecen alguna atención.*

[1] versión original https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog
traducción anotada al inglés R.E. Bradley, C.E. Sandifer, Cauchy's Cours d'Analyse, Springer 2009

# COURS D'ANALYSE

DE

# L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

## I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821.

Niels Henrik Abel, matemático escandinavo nacido en 1802, fue sin duda uno de los primeros conocedores de la obra de Cauchy. Gracias a una beca había viajado a Alemania, donde conoció a Leopold August Crelle, fundador de una revista matemática que hoy se sigue publicando. En 1826 apareció en esa revista un trabajo[2] de Abel sobre la serie

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots$$

que se obtiene al aplicar de manera formal el binomio de Newton a la expresión $(1+x)^m$ cuando $m$ no es un número natural.

*Abel Untersuchungen über die Reihe* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m.m-1}{1.2}x^2\ldots\ldots$ **311**

**29.**

**Untersuchungen über die Reihe:**

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}.x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}.x^3+\ldots\ldots\text{ u. s. w.}$$

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

**1.**

Untersucht man das Raisonnement, dessen man sich gewöhnlich bedient, wo

En la tercera página del artículo declara el autor su admiración por la obra de Cauchy

*El excelente tratado de Cauchy,"Cours d'Analyse de l'École Polytechnique", que debería ser estudiado por todo analista que guste del rigor en la investigación matemática, nos servirá de guía*[3]

y un poco después aparece una nota a pie de página en la que critica uno de los teoremas del Cours d'Analyse,

[2] El artículo apareció originalmente en alemán, Untersuchungen über die Reihe: $1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots u.s.w.$, Journal für die reine und angewandte Mathematik (1826) 311-339 (http://gdz.sub.uni-goettingen.de). En las obras completas de Abel se puede encontrar en francés (http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2437b) y hay una traducción parcial al inglés en el interesante libro de D. E. Smith, A source book in Mathematics, Dover 1959

[3] La opinión de Abel sobre la personalidad de Cauchy no era tan halagüeña: *"Cauchy está loco y no hay nada que se pueda hacer, aunque ahora mismo es el único que sabe cómo hacer matemáticas"*, extraído de la biografía de Cauchy en la enciclopedia de historia de las matemáticas http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html

*En la obra antes mencionada del señor Cauchy (página 131) se encuentra el siguiente teorema:*

*"Cuando los términos de la serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

*son funciones de una misma variable, y son además funciones continuas con respecto a esta variable en el entorno de un valor particular para el que esta serie converge, entonces la suma de la serie también es una función continua de $x$ en el entorno de este valor particular."*

*Me parece que este teorema adolece de excepciones. Así por ejemplo la serie*

$$\operatorname{sen}\phi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\phi + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\phi - \cdots$$

*es discontinua para cada valor $(2m+1)\pi$ de $\phi$, donde $m$ es un número entero. Es bien sabido que hay otras muchas series con propiedades similares.*

deren allgemeines Glied

$$r_m = \rho_0 \rho'_m + \rho_1 \rho'_{m-1} + \rho_2 \rho'_{m-2} + \ldots\ldots \rho_m r'_0,$$

und deren Summe

---

*) Anmerkung. In der oben angeführten Schrift des Herrn *Cauchy* (Seite 131) findet man folgenden Lehrsatz:

„Wenn die verschiedenen Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

„Functionen einer und derselben veränderlichen Gröſse sind, und zwar stetige Functionen, „in Beziehung auf diese Veränderliche, in der Nähe eines besonderen Werthes, für welchen „die Reihe convergirt, so ist auch die Summe $s$ der Reihe, in der Nähe jenes besonderen „Werthes, eine stetige Function von $x$."

Es scheint mir aber, daſs dieser Lehrsatz Ausnahmen leidet. So ist z. B. die Reihe

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

unstetig für jeden Werth $(2m+1)\pi$ von $\varphi$, wo $m$ eine ganze Zahl ist. Bekanntlich giebt es eine Menge von Reihen mit ähnlichen Eigenschaften.

Traduzcamos al lenguaje de la carrera el teorema que cita Abel y el ejemplo de serie con suma discontinua.

**Teorema erróneo, Cours d'Analyse, pag. 131**. Se considera una serie funcional

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x)$$

donde cada $u_n : I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo $I = ]x_* - r, x_* + r[$. Se supone además que la serie converge en cada punto $x \in I$. Entonces la función suma

$$s(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$$

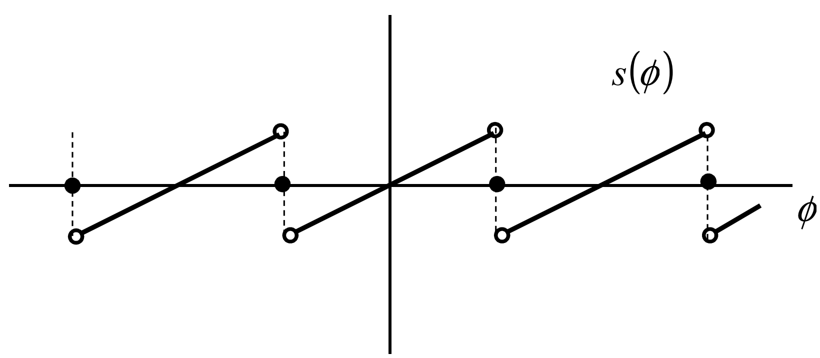
es continua en $I$.

**Contra-ejemplo de Abel**. Comprobaremos que la serie

$$(\star) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\phi$$

converge para cada $\phi \in \mathbb{R}$ y su suma es la función que cumple $s(\phi + 2\pi) = s(\phi)$ y

$$s(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi, & \text{si } \phi \in ]-\pi, \pi[ \\ 0, & \text{si } \phi = \pi. \end{cases}$$




Esta función es discontinua en $\phi = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ mientras que las funciones $u_0(\phi) = 0$ y $u_n(\phi) = \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\phi$ si $n \geq 1$ son continuas.

Cauchy había afirmado que la **convergencia puntual** en un intervalo de una serie de funciones es suficiente para garantizar la continuidad de la función suma; Abel encontró un contra-ejemplo. Ahora podemos corregir el enunciado de Cauchy sin más que cambiar la convergencia en cada punto de $I$ por la **convergencia uniforme** en $I$.

Dedicaremos lo que queda de estas notas a sumar la serie ($\star$) y a entender la "demostración" que presentó Cauchy del teorema de la página 131.

# 1 Estudio de la serie ($\star$)

Partimos de la identidad[4]

$$\cos\phi - \cos 2\phi + \cdots + (-1)^{n+1}\cos n\phi = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\cos n\phi + \cos(n+1)\phi}{2(1+\cos\phi)},$$

válida para todo real $\phi \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ e integramos entre 0 y $\phi$ cuando $\phi$ está en el intervalo $]-\pi,\pi[$ para obtener

$$\operatorname{sen}\phi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\phi + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\phi = \frac{1}{2}\phi + (-1)^{n+1}\frac{1}{2}R_n(\phi)$$

donde

$$R_n(\phi) = \int_0^\phi \frac{\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi.$$

Vamos a probar que se cumple

$$(\square) \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(\phi) = 0 \quad \text{para cada } \phi \in ]-\pi,\pi[.$$

Se sigue entonces que la serie es convergente y su suma es $\frac{1}{2}\phi$ en $]-\pi,\pi[$. Para $\phi = \pm\pi$ es evidente que la serie converge a cero porque todos los términos son nulos. Dado que el término general de la serie es $2\pi$-periódico, la convergencia se extiende a toda la recta real y la suma es la extensión periódica de la función

$$s : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, \quad s(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi, & \text{si } \phi \in ]-\pi,\pi[ \\ 0, & \text{si } \phi = \pm\pi. \end{cases}$$

Nos queda por comprobar que la afirmación contenida en ($\square$) es cierta. Para ello vamos a integrar por partes usando

$$u = \frac{1}{1+\cos\varphi}, \quad dv = (\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi)d\varphi.$$

[4]se prueba por inducción o bien sumando la progresión geométrica $z + z^2 + \cdots + z^n$ con $z = -\cos\phi - i\operatorname{sen}\phi$ y tomando partes reales

Se llega a la fórmula

$$R_n(\phi) = \frac{1}{1+\cos\phi}(\frac{\text{sen } n\phi}{n} + \frac{\text{sen } (n+1)\phi}{n+1}) - \int_0^{\phi} \frac{\text{sen } \varphi}{(1+\cos\varphi)^2}(\frac{\text{sen } n\varphi}{n} + \frac{\text{sen } (n+1)\varphi}{n+1}) d\varphi$$

y ahora podemos estimar,

$$|R_n(\phi)| \leq \frac{1}{1+\cos\phi}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) + \frac{\pi}{(1+\cos\phi)^2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}).$$

De aquí se sigue ($\square$). Es importante observar que la cantidad $\frac{1}{1+\cos\phi}$ se va a infinito cuando $\phi$ se acerca a $\pm\pi$, por eso esta estimación no es uniforme en $]-\pi,\pi[$.

## 2 La "demostración" de Cauchy

Comenzamos con un juego arriesgado: hay que encontrar los errores en una versión actualizada de la "demostración" del teorema erróneo. Partimos de las funciones $u_n : I \to \mathbb{R}$ y construimos las sumas parciales

$$s_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_{n-1}(x)$$

que, por hipótesis, tienen límite

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

El resto $n$-ésimo $r_n$ se define como la suma de la serie

$$r_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots$$

y cumple

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Al ser continuas las funciones $u_n$, también lo serán las $s_n$, pues se construyen como sumas finitas de ellas. Cauchy intentó probar que también la función $s$ es continua; es decir, dados $x \in I$ y $\epsilon > 0$ se busca $\delta > 0$ tal que

$$|\alpha| < \delta \implies |s(x+\alpha) - s(x)| < \epsilon. \quad (1)$$

Como $s_n$ es continua en $x$ encontramos $\delta > 0$ tal que

$$|\alpha| < \delta \implies |s_n(x+\alpha) - s_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2)$$

para cada $n \geq 0$. Por otra parte, de la desigualdad triangular,

$$|r_n(x+\alpha) - r_n(x)| \leq |r_n(x+\alpha)| + |r_n(x)| \tag{3}$$

y, como el resto converge a cero en todo punto, podemos encontrar un número natural $N$ tal que

$$n \geq N \implies |r_n(x+\alpha)| < \frac{\epsilon}{3},\ |r_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4}$$

De nuevo la desigualdad triangular junto con la identidad $s = s_n + r_n$ nos llevan a

$$|s(x+\alpha) - s(x)| \leq |s_N(x+\alpha) - s_N(x)| + |r_N(x+\alpha) - r_N(x)|.$$

Juntamos esto con (2), (3) y (4) y obtenemos (1).

Hemos llegado a la conclusión pero en el proceso se han cometido dos errores que están ligados con la pérdida de uniformidad:

- La elección de $\delta$ en (2)

  La definición de continuidad se ha de aplicar a cada $s_n$ de manera independiente, puede que el número $\delta$ varíe con $n$, $\delta = \delta(n)$, y que $\delta(n) \to 0$ si $n \to \infty$.

- La elección de $N$ en (4)

  Hemos usado
  $$\lim_{n\to\infty} r_n(x+\alpha) = 0$$
  donde $\alpha$ es un número que varía en $[x-\delta, x+\delta]$. Esto es correcto pero el problema está en que hay que aplicar la definición de límite de modo independiente para cada $\alpha$. El número $N$ puede depender de $\alpha$, $N = N(\alpha)$, y en el caso más desfavorable puede que $\sup_{\alpha\in[x-\delta,x+\delta]} N(\alpha) = +\infty$. No encontraríamos un $N$ común para todos los números $\alpha$.

Por último vamos a leer el original de Cauchy,

*Suponiendo que la serie*

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

*sea convergente, si se designa su suma por $s$, y por $s_n$ la suma de sus $n$ primeros términos, se encontrará*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots = s_n + u_n + u_{n+1} + \cdots,$$

*y por tanto*

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots$$

*De esta última ecuación resulta que las cantidades*

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

*formarán una nueva serie convergente cuya suma será igual a* $s - s_n$*. Si se representa esta suma por* $r_n$*, se tendrá*

$$s = s_n + r_n$$

*y* $r_n$ *es lo que se llama el resto de la serie a partir del término n-ésimo.*

*Cuando los términos de la serie dependen de una variable común* $x$*, esta serie es convergente, y sus diferentes términos funciones continuas de* $x$*, en el entorno de un valor particular asignado a esta variable;*

$$s_n, r_n \text{ y } s$$

*también son tres funciones de la variable* $x$*, de las que la primera es evidentemente continua con respecto a* $x$ *en el entorno del valor particular que se trata. Admitido esto, consideremos los incrementos que experimentan estas tres funciones*[5]*, cuando se hace crecer* $x$ *en una cantidad infinitamente pequeña* $\alpha$*. El incremento de* $s_n$ *será, para todos los posibles valores de* $n$*, una cantidad infinitamente pequeña*[6]*; y el de* $r_n$ *se volverá inapreciable al tiempo que* $r_n$[7]*, si se le atribuye a* $n$ *un valor muy considerable. Por tanto, el incremento de la función* $s$ *no podrá ser más que una cantidad infinitamente pequeña*[8]*. De esta observación se deduce inmediatamente la proposición siguiente*

*1. TEOREMA. Cuando los diferentes términos de la serie son funciones de una misma variable* $x$*, continuas con respecto a esta variable en el entorno de un valor particular para el que la serie es convergente, la suma* $s$ *de la serie también es, en el entorno de este valor particular, función continua de* $x$*.*

[5] $\Delta s_n = s_n(x+\alpha) - s_n(x), ...$

[6] véase (2)

[7] véanse (3) y (4)

[8] la conclusión, (1)

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c.\ldots.$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre $e$ se trouvera déterminée par l'équation

$$(6) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c\ldots:$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de $x$ inférieures à l'unité,

$$(7) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c.\ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par $s$, et par $s_n$ la somme de ses $n$ premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots$$
$$= s_n + u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots,$$

et par suite

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots$$

De cette dernière équation il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \&c. \ldots.$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par $r_n$, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et $r_n$ sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n$.$^{me}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable $x$, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de $x$, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable $x$, dont la première est évidemment continue par rapport à $x$ dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que recoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître $x$ d'une quantité infiniment petite $\alpha$. L'accroissement de $s_n$ sera, pour toutes les valeurs possibles de $n$, une quantité infiniment petite; et celui de $r_n$ deviendra insensible en même temps que $r_n$, si l'on attribue à $n$ une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction $s$ ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.$^{er}$ THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable* $x$, *continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable $x$, entre les limites $x = -1$, $x = 1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de $s$ donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

### §. 2.^e *Des Séries dont tous les termes sont positifs.*

Lorsque la série

$$(1) \qquad u_0, \ u_1, \ u_2 \ \ldots\ldots \ u_n, \ \&c.\ldots$$

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant.

1.^er THÉORÈME. *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression* $(u_n)^{\frac{1}{n}}$; *et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série (1) sera convergente, si l'on a* $k < 1$, *et divergente, si l'on a* $k > 1$.

*DÉMONSTRATION*. Supposons d'abord $k < 1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et $k$ un troisième nombre $U$, en sorte qu'on ait