Relación de ejercicios del tema 1

Matemáticas. Ciencias Ambientales
Curso 2025/26. Grupo C.

1. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to -1}(-x^3-x^2-x+12)$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2-4}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x^2-1}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{3}{x+1}$

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x\,\mathrm{arctg} x$

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x+1}$

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(-x^3+3x+2)$

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+5x+2}{3x^2+7}$

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^3-2x+3}{5x^3-x^2+6x}$

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$

   (o) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^5-1}$

2. Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

   (a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,

   (b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,

   (c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$,

   (d) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$,

   (e) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x-1}$,

   (f) $f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-4}$.

   (g) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,

   (h) $f(x)=\dfrac{3x^2}{25-x^2}$,

   (i) $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$,

   (j) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-6x+9}$.

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ indicando, en su caso, el tipo de discontinuidades que presentan:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 0\\ 2x-3, & x>0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\ln|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}\frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}, & x\neq 1\\ 2008, & x=1\end{cases}$$

4. Hallar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

5. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3+2^{1/x}}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1+2^(1/x)}{3+2^(1/x)}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

   (d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

   (e) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

   (f) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

   (g) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-2}}$

   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

   (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

6. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$

   (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4}$

   (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$

   (d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

   (e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{4x-5}$

   (f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

   (g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x+5}$

   (h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$

   (i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

   (j) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

   (k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{2x+1}$

   (l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2+1)\operatorname{sen} x}{x^3+3}$

7. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to -3^-} \frac{x-1}{(8x+3)(x+3)}$

   (b) $\lim_{x\to -3^+} \frac{x-1}{(8x+3)(x+3)}$

   (c) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{(8x+3)(x-2)}$

   (d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{(8x+3)(x-2)}$

   (e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$

   (f) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$

8. Calcular el valor que se debe asignar a $f(2)$ para que la función sea continua en $x = 2$.

   (a) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x > 2 \\ 15 - x^2 & x < 2 \end{cases}$

9. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. ¿qué valor hay que dar en $x = 0$ para que sea continua en $x = 0$?

10. Estudiar la continuidad y las asíntotas de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x < -1, \\ x + 1, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{x^3}{1+x^4}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{32(x-2)}{5(x^2-4)}, & 2 < x. \end{cases}$$

11. Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

(c) $f(x) = x^2 \sqrt{3x - 5}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

(e) $f(x) = \ln(2x + 1)$

(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(g) $f(x) = \tan^2 x$

(h) $f(x) = (\text{sen}x)\,(\text{sen}(2x))$

(i) $f(x) = \ln(\cos x)$

(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen}x}{1 - \text{sen}x}}$

(k) $f(x) = x\,\sqrt{1 - x^2} + \text{arcsen}(x^2)$

(l) $f(x) = e^x + e^{-x}$

(m) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

12. Hallar el valor de m para que la recta tangente a la curva $y = \arccos(x-1)+mx$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$ sea horizontal.

13. Hallar en qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x - e^x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

14. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$?

15. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}$,

(b) $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\, x)\,(\ln x)$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,

(d) $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - x)$,

(e) $\lim_{x\to 0} \text{sen}(x)^x$,

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\text{sen}(x))^2}{x^3}$,

(g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \text{arctg}(x)}{x^4}$,

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}(x)}\right)$,

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{\tan(2x)}$,

(j) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2 - x^3}$,

(k) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$.

16. Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$,

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{(x + 1)\,(x - 1)}$,

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,

(e) $f(x) = x - \text{sen}x$,

(f) $f(x) = x + \cos x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

(g) $f(x) = x - \text{arctg}x$,

(h) $f(x) = e^x + e^{-x}$,

(i) $f(x) = x\,\ln x$.

17. Estudiar la monotonía, la convexidad y concavidad, los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

    (b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

    (c) $h(x) = x - \text{arctg}x$, $x \in \mathbb{R}$.

    (d) $i(x) = \ln x$, $x \in]0, +\infty[$.

18. Calcular los valores de los parámetros b y c para que la función $f(x) = x^5 + bx + c$ cumpla $f(-1) = 2$ y tenga un punto crítico en 0.

19. Hallar dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. Calcular el número positivo que sumado con su inverso da lugar a la suma mínima.

20. Un agricultor quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si el precio del metro de valla es de 5 euros para el lado del campo más cercano al camino y de 1 euro para los restantes lados, hallar la mayor superficie de campo que se puede vallar con 2400 euros.

21. La pista de un pabellón deportivo consta de una zona rectangular y de un semicírculo en cada uno de los extremos. Si el perímetro de la pista ha de tener una longitud de 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular.

22. Calcular el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado cortando cuadraditos iguales de cada esquina.

23. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de dos metros de largo en dos trozos. Uno de los dos trozos se va a doblar en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Determinar como se debe de cortar el alambre para que el área total encerrada por las dos figuras creadas sea mínimo/máximo.

24. Encontrar la relación que deben de cumplir el radio y la altura de una lata cilíndrica que encierra volumen fijo V y tiene la menor superficie total posible.

25. Hallar los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ que están más próximos del punto $(0, 2)$.

26. Hallar la gráfica de la función $f(x) = \frac{3\,(x^2-4)}{x^2-1}$.

27. Hallar la gráfica de la función $f(x) = x\ln(x)$.

28. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^3-5x^2+1}-x^2.$$

29. Hallar los intervalos de monotonía y de convexidad de la función $f(x)=x^2e^x$.

30. Calcular el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x+1}\right), \quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}.$$

31. Hallar los extremos relativos y las asíntotas de $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$.

32. Hallar

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right), \qquad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}.$$

33. Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos de $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$.

34. Hallar las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2x^2+x-1}$.

35. Hallar los intervalos de monotonía y convexidad de la función

$$f(x)=\ln(x^2+1)+\arctan(x)-x.$$