Tema 7: Problemas clásicos de Programación Lineal

1.- Características generales de un problema de transporte y asignación

- Surgen con frecuencia en diferentes contextos de la vida real.
- Requieren un número muy grande de variables y restricciones. Así, la aplicación directa del método simplex resulta complicada y, por tanto, supone un gran esfuerzo computacional.
- La mayor parte de los coeficientes a_{ij} son cero y los que son distintos de cero siguen un patrón.

2.- Modelo de Transporte

El problema general de transporte se refire a la distribución de cualquier bien desde cualquier grupo de centros de abastecimiento, llamados ORÍGENES, a cualquier grupo de centros de recepción, llamados DESTINOS, de tal forma que se minimicen los costos totales de distribución. El origen i con $i = 1, \cdots, m$ dispone de b_i unidades para distribuir a los distintos destinos y el destino j con $j = 1, \cdots, n$ tiene una demanda de d_j unidades que recibe desde los orígenes.

Una suposición básica en este modelo es que el costo de distribuir unidades desde el origen i hasta el destino j es directamente proporcional al número distribuido.

◇ **Formulación como un problema lineal**

Variables de decisión: x_{ij} = número de unidades que se distribuyen del origen i al destino j

Costos: c_{ij} = costo por unidad distribuida del origen i al destino j

Disponibilidades: $b_i, i = 1, \cdots, m$ y Demandas: $d_j, j = 1, \cdots, n$

$$\begin{array}{ll} \text{Min} \;\; \mathrm{Z} = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ s.a. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, \cdots, n \\ & \quad x_{ij} \in Z^+ \end{array}$$

Cualquier problema que se ajuste a esta formulación se considera un problema de transporte independientemente del contexto físico.

Notemos que un problema de transporte tiene $m \times n$ variables de decisión y $m + n$ restricciones.

◇ **Solución de un problema de transporte**

Para que un problema de transporte tenga soluciones factibles es necesario que sea EQUILIBRADO, es decir, que se verifique

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Como consecuencia se tiene que la restricciones de desigualdad son de igualdad y el problema será

$$\begin{array}{ll} \text{Min} \;\; \text{Z} = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ s.a. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \cdots, n \\ & \quad x_{ij} \in Z^{+} \end{array}$$

Si el problema no es **equilibrado** se puede convertir en uno equilibrado introduciendo **orígenes o destinos ficticios.**

Notemos que esta formulación del problema nos lleva a que el sistema de ecuaciones correspondiente a las restricciones es redundante ya que la ecuación suma de las m primeras ecuaciones es igual a la suma de las n últimas. Esto nos dice que el rango de la matriz de coeficientes (o tasas de uso), A, no es $m+n$. Este hecho nos llevará a que el número de variables básicas de un problema de transporte es $m+n-1$ y $m \times n - (m+n)$ variables no básicas.

Es usual que los problemas de transporte vengan dados a partir de lo que se conoce como **Tabla de costos y requerimientos**. Esta tabla consta de tantas filas como orígenes y tantas columnas como destinos tenga el problema bajo estudio. En el interior de la tabla se tienen los costos, c_{ij}. Específicamente, la tabla es de la forma

Tabla de costos y requrimientos

	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	b_i
O_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	b_1
O_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	b_m
d_j	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

Ejemplo.- Dada la siguiente tabla de costos y requerimientos de un problema de transporte, expresar el problema de programación lineal asociado.

Tabla de costos y requrimientos

	D_1	D_2	D_3	b_i
O_1	3	2	5	8
O_2	4	3	1	6
d_j	10	5	6	

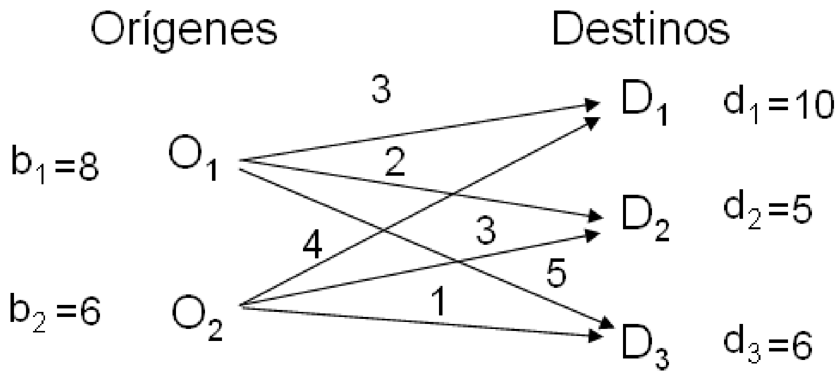

Figura 1: Grafo

Definimos las variables de decisión:

x_{ij} es el número de unidades que se distribuyen desde el origen i al destino j

y el problema de programación lineal es

Problema de programación lineal

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & \text{Z}=3x_{11}+2x_{12}+5x_{13}+4x_{21}+3x_{22}+x_{23} \\
s.a. & \quad x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 8 \\
 & \quad x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 6 \\
 & \quad x_{11}+x_{21} \geq 10 \\
 & \quad x_{12}+x_{22} \geq 5 \\
 & \quad x_{13}+x_{23} \geq 6 \\
 & \qquad x_{ij} \in Z^{+}
\end{array}
$$

Aunque en este curso no abordaremos los problemas de Transporte y Asignación desde la Teoría de Grafos, la Figura 1 representa este ejemplo usando un grafo.

◇ **Resolución de un problema de transporte**

Como hemos comentado la aplicación del algoritmo simplex para la resolución de un problema de transporte supone un gran esfuerzo computacional, esto nos lleva a utilizar otros métodos para resolver este tipo de problemas. El algoritmo que describimos a continuación se denomina **Algoritmo de Stepping stone** y para su aplicación necesitamos algunos conceptos previos que estudiamos a continuación.

La resolución de un problema de transporte se realiza a partir de lo que conocemos como **Tabla de transporte**. Una tabla de transporte es una tabla con tantas filas y columnas como orígenes y destinos tenga el problema. A la casilla (i, j) se le asocia la variable x_{ij}.

Definición: Un camino dirigido desde la casilla (i, j) a (u, v) de una tabla de transporte es un conjunto ordenado de casillas, $\{(i, j), (i, k), (q, k), \cdots, (u, v)\}$ o $\{(i, j), (s, j), \cdots, (u, v)\}$ de manera que dos casillas consecutivas en el conjunto deberían pertenecer a la misma fila o columna, mientras que tres casillas no deben pertenecer a la misma fila o columna y cada casilla debe aparecer solamente una vez en el conjunto ordenado.

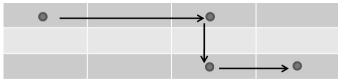

Figura 2: Camino Dirigido

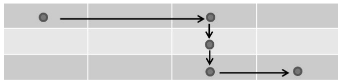

Figura 3: Camino no Dirigido

Notar que el camino de la Figura 3 no es dirigido ya que tres casillas de la misma columna están conectadas.

Definición: Un circuito dirigido en una tabla de transporte es un camino dirigido en el que la primera casilla del conjunto ordenado coincide con la última casilla y de manera que el primer arco sea ortogonal al último arco.

Definición: Un conjunto de casillas de una tabla de transporte, se dice que es **conexo** si para cualesquiera dos casillas del conjunto existe un camino dirigido que las une, empleando solo casillas de dicho conjunto.

La Figura 4 muestra un conjunto convexo de casillas y en la Figura 5 observamos que el conjunto de casillas dado no es conexo ya que la casilla (2,2)no se conecta con ninguna otra casilla.

Definición: El árbol de una tabla de transporte es un conjunto conexo de casillas de manera que ninguno de los caminos que conectan dos casillas del árbol sea un circuito.

Definición: Las casillas de una tabla de transporte correspondientes a cada una de las $m+n-1$ variables básicas de una solución básica y factible de un problema de transporte se denominan **casillas básicas**.

Teorema.- Cualquier conjunto de casillas básicas en una tabla de transporte forma un árbol con $m + n - 1$ casillas. Recíprocamente, las variables correspondientes a las de un árbol conteniendo $m + n - 1$ casillas forman una solución básica para el problema de transporte.

Algoritmo de Stepping stone

1.- Determinar la solución básica factible inicial mediante cualquier método conocido: Esquina noroeste o elemento mínimo.

2.- Comprobar la optimalidad de la solución básica factible, es decir, calcular los $z_{ij}-c_{ij}$ y comprobar si son menores o iguales que cero (ya que el problema es de minimizar) o equivalentemente si $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$ para todas las casillas no básicas. Si todos son

Figura 4: Conjunto de casillas Conexo

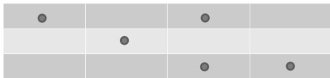

Figura 5: Conjunto de casillas No Conexo

mayores o iguales que cero, hemos encontrado la solución óptima; en caso contrario ir al paso 3.

3.- Entra en la base la variable no básica con valor $c_{ij} - z_{ij}$ más negativo. Para determinar la variable que deja la base, hacer $x_{ij} = \theta$ siendo x_{ij} la variable que entra en la base y $\theta \in Z^+$. Determinar el circuito asociado, imponer factibilidad y de ahí obtenemos la variable que deja la base.

4.- Volver al paso 2 y repetir hasta que todos los $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$, alcanzando la solución óptima.

◇ **Cálculo de la solución básica factible inicial**

Como hemos comentado estudiaremos dos métodos para determinar la solución inicial de un problema de transporte. El primero de ellos es el de la esquina noroeste.

Método de la Esquina Noroeste

Este método consiste en seleccionar como casillas básicas aquellas que se localizan en la esquina noroeste de sucesivas tablas de transporte.

a) Elegir la casilla (1,1) y asignar el valor $min\,\{b_1, d_1\}$ de forma que
Si $b_1 \leq d_1$ se suprime la primera fila de la tabla y se sustituye d_1 por $d_1' = d_1 - b_1$.
Si $b_1 > d_1$ se suprime la primera columna de la tabla y se sustituye b_1 por $b_1' = b_1 - d_1$.

b) Se elige la casilla situada en el extremo superior izquierdo de la nueva tabla y se repite el proceso hasta obtener las $m + n - 1$ variables básicas.

Método del elemento mínimo

La aplicación del método es como la del método de la esquina noroeste salvo la elección de las casillas básicas en cada una de las subtablas. Con este método se selecciona la casilla correspondiente a la variable que tenga el costo mínimo.

3.- Modelo de Asignación

El problema general de asignación se refire a la asignación de m agentes (Orígenes) a n tareas (Destinos) de tal forma que se minimicen los costos o eficiencias totales de asignación. En este tipo de problemas las variables de decisión vienen dadas por $x_{ij} = 1$ si al agente i se le asigna la tarea j y $x_{ij} = 0$ si no hay asignación.

◇ **Formulación como un problema lineal**

Variables de decisión: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al agente } i \text{ se le asigna la tarea } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Costos: c_{ij} = costo o eficiencia al asignar el agente i a la tarea j.

Disponibilidades: $b_i = 1, \forall i = 1, \cdots, m$ y Demandas: $d_j = 1, \forall j = 1, \cdots, n$.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} \ \ \mathrm{Z} = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ s.a. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \cdots, n \\ & \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array}$$

◇ **Resolución de un problema de asignación**

Notemos que el problema de asignación puede verse como un caso particular del problema de transporte. Por tanto, podemos utilizar el mismo algoritmo estudiado para su resolución teniendo en cuenta que las variables de decisión solo toman valores cero-uno. Sin embargo, como este problema tiene una estructura especial, $b_i = 1$ y $d_j = 1, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$, se han desarrollados distintos procedimientos para su resolución que se pueden ver en la bibliografía proporcionada.