Tema 2
Introducción a la resolución numérica de ecuaciones

Índice de contenidos

Introducción

La resolución de ecuaciones y sistemas (ya sean polinómicas, algebraicas o trascendentes) es uno de los problemas que con más frecuencia aparece en los distintos campos de la Ciencia y la Técnica.

Ya Herón (siglo I d.C.) empleaba un método iterativo para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

No existen métodos generales de resolución simbólica de ecuaciones o sistemas, salvo para ciertas ecuaciones de tipo polinómico o en el caso de sistemas lineales.

Introducción

La resolución de ecuaciones y sistemas (ya sean polinómicas, algebraicas o trascendentes) es uno de los problemas que con más frecuencia aparece en los distintos campos de la Ciencia y la Técnica.

Ya Herón (siglo I d.C.) empleaba un método iterativo para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

No existen métodos generales de resolución simbólica de ecuaciones o sistemas, salvo para ciertas ecuaciones de tipo polinómico o en el caso de sistemas lineales.

Introducción

La resolución de ecuaciones y sistemas (ya sean polinómicas, algebraicas o trascendentes) es uno de los problemas que con más frecuencia aparece en los distintos campos de la Ciencia y la Técnica.

Ya Herón (siglo I d.C.) empleaba un método iterativo para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

No existen métodos generales de resolución simbólica de ecuaciones o sistemas, salvo para ciertas ecuaciones de tipo polinómico o en el caso de sistemas lineales.

Métodos numéricos elementales

Los métodos numéricos que se emplean para resolver estas ecuaciones son de tipo iterativo y proporcionan una sucesión de aproximaciones, $\{x_k\}_{k\geq 0}$ que converge hacia una raíz $s \in \mathbb{R}$, de la ecuación.

Vamos a estudiar alguno de los métodos más empleados en la práctica: bisección, secante, regula-falsi y Newton-Raphson.

Métodos numéricos elementales

Los métodos numéricos que se emplean para resolver estas ecuaciones son de tipo iterativo y proporcionan una sucesión de aproximaciones, $\{x_k\}_{k\geq 0}$ que converge hacia una raíz $s \in \mathbb{R}$, de la ecuación.

Vamos a estudiar alguno de los métodos más empleados en la práctica: bisección, secante, regula-falsi y Newton-Raphson.

Método de bisección

Es el método más simple que se puede emplear para resolver ecuaciones; sólo requiere que la función sea continua y que hayamos localizado un cambio de signo de la misma en los extremos de cierto intervalo en el que empezaremos a trabajar.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y tal que

$$f(a) f(b) < 0.$$

Entonces existe $s \in [a, b]$ tal que $f(s) = 0$.

Método de bisección

Es el método más simple que se puede emplear para resolver ecuaciones; sólo requiere que la función sea continua y que hayamos localizado un cambio de signo de la misma en los extremos de cierto intervalo en el que empezaremos a trabajar.

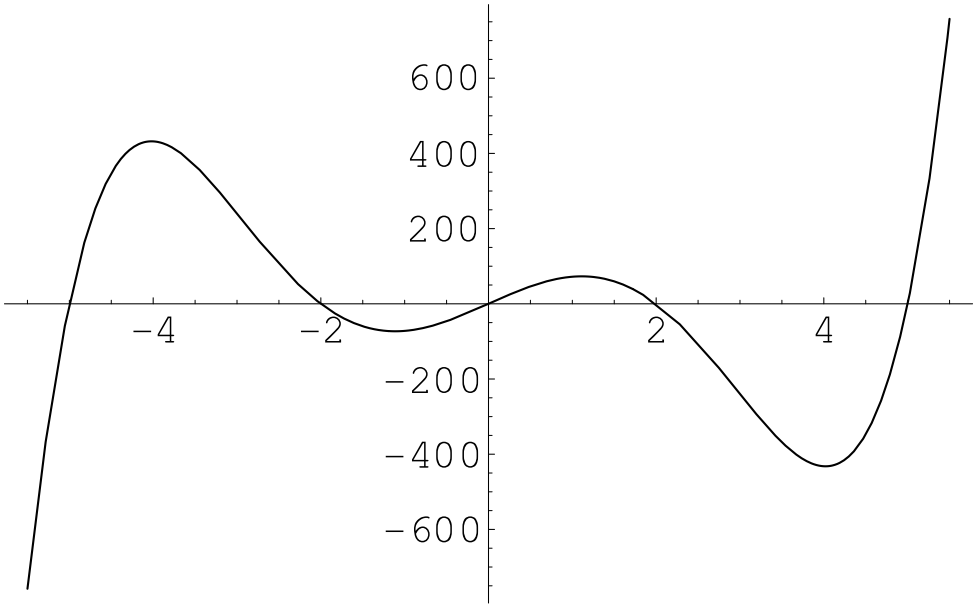
Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y tal que

$$f(a) f(b) < 0.$$

Entonces existe $s \in [a, b]$ tal que $f(s) = 0$.

Método de bisección



Método de bisección

El método de bisección consiste en la aplicación reiterada del conocido teorema de Bolzano, una vez asegurada la existencia de al menos una solución de la ecuación en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que f verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en cierto subintervalo $[a_k, b_k]$ del intervalo de partida $[a, b] = [a_0, b_0]$.

Método de bisección

El método de bisección consiste en la aplicación reiterada del conocido teorema de Bolzano, una vez asegurada la existencia de al menos una solución de la ecuación en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que f verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en cierto subintervalo $[a_k, b_k]$ del intervalo de partida $[a, b] \equiv [a_0, b_0]$.

Método de bisección

Sea $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k) = a_k + \frac{1}{2}(b_k - a_k)$, el punto medio. Se tendrá que:

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2}$$

Si $f(x_k) \neq 0$ y $f(a_k)\, f(b_k) < 0$, eligiendo el extremo en el que f tiene signo opuesto que en el centro, tenemos un nuevo intervalo que denotaremos $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, de tamaño mitad que el anterior, en el cual seguimos teniendo asegurado que f tiene una raíz.

Método de bisección

Sea $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k) = a_k + \frac{1}{2}(b_k - a_k)$, el punto medio. Se tendrá que:

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2}$$

Si $f(x_k) \neq 0$ y $f(a_k)\, f(b_k) < 0$, eligiendo el extremo en el que f tiene signo opuesto que en el centro, tenemos un nuevo intervalo que denotaremos $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, de tamaño mitad que el anterior, en el cual seguimos teniendo asegurado que f tiene una raíz.

Método de bisección

Sea $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k) = a_k + \frac{1}{2}(b_k - a_k)$, el punto medio. Se tendrá que:

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2}$$

Si $f(x_k) \neq 0$ y $f(a_k)\, f(b_k) < 0$, eligiendo el extremo en el que f tiene signo opuesto que en el centro, tenemos un nuevo intervalo que denotaremos $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, de tamaño mitad que el anterior, en el cual seguimos teniendo asegurado que f tiene una raíz.

Método de bisección

En general, empezando para $k = 0$ con el intervalo de partida, y mediante un proceso de inducción, tras k iteraciones, el valor absoluto del error cometido satisface la desigualdad

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Si no se llega a encontrar la solución exacta $s = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces se obtiene una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = s.$$

Método de bisección

En general, empezando para $k = 0$ con el intervalo de partida, y mediante un proceso de inducción, tras k iteraciones, el valor absoluto del error cometido satisface la desigualdad

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Si no se llega a encontrar la solución exacta $s = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces se obtiene una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = s.$$

Método de bisección

En general, empezando para $k = 0$ con el intervalo de partida, y mediante un proceso de inducción, tras k iteraciones, el valor absoluto del error cometido satisface la desigualdad

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Si no se llega a encontrar la solución exacta $s = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces se obtiene una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = s.$$

Método de bisección

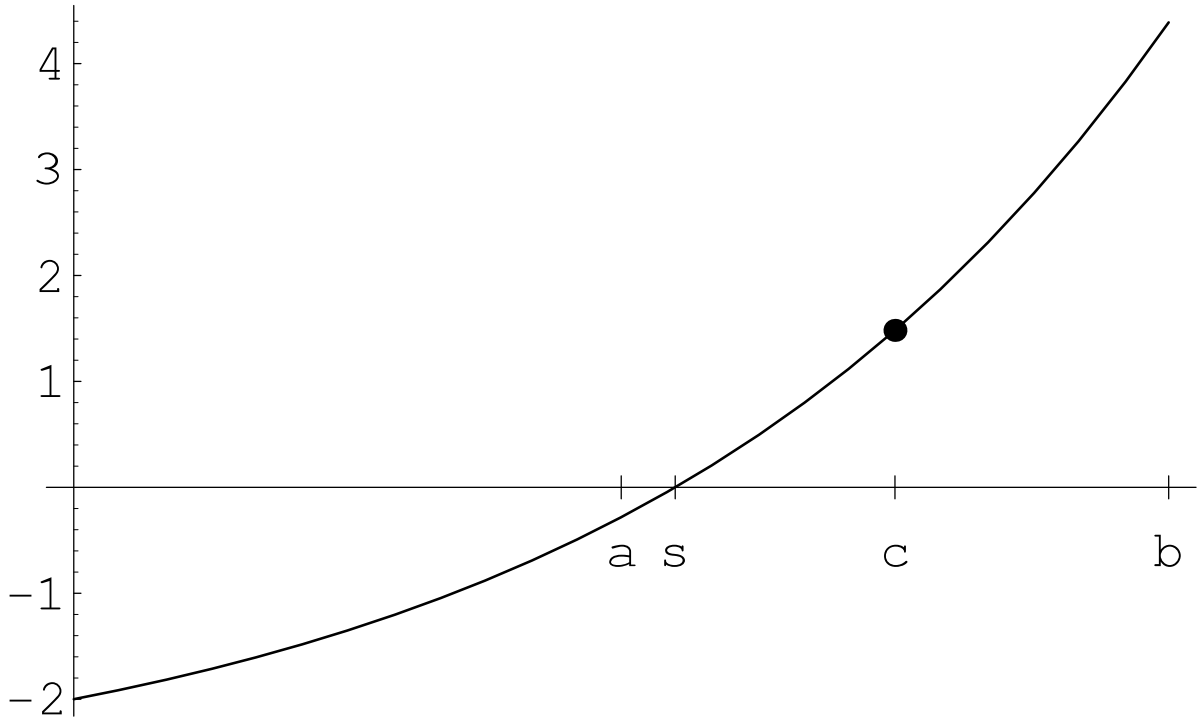
En general, empezando para $k = 0$ con el intervalo de partida, y mediante un proceso de inducción, tras k iteraciones, el valor absoluto del error cometido satisface la desigualdad

$$|s - x_k| < \frac{b_k - a_k}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Si no se llega a encontrar la solución exacta $s = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces se obtiene una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = s.$$

Método de bisección



Método de bisección

ALGORITMO DE BISECCIÓN

1. Entrar f, a, b, tol
2. Mientras $b - a \geq tol$
3. Hacer $c = a + \frac{1}{2}(b - a)$
4. Si $f(c) = 0$ entonces c es raíz. Fin
5. Si $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(c)$ entonces $b = c$.
6. Si $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(c)$ entonces $a = c$.
7. Ir a 2

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua . Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua . Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?

Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real. En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real.
Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

La función $f(x) = e^x + x - 2$ está definida en $\mathbb{R}$ y es continua .
Cumple que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo que tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es única?
Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 1$. Además, $f'(x) > 0$ en todo punto, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, es una función monótona creciente en el mismo y a lo sumo tiene una raíz real.En definitiva, f tiene una única raíz, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
A continuación presentaremos la tabla con el cálculo de 8 iteraciones e indicaremos cómo se han hallado.

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de bisección: un ejemplo

Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ admite una única raíz real. Utilice el método de bisección para aproximarla, partiendo de un intervalo apropiado.

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	$-$	$+$	$+$
1	0	0.25	0.5	$-$	$-$	$+$
2	0.25	0.375	0.5	$-$	$-$	$+$
3	0.375	0.4375	0.5	$-$	$-$	$+$
4	0.4375	0.46875	0.5	$-$	$+$	$+$
5	0.4375	0.453125	0.46875	$-$	$+$	$+$
6	0.4375	0.445313	0.453125	$-$	$+$	$+$
7	0.4375	0.441406	0.445313	$-$	$-$	$+$
8	0.441406	0.443359	0.445313	$-$	$+$	$+$

Método de regula-falsi

Partiendo de las mismas hipótesis que en el de bisección, ahora se va calculando x_k como la intersección con el eje OX de la correspondiente recta secante a la gráfica en los puntos $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$, $k \geq 0$.

Llamando también $c \equiv x_k$ a la aproximación de la raíz buscada, efectuaremos también un chequeo de cambio de signo y nos quedaremos con el subintervalo donde éste se siga manteniendo: $[a_k, c]$ o bien $[c, b_k]$.

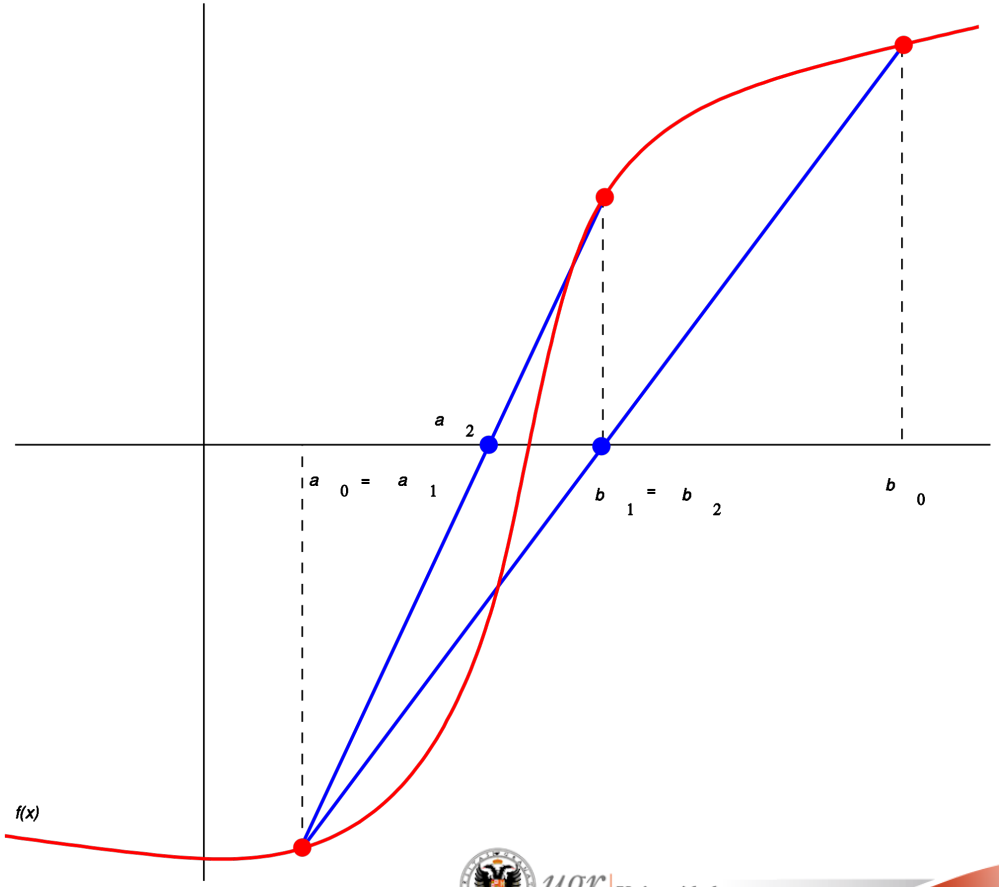
Método de regula-falsi

Partiendo de las mismas hipótesis que en el de bisección, ahora se va calculando x_k como la intersección con el eje OX de la correspondiente recta secante a la gráfica en los puntos $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$, $k \geq 0$.

Llamando también $c \equiv x_k$ a la aproximación de la raíz buscada, efectuaremos también un chequeo de cambio de signo y nos quedaremos con el subintervalo donde éste se siga manteniendo: $[a_k, c]$ o bien $[c, b_k]$.

Método de regula-falsi

Bastará con repetir este proceso de forma recursiva para ir obteniendo cada vez mejores aproximaciones de la raíz buscada.



Método de regula-falsi

Así pues c es el punto de corte de la recta secante, de ecuación

$$y = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(x - a_k) + f(a_k),$$

con el eje OX:

$$\begin{aligned} c = \quad & x_k = a_k - \frac{(b_k - a_k)\ f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \\ = \quad & b_k - \frac{(a_k - b_k)\ f(b_k)}{f(a_k) - f(b_k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \end{aligned}$$

Método de regula-falsi

Así pues c es el punto de corte de la recta secante, de ecuación

$$y = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(x - a_k) + f(a_k),$$

con el eje OX:

$$\begin{aligned} c = \quad & x_k = a_k - \frac{(b_k - a_k)\ f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \\ = \quad & b_k - \frac{(a_k - b_k)\ f(b_k)}{f(a_k) - f(b_k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \end{aligned}$$

Método de regula-falsi

En cuanto a la convergencia de este nuevo método, se siguen obteniendo intervalos encajados (sólo que ahora su longitud no tiene que tender hacia cero) y una sucesión de aproximaciones $\{x_k\}_{k\geq 0}$ de manera que $\lim_{k\to\infty} x_k = s$, siendo s una raíz de la ecuación dada en el intervalo de partida.

Método de regula-falsi

ALGORITMO DE REGULA–FALSI

1. Entrar f, a, b, tol
2. Mientras $b - a \geq tol$
3. Hacer $c = \dfrac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$
4. Si $f(c) = 0$ entonces c es raíz. Fin
5. Si $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(c)$ entonces $b = c$.
6. Si $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(c)$ entonces $a = c$.
7. Ir a 2

Método de la secante

Geométricamente este método se basa en la misma idea que el de regula-falsi, salvo que ahora se hará caso omiso a la sucesión de intervalos encajados que contienen a la raíz s y simplemente se seguirá un proceso iterativo a partir de los valores iniciales $x_0 = a$ y $x_1 = b$ mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\ &= x_k - \frac{(x_k - x_{k-1}) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \; k \geq 1. \end{aligned}$$

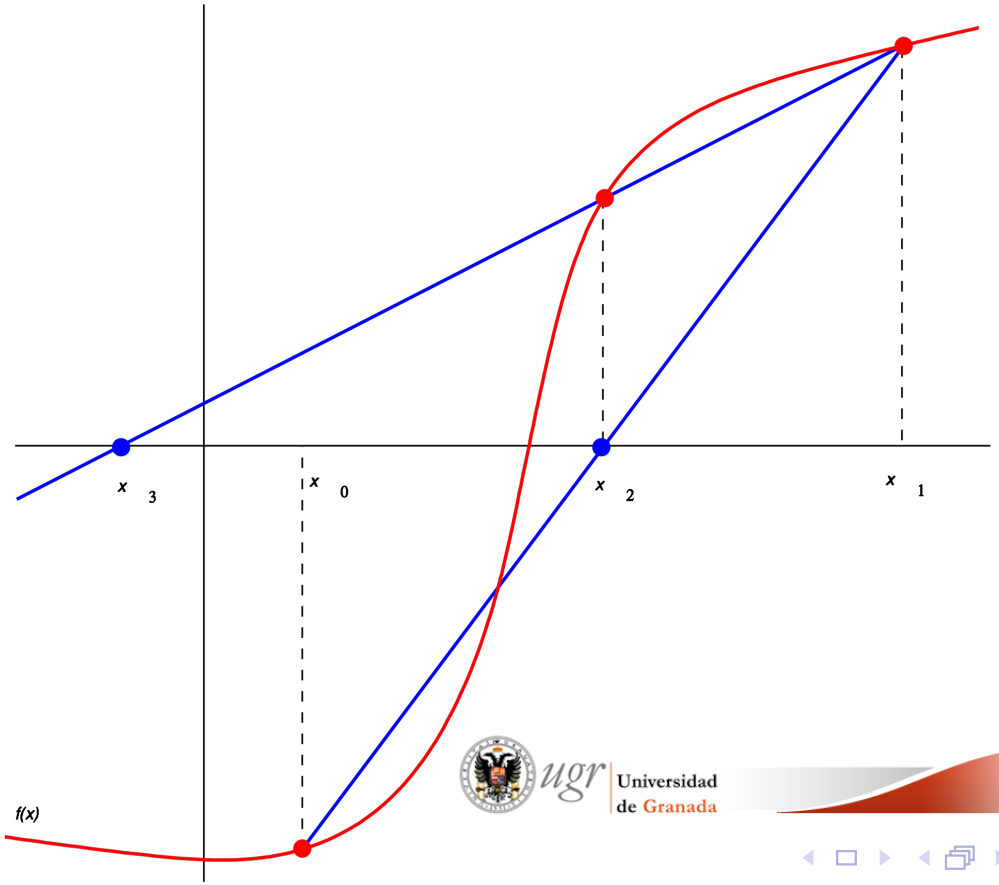
Método de la secante

Geométricamente este método se basa en la misma idea que el de regula-falsi, salvo que ahora se hará caso omiso a la sucesión de intervalos encajados que contienen a la raíz s y simplemente se seguirá un proceso iterativo a partir de los valores iniciales $x_0 = a$ y $x_1 = b$ mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k\, f(x_{k-1}) - x_{k-1}\, f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\ &= x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})\; f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \; k \geq 1. \end{aligned}$$

Método de la secante

De esta manera nos evitamos el tener que chequear en cada paso del algoritmo, el correspondiente cambio de signo de la función en los extremos de los intervalos, pero corremos el riesgo de que en algún caso no se tenga la deseada convergencia hacia la raíz de la ecuación.



Método de la secante

ALGORITMO DE LA SECANTE

1. Entrar f, a, b, tol
2. Mientras $b - a \geq tol$
3. Hacer $c = \dfrac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$
4. Si $f(c) = 0$ entonces c es raíz. Fin
5. Hacer $a = b$ y $b = c$.
6. Ir a 2

Método de Newton-Raphson

Deducción geométrica del algoritmo

Se obtiene una sucesión de aproximaciones partiendo de un valor inicial x_0, que debe ser elegido convenientemente.

A partir de cada x_k, la siguiente, x_{k+1}, se obtiene hallando el punto de corte de la correspondiente recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_k, f(x_k))$ con el eje OX

Método de Newton-Raphson

Deducción geométrica del algoritmo

Se obtiene una sucesión de aproximaciones partiendo de un valor inicial x_0, que debe ser elegido convenientemente.

A partir de cada x_k, la siguiente, x_{k+1}, se obtiene hallando el punto de corte de la correspondiente recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_k, f(x_k))$ con el eje OX

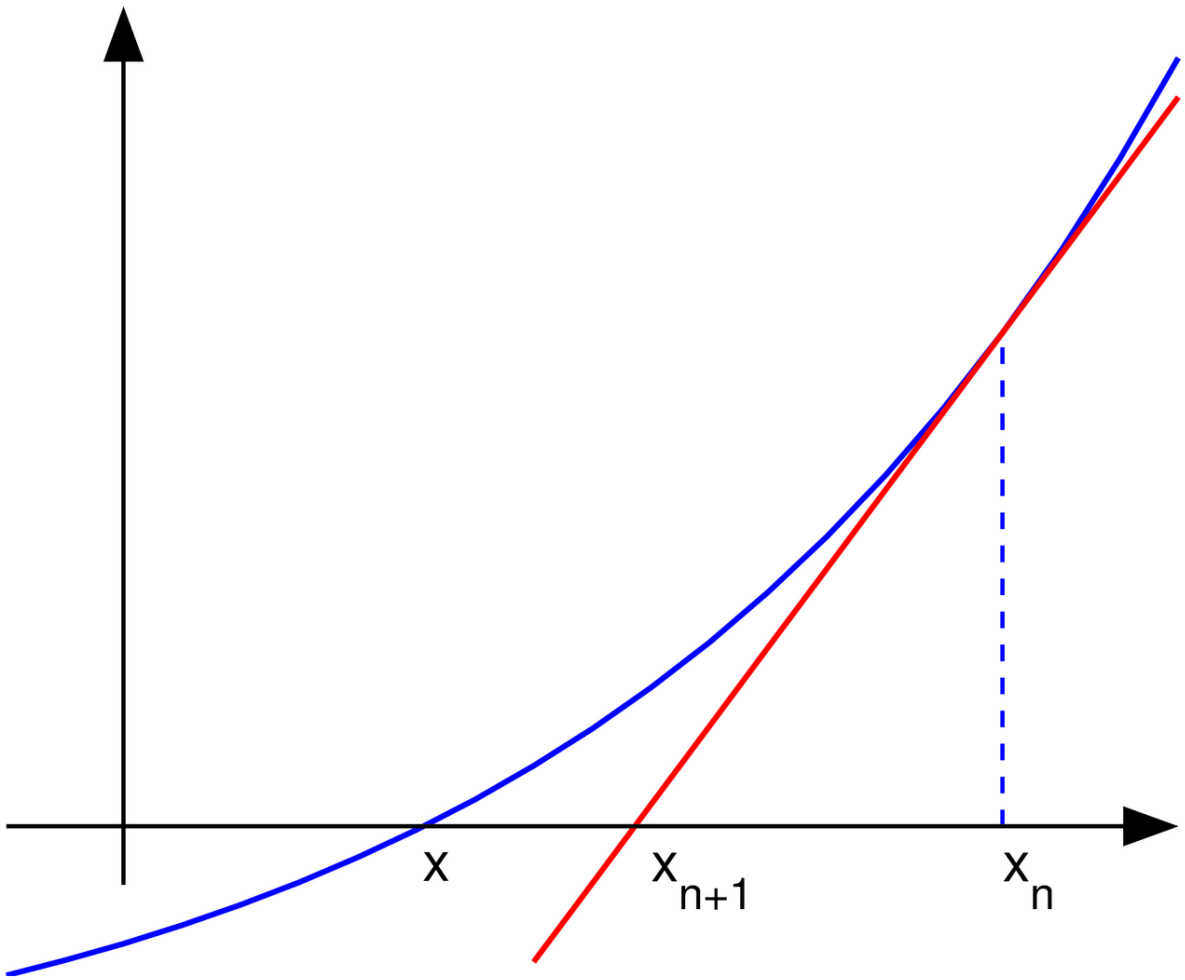
Método de Newton-Raphson

Deducción geométrica del algoritmo

Se obtiene una sucesión de aproximaciones partiendo de un valor inicial x_0, que debe ser elegido convenientemente.

A partir de cada x_k, la siguiente, x_{k+1}, se obtiene hallando el punto de corte de la correspondiente recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_k, f(x_k))$ con el eje OX

Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson

El proceso se repite sucesivamente, obteniéndose pues el siguiente método iterativo:

> Dado x_0,
>
> $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k \geq 0.$$

Este método iterativo fue empleado ya por Herón para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

Método de Newton-Raphson

El proceso se repite sucesivamente, obteniéndose pues el siguiente método iterativo:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dado } x_0, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k \geq 0. \end{array} \right. .$$

Este método iterativo fue empleado ya por Herón para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

Método de Newton-Raphson

El proceso se repite sucesivamente, obteniéndose pues el siguiente método iterativo:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dado } x_0, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k \geq 0. \end{array} \right. .$$

Este método iterativo fue empleado ya por Herón para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.

Método de Newton-Raphson

ALGORITMO DEL MÉTODO DE NEWTON–RAPHSON

1. Entrar f, x_0, tol
2. Hacer $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
3. Si $|x_0 - x_1| < tol$ entonces escribir x_1. Fin
4. En caso contrario hacer $x_0 = x_1$ e ir a 2.

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\, f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\, f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\, f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\, f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\, f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\, f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Método de Newton-Raphson

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\, f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\, f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Método de Newton-Raphson

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\ f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\ f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Convergencia del método de Newton–Raphson

Proposición

Supongamos que la función f admite derivada segunda en $[a, b]$ y verifica las siguientes propiedades:

- $f(a)\ f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- f'' no cambia de signo en $[a, b]$ (por ejemplo, $f''(x) \geq 0$ en todo punto).

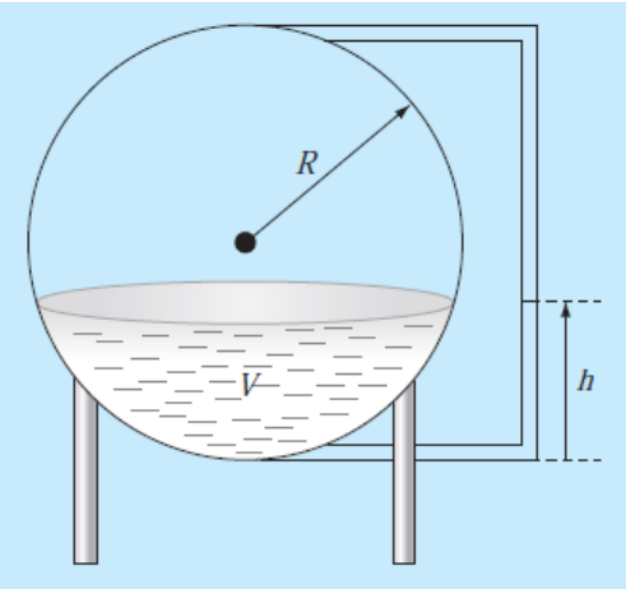
Entonces, partiendo de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ para el que se verifique que $f(x_0)\ f''(x_0) \geq 0$, la sucesión de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson converge hacia la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se diseña un tanque esférico para abastecer de agua a un pequeño pueblo. El volumen $V\ \left[m^3\right]$ del agua almacenada satisface la relación

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \left(3R - h\right),$$

donde h es la profundidad del agua $[m]$ y R el radio del tanque $[m]$.



El tanque se llena de manera que la altura del agua no supere el valor del radio de la esfera.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Para R y V dados, la ecuación anterior puede ser escrita como $f(h) = 0$. Determine la expresión de f y su intervalo de definición.

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \implies \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V = 0$$
$$\implies f(h) = 0$$

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V, \; 0 \leq h \leq R$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Para R y V dados, la ecuación anterior puede ser escrita como $f(h) = 0$. Determine la expresión de f y su intervalo de definición.

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \implies \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V = 0$$
$$\implies f(h) = 0$$

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V, \; 0 \leq h \leq R$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Para R y V dados, la ecuación anterior puede ser escrita como $f(h) = 0$. Determine la expresión de f y su intervalo de definición.

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \implies \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V = 0$$
$$\implies f(h) = 0$$

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V, \; 0 \leq h \leq R$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

Si V fuese igual al volumen de la semiesfera, entonces es claro que $h = R$. Supongamos que $V < \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}}$.

La función f es continua. Además,

$$f(0) = -V < 0$$

$$f(R) = \frac{\pi}{3}R^2(3R - R) - V = \frac{2}{3}\pi r^3 - V = \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}} - V > 0$$

Por lo tanto,

$$f(0)\,f(R) < 0$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

Si V fuese igual al volumen de la semiesfera, entonces es claro que $h = R$. Supongamos que $V < \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}}$.

La función f es continua. Además,

$$f(0) = -V < 0$$

$$f(R) = \frac{\pi}{3}R^2(3R - R) - V = \frac{2}{3}\pi r^3 - V = \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}} - V > 0$$

Por lo tanto,

$$f(0)\,f(R) < 0$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

Si V fuese igual al volumen de la semiesfera, entonces es claro que $h = R$. Supongamos que $V < \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}}$.

La función f es continua. Además,

$$f(0) = -V < 0$$

$$f(R) = \frac{\pi}{3}R^2(3R - R) - V = \frac{2}{3}\pi r^3 - V = \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}_{\mathrm{Esfera}} - V > 0$$

Por lo tanto,

$$f(0)\,f(R) < 0$$

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

La función f es derivable y

$$f'(h) = \frac{\pi}{3}\left(2h(3R-h) + h^2(-1)\right) = \pi h(2R-h) \neq 0$$

Además, admite derivada segunda y

$$f''(h) = 2\pi(R-h) \quad \geq 0$$

Por lo tanto, la ecuación considerada tiene una única solución interior a su intervalo de definición.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

La función f es derivable y

$$f'(h) = \frac{\pi}{3}\left(2h(3R-h) + h^2(-1)\right) = \pi h(2R-h) \neq 0$$

Además, admite derivada segunda y

$$f''(h) = 2\pi(R-h) \quad \geq 0$$

Por lo tanto, la ecuación considerada tiene una única solución interior a su intervalo de definición.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

El método de Newton-Raphon produce una sucesión convergente a dicha raíz si se parte de un valor x_0 tal que $f(x_0) f''(x_0) \geq 0$.

Como $f(R) > 0$ y $f''(R) \geq 0$, entonces podemos tomar $x_0 = R$.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Se pretende resolver numéricamente dicha ecuación mediante el método de Newton-Raphson. Estudie la aplicabilidad del teorema global de convergencia y determine un valor inicial que produzca una sucesión convergente.

El método de Newton-Raphon produce una sucesión convergente a dicha raíz si se parte de un valor x_0 tal que $f(x_0) f''(x_0) \geq 0$.

Como $f(R) > 0$ y $f''(R) \geq 0$, entonces podemos tomar $x_0 = R$.

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Si $R = 3\ m$, realice tres iteraciones del método de Newton-Raphson para aproximar la altura necesaria para conseguir un volumen de 30 m^3.

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (9 - h) - 30$$

k	h_k	$f(h_k)$	$f'(h_k)$	$h_{k+1} = h_k - \frac{f(h_k)}{f'(h_k)}$
0	3	26.5487	28.2743	2.06103
1	2.06103	0.866921	25.5045	2.02704
2	2.02704	0.00344933	25.3004	2.02691

Método de Newton-Raphson: un ejemplo

Si $R = 3\ m$, realice tres iteraciones del método de Newton-Raphson para aproximar la altura necesaria para conseguir un volumen de 30 m^3.

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (9 - h) - 30$$

k	h_k	$f(h_k)$	$f'(h_k)$	$h_{k+1} = h_k - \dfrac{f(h_k)}{f'(h_k)}$
0	3	26.5487	28.2743	2.06103
1	2.06103	0.866921	25.5045	2.02704
2	2.02704	0.00344933	25.3004	2.02691