Universidad de Granada	**Análisis Numérico** Máster en Ingeniería Civil Curso 2014/2015	**Relación de Ejercicios** Tema 2

1. Utilice los métodos de bisección y de Newton-Raphson en el intervalo $[1, 2]$ para obtener una aproximación de la raíz real de la ecuación $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$. Después de cinco iteraciones, ¿cuál es más adecuado?

2. Se considera la ecuación no lineal $e^x + senx - 2 = 0$.

   (a) Pruebe que admite una raíz real en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Usando el método de Newton-Raphson, dé un valor aproximado de la raíz con un error menor que 0.001.

3. Sabiendo que la ecuación $x^3 + x = 6$ tiene una única raíz en el intervalo $[1.55, 1.75]$, ¿ cuántas iteraciones bastan para aproximar la raíz con un error absoluto inferior a 10^{-3} por el método de bisección? Justifíquelo. Efectúe cuatro iteraciones.

4. Pruebe que la ecuación $3x + \cos x - 2e^x + 1 = 0$ tiene una única en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Estudie si es aplicable el teorema global de convergencia del método de Newton-Raphson para estimarla. Aproxímela realizando iteraciones hasta que el valor absoluto de la diferencia entre dos consecutivas sea menor o igual que 10^{-3}.

5. Un depósito contiene inicialmente 20 m^3 de agua a 303 K. En un momento determinado se comienza a introducir agua a 353 K con un caudal de 3.10^{-3} m^3/s y, mediante una válvula controlada, se inicia la descarga con caudal también constante e igual a 1.10^{-3} m^3/s. Despreciando las posibles pérdidas de calor al exterior, suponiendo mezcla total en el tanque y tomando un segundo como base de cálculo, entre la temperatura, T, y el tiempo transcurrido, t, existe la relación

$$T = 353 - 50\left(\frac{20000}{20000 + 2t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

   Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar el tiempo transcurrido para que la temperatura sea de 317.22 K mediante cinco iteraciones.

6. Partiendo de un punto que garantice la convergencia del método de Newton-Raphson, aproxime la raíz positiva de la ecuación $e^x + x^2 - 3 = 0$ realizando las iteraciones necesarias hasta que valor absoluto del cociente entre la diferencia de dos consecutivas y la última calculada sea inferior a 10^{-2}.

7. Para calcular de manera aproximada $s = \ln 2$ se aplica el método de regula-falsi a la función $f(x) = e^x - 2$ comenzando por el intervalo $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.

   (a) Calcule los primeros cuatro intervalos $[a_k, b_k]$ correspondientes y observe que la sucesión a_k es creciente. ¿Qué ocurre con b_k?

   (b) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ y los intervalos obtenidos. ¿Convergerá a cero la longitud $b_k - a_k$ de los intervalos?

8. La función $f(x) = \tan(\pi x) + 6$ tiene un cero $s = -(1/\pi)\arctan 6 \approx -0.447431543$. Aproxime esta raíz a partir de $x_0 = -0.48$ y $x_1 = 0$ aplicando 10 iteraciones de los métodos de bisección, regula falsi y secante. ¿Cuál de ellos produce mejores resultados?

9. Hállense las condiciones que debe cumplir la función $h(x)$ para que el método iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2 - c}{2x_n} h(x_n)$$

produzca una sucesión convergente a $\sqrt{c}$, $c > 0$, con convergencia, al menos, cúbica si se parte de un x_0 próximo a $\sqrt{c}$.

10. Se considera la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función con un cero simple y suficientemente regular. Para aproximar una raíz, r, de dicha ecuación se usa el método

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)f'(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

¿Qué condiciones ha de satisfacer f para que el método converja localmente a r, con orden de convergencia, al menos, cúbico?

11. Para aproximar $\sqrt{a}$, $a > 0$, se utiliza el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Determínese su orden de convergencia.

(b) Aplíque dicho método partiendo de $x_0 = 2$ para aproximar $\sqrt{5}$ con dos decimales exactos.