Capítulo 4

Formalismo hamiltoniano y transformaciones canónicas

En este tema vamos a estudiar otro formalismo matemático, el formalismo hamiltoniano, que se puede usar también para derivar las leyes de la mecánica, y que fue desarollado por el matemático, físico y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865). El formalismo hamiltoniano es físicamente equivalente al formalismo lagrangiano, aunque el punto de partida matemático es muy diferente. No aporta ninguna física nueva, ni hace más fácil la resolución de las ecuaciones de movimiento. La gran ventaja está en los conceptos matemáticos nuevos que introduce y en que este formalismo se puede extender a nuevas áreas de la física moderna. Por ejemplo, fuera de la mecánica clásica, el formalismo hamiltoniano proporciona un lenguaje más apropiado en campos como la física estadística y la mecánica cuántica.

En este tema vamos a considerar que las ligaduras del sistema son siempre holónomas.

4.1. El Hamiltoniano como transformada de Legendre

En el formalismo lagrangiano, un sistema con n grados de libertad tiene asociadas n ecuaciones del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{4.1}$$

con q_i $(i = 1, ...N)$ las coordenadas generalizadas.

Lo que tengo entonces son n ecuaciones de segundo orden. El movimiento del sistema vendría determinado para cualquier tiempo $t = t_1$ sólo cuando especifico el valor de $2n$ condiciones iniciales, por ejemplo, las q_i y las $\dot{q}_i$ en $t = t_0$.

Un estado físico de un sistema en un momento $t = t_0$ está caracterizado por los valores de las coordenadas generalizadas $q_\alpha(t_0)$. Los n coordenadas generalizadas q_α describen un punto en el *espacio de configuraciones* n-dimensional y la evolución del sistema viene dado por la trayectoria $q_\alpha(t)$ en el espacio de configuraciones. Observad que, aunque matemáticamete a la hora de derivar las ecuaciones de Lagrange hemos tratado las velocidades generalizadas $\dot{q}_\alpha$ como independientes de las posiciones q_α, físicamente las $\dot{q}_\alpha$ no aparecen como variables independientes en el espacio de configuraciones, sino sólo como las derivadas de q_α y como condiciones iniciales.

El formalismo hamiltoniano está basado en un concepto diferente. Lo que se persigue es describir el sistema con ecuaciones diferenciales de primer orden, en vez de segundo orden. El número de condiciones iniciales que determinan el estado del sistema tiene que ser el mismo, así que lo que tengo en la formulación hamiltoniana son $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en vez de n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ahora tengo el doble de variables independientes, que serían las n coordenadas generalizadas y los momentos generalizados $p_\alpha = \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial \dot{q}_\alpha}$. A las cantidades (q,p) se les llama variables canónicas. El estado de un sistema ahora está caracterizado por $2n$ variables q_α y p_α en un espacio $2n$-dimensional, llamado el *espacio de las fases*.

Desde el punto de vista estríctamente matemático, como dijimos antes, q_i y $\dot{q}_i$ son variables independientes, y lo mismo ocurre con q_i y p_i, así que puedo considerar la transición de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana como un cambio de variables $(q_i, \dot{q}_i, t) \to (q_i, p_i, t)$.

El procedimiento para llevar a cabo este cambio de variables viene dado por las transformaciones de Legendre[1], que están diseñadas para este tipo de cambio de variables. Así, la *función de Hamilton* o *hamiltoniano* está definida como la transformada de Legendre del lagrangiano.

Transformadas de Legendre

En general, se puede definir la *transformación de Legendre* de una función $f(x,y)$ con diferencial

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{4.2}$$

a una función $h(v,y) = vx - f(x,y)$ con diferencial

$$dh(v,y) = \frac{\partial h}{\partial v}dv + \frac{\partial h}{\partial y}dy \tag{4.3}$$

si tomamos que

$$v = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\partial h}{\partial v}. \tag{4.4}$$

Fijaos que lo que tomamos por los variables de una función son los derivadas parciales de la transformada de Legendre. Las transformaciones de Legendre son por lo tanto una herramienta muy útil si queremos describir la misma física en términos de otras variables fundamentales. Es una técnica muy común en la termodinámica. Fijaos que las transformaciones de Legendre forman un $\mathbb{Z}_2$: si $h(v,y)$ es la transformada de Legendre de $f(x,y)$, también $f(x,y)$ es la transformada de $h(v,y)$.

El diferencial total de un lagrangiano $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ viene dado por

$$\begin{aligned} dL(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \dot{p}_\alpha dq_\alpha + d(p_\alpha \dot{q}_\alpha) - \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la definición (1.22) del momento conjugado y la ecuación de Lagrange, mientras en la tercera igualdad hemos escrito el término $p_\alpha d\dot{q}_\alpha$ como un diferencial total menos la parte que faltaba para el diferencial total.

Si ahora agrupamos los términos de (4.5) que son diferenciales totales, obtenemos

$$dH(q_\alpha, p_\alpha, t) = \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}dt = -dL + d(p_\alpha \dot{q}_\alpha) \tag{4.6}$$

donde hemos definido el hamiltoniano $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ como

$$H(q_\alpha, p_\alpha, t) = p_\alpha \dot{q}_\alpha(p_\beta) - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha(p_\beta), t). \tag{4.7}$$

[1]Dos funciones diferenciables son una transformada de Legendre de la otra si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra

¿Cómo hay que leer esta definición? Pues ya hemos visto que los momentos conjugados p_α están definidos por (1.22) como

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \tag{4.8}$$

lo que nos da en general una expresión de p_α en función de q_α, $\dot{q}_\alpha$ y t. En la mayoría de los casos relevantes, esta expresión es invertible, tal que podemos escribir $\dot{q}_\alpha$ en función de q_α, p_α y t. Sustituyendo esta expresion para las $\dot{q}_\alpha$ en la definición (4.7) del hamiltoniano, obtenemos una expresión para H en función de las coordenadas generalizadas, sus momentos conjugados y el tiempo, $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$.

Vemos pues que el lagrangiano y el hamiltoniano son la transformada de Legendre el uno del otro, donde las variables conjugadas son las velocidades generalizadas $\dot{q}_\alpha$ y los momentos p_α. Ambos contienen la misma información física, pero codificada de otra manera. Sé que las ecuaciones del movimiento me dan la dinámica del sistema y, por lo tanto, del lagrangiano y el hamiltoniano puedo extraer las mismas ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones de movimiento o las *ecuaciones de Hamilton* se pueden derivar fácilmente de (4.6):

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.9}$$

Las dos primeras ecuaciones constituyen el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden que sustituye a las ecuaciones de Lagrange. Tanto físicamente como matemáticamente son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange (1.17).

Formalmente el Hamiltoniano se construye a partir del Lagrangiano.

- **Ejemplo** Para concretar un poco el formalismo y demostrar que también desde el punto de vista físico las ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las de Lagrange, miraremos el ejemplo de una partícula en un potencial. En coordenadas cartesianas, el lagrangiano de una partícula con masa m en un potencial $V(x)$ viene dado por

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i - V(x). \tag{4.10}$$

Por la definición (1.22) tenemos que el momento conjugado $p_i = m\dot{x}_i$, o invirtiendo esta relación $\dot{x}_i = p_i/m$. Para el hamiltoniano de una partícula en un potencial obtenemos por lo tanto a través de la definición (4.7)

$$H = \frac{1}{2m} p_i p_i + V(x) \tag{4.11}$$

Las ecuaciones de Hamilton (4.9) en este caso son

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}. \tag{4.12}$$

Reconocemos en la primera ecuación simplemente la relación conocida entre las velocidades y los momentos conjugados y en la segunda ecuación la ley de Newton en el caso de fuerzas conservativas. Combinando las dos ecuaciones obtenemos la ecuación (**??**) deducida en el formalismo lagrangiano.

4.2. Interpretación y cantidades conservadas

Queremos saber un poco mejor qué significado tiene el Hamiltoniano. De las mismas ecuaciones de Hamilton (4.9) se ve que la derivada total del hamiltoniano con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{dH}{dt} \;=\; \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{4.13}$$

donde los primeros dos términos se cancelan mutuamente, debido a (4.9). Vemos por lo tanto que si el hamiltoniano no depende explícitamente de t, H es una cantidad conservada. En realidad, esto ya lo sabíamos de la discusión de las cantidades conservadas en el formalismo lagrangiano, en sección 1.4. La definición (4.7) del hamiltoniano obtenido a través de la transformación de Legendre coincide con la definición de la cantidad conservada E, obtenida en (1.28) y la relación (1.29) es lo mismo que la tercera ecuación de Hamilton (4.9).

Ya hemos visto en la sección 1.4 que para el caso que las coordenadas generalizadas (1.3) no son funciones del tiempo y que además el potencial no depende de las velocidades generalizadas $\dot{q}_\alpha$, la cantidad conservada E es la energía mecánica $T+V$ del sistema.

Efectivamente, en este caso el lagrangiano viene dado por

$$L = \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta - V(q_\alpha) \tag{4.14}$$

y es fácil de ver, utilizando la definición (4.7) y la inversa de (4.8), que el hamiltoniano es por lo tanto de la forma

$$H = \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + V(q_\alpha) \;=\; T+V. \tag{4.15}$$

Hay casos en los que H no se conserva y/o que no es la energía mecánica, pero para un estudio más sistemático referimos a la literatura.

El hecho de que el hamiltoniano es, dadas ciertas circunstancias, la energía mecánica del sistema, es una de las ventajas del formalismo hamiltoniano. Sabiendo que los mínimos del potencial corresponden a soluciones estáticas estables, sólo tenemos que buscar los mínimos de H para encontrarlas.

Los mismos teoremas de conservación del formalismo lagrangiano también se aplican al caso hamiltoniano, quiza incluso más claramente. Si una coordenada q_α **es cíclica** (es decir, si no aparece explícitamente, sino a través de su velocidad) en el lagrangiano, también lo es en el hamiltoniano. Pero de (4.9) se ve directamente que en este caso el momento conjugado es constante $p_\alpha = c_\alpha$. Como en el formalismo hamiltoniano las posiciones y los momentos son variables independientes, es posible eliminar dos grados de libertad del sistema: la coordenada cíclica simplemente porque no aparece y su momento conjugado, puesto que en el hamiltoniano aparecera como un parámetro constante [2]

Muchas veces buscar la solución de las $2n$ ecuaciones acopladas de Hamilton no resulta más fácil que la de las n ecuaciones de Lagrange, aunque estas últimas sean de segunda orden. A la hora de resolver un problema, por lo tanto, el formalismo hamiltoniano no proporciona ninguna ventaja grande, aparte de los momentos conservados.

4.3. Transformaciones canónicas

Dado que las ecuaciones de Hamilton (4.9) son tan fáciles en el caso de coordenadas cíclicas, es conveniente estudiar bajo qué condiciones el hamiltoniano toma la forma más sencilla. Un hamiltoniano podría tener alguna coordenada cíclica en un sistema de coordenadas (q_α, p_α), sin que esto fuera obvio en otro sistema de coordenadas.

[2] Fijaos que aquí no hemos dicho nada sobre si la cordenada cíclica era una coordenada angular o no. Los teoremas de conservación y las cantidades conservadas se aplican por lo tanto a momentos lineales y a momentos angulares.

Por ejemplo, del hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \tag{4.16}$$

en coordenadas cartesianas no está claro, pero pasando a coordenadas esféricas se ve que la coordenada $\phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ es cíclica y el momento angular asociado se conserva.

Quiero ver qué tipo de transformaciones puedo hacer para intentar buscar coordenadas cíclicas y simplificar mi hamiltoniano, y cómo cambiar el hamiltoniano. A las dos primeras ecuaciones de Hamilton que ya hemos visto

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \tag{4.17}$$

se le llama las *ecuaciones canónicas* y cualquier transformación de coordenadas y momentos

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\beta, p_\beta, t), \qquad P_\alpha = P_\alpha(q_\beta, p_\beta, t), \tag{4.18}$$

se llama una *transformación canónica* si existe una función $\tilde{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t)$ tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha}. \tag{4.19}$$

Es decir, transformaciones canónicas son aquellas que conservan la forma y la validez de las ecuaciones de Hamilton. Y quiero usar ese tipo de transformaciones para buscar tantas coordenadas cíclicas como pueda.

Resulta que el producto de dos transformaciones canónicas es una transformación canónica y que el inverso de una transformación canónica y la identidad también son canónicas. Por lo tanto, el conjunto de transformaciones canónicas forma un grupo bajo la composición de funciones.

Para determinar la forma del hamiltoniano nuevo $\tilde{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t)$ y su relación con $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$, hay que darse cuenta que tanto (4.17) como (4.19) surgen de un principio variacional (el principio de mínima acción

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)dt \;=\; \delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha, t)\Big]dt = 0, \tag{4.20}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t)dt \;=\; \delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t)\Big]dt = 0, \tag{4.21}$$

Dado la relación (4.18) entre (q_α, p_α) y (Q_α, P_α), esto implica que los integrandos de las dos ecuaciones están relacionados a través de la identidad

$$C\Big(p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\Big) = P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H} + \frac{d}{dt}F(q_\alpha, p_\alpha, t), \tag{4.22}$$

donde C es una constante arbitraria y $F(q_\alpha, p_\alpha, t)$ una función arbitraria de las variables canónicas y el tiempo, que cumple

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF(q_\alpha, p_\alpha, t)}{dt}dt = 0 \quad \Longrightarrow \delta\left[F(q_\alpha, p_\alpha, t_1) - F(q_\alpha, p_\alpha, t_0)\right] = 0\,. \tag{4.23}$$

Sin pérdida de generalidad se puede escoger $C = 1$.[3] A F se le llama función generadora o generadora de la transformación y si la conozco me va a permitir conocer las ecuaciones de transformación. F es una función de $2n+1$ variables (incluyendo el tiempo) que puedo escoger (tendría en un

[3]Para una $C \neq 1$ siempre se puede hacer una redefinición de las variables canónicas $Q'_\alpha = AQ_\alpha$ y $P'_\alpha = BP_\alpha$ y del hamiltoniano $\tilde{H}' = AB\tilde{H}$ con $AB = C$, tal que en la relación (4.22) C ya no aparece.

principio $4n+1$ (q_i, p_i, Q_i, P_i y t) pero tengo $2n$ ecuaciones que ligan las variables. F se puede escribir como función de las variables canónicas (q_α, p_α), de (Q_α, P_α) o incluso de combinaciones de éstas, utilizando la relación (4.18) entre un par de variables canónicas y otro. En la práctica resultará más conveniente elegir la mitad de las variables pertenecientes a las variables antiguas y la otra mitad a las nuevas, por ejemplo,

$$F(q_j, Q_j, t) \quad \text{o} \quad F(q_j, P_j, t) \quad \text{en vez de} \quad F(p_j, Q_j, t) \quad \text{o} \quad F(p_j, P_j, t) \tag{4.24}$$

Veamos que si tenemos F, sabemos las relaciones de transformación. Si escribimos por ejemplo F en función de las coordenadas q_α y Q_α, obtenemos para (4.22)

$$p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H} + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{4.25}$$

o, reagrupando los términos con $\dot{q}_\alpha$ y $\dot{Q}_\alpha$,

$$\Big(p_\alpha - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\Big)\dot{q}_\alpha - H = \Big(P_\alpha + \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\Big)\dot{Q}_\alpha - \tilde{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4.26}$$

Dado que tanto H, $\tilde{H}$ como F son independientes de $\dot{q}_\alpha$ y $\dot{Q}_\alpha$, esto último sólo puede ser verdad si

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}, \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4.27}$$

Vemos por lo tanto que la función $F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ actúa como una función generadora de la transformación canónica: dada una transformación canónica (4.18), se pueden expresar p_α y P_α en función de q_α, Q_α y t. Las primeras dos ecuaciones (4.27) proporcionan un sistema de ecuaciones diferenciales que nos permiten encontrar la función $F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ que relaciona el hamiltoniano antiguo H con el nuevo $\tilde{H}$ a través de la tercera ecuación de (4.27). Lo que acabamos de hacer es demostrar que dada una función generadora F, podemos obtener las transformaciones canónicas (4.18) de Q_α y P_α en función de q_α y p_α, mientras la tercera ecuación de (4.27) nos da el hamiltoniano del cual Q_α y P_α son las variables canónicas.

Normalmente se puede invertir el proceso y, de las transformaciones canónicas, se puede deducir la función generadora resolviendo las ecuaciones diferenciales anteriores. Sólo tendría una función aditiva del tiempo indeterminada que no afectaría a las transformaciones.

A veces es más conveniente escribir la función generadora F en términos de otras variables, como por ejemplo q_α y P_α (por ejemplo porque en la transformación canónica (4.18) los P_α no dependen de los q_α). En este caso la derivación es análoga, salvo por la sutileza de que la función generadora que aparece en (4.25) tiene que ser

$$\tilde{F}(q_\alpha, P_\alpha, t) = F(q_\alpha, P_\alpha, t) - P_\alpha Q_\alpha. \tag{4.28}$$

Sustituyendo esta expresión en (4.25) y agrupando de términos con $\dot{q}_\alpha$ y $\dot{P}_\alpha$, obtenemos las ecuaciones

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha}, \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4.29}$$

Del mismo modo se obtienen las fórmulas análogas para los casos en que F se expresa en función de p_α y Q_α ó de p_α y P_α.

Veremos ahora unos ejemplos de transformaciones canónicas.

- Consideramos primero la función generadora $F = q_\alpha P_\alpha$. De las ecuaciones (4.29) tenemos que $Q_\alpha = q_\alpha$ y $P_\alpha = p_\alpha$. En otras palabras, la función $F = q_\alpha P_\alpha$ genera una transformación trivial, donde las nuevas variables canónicas son las mismas que las antiguas y el hamiltoniano es invariante. La importancia de este ejemplo trivial está en demostrar que la identidad es una transformación canónica, una propiedad necesaria para la esctructura de grupo de las transformaciones canónicas.

- Consideramos ahora la transformación

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= aq_\alpha + bp_\alpha, \\ P_\alpha &= cq_\alpha + dp_\alpha. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Queremos saber bajo qué condiciones esta transformación es canónica, cuál es su función generadora F y de qué hamiltoniano $\tilde{H}$ son Q_α y P_α las variables canónicas. Lo primero es por lo tanto expresar (por ejemplo) p_α y P_α en función de las coordenadas q_α y Q_α:

$$p_\alpha = b^{-1}(Q_\alpha - aq_\alpha), \qquad P_\alpha = (c - adb^{-1})q_\alpha + db^{-1}Q_\alpha. \tag{4.31}$$

Podremos obtener una expresión para F resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (4.27)

$$\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = b^{-1}(Q_\alpha - aq_\alpha), \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} = (c - adb^{-1})q_\alpha + db^{-1}Q_\alpha. \tag{4.33}$$

No es difícil ver que la solución es

$$F = -b^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}aq_\alpha^2 + \tfrac{1}{2}dQ_\alpha^2 - q_\alpha Q_\alpha\Big), \tag{4.34}$$

con las condiciones $ad - bc = 1$ y $b \neq 0$. Vemos por lo tanto que podemos actuar con cualquier transformación $SL(2,\mathbb{R})$, mezclando coordenadas y momentos sin cambiar nada físico. Esto indica que la distinción entre coordenadas y momentos es completamente arbitraria en el formalismo hamiltoniano. Efectivamente, en el caso espacial donde $a = d = 0$ y $b = -c = 1$ tenemos que la transformación canónica intercambia las posiciones de las variables antiguas con los momentos de las nuevas y viceversa. Fijaos por último en que la identidad no se puede escribir como una transformación canónica de la forma (4.30), por violar la condición $b \neq 0$. Ya hemos visto arriba que la función generadora no es de la forma (4.34).

También hay otra manera de saber si una transformación (4.18) es canónica sin tener que recurrir a la función generadora, por lo menos en el caso en que la transformación no depende del tiempo. Consideramos la transformación canónica

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\beta, p_\beta), \qquad P_\alpha = P_\alpha(q_\beta, p_\beta), \tag{4.35}$$

y su inverso

$$q_\alpha = q_\alpha(Q_\beta, P_\beta), \qquad p_\alpha = p_\alpha(Q_\beta, P_\beta). \tag{4.36}$$

De (4.35) sabemos que

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\dot{p}_\beta = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta}, \tag{4.37}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado las ecuaciones de Hamilton (4.9). Por otro lado, dado que Q_α y P_α también son variables canónicas (por construcción), sabemos de (4.36) que

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial P_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial P_\alpha}. \tag{4.38}$$

Fijaos en este punto que los hamiltonianos que aparecen en (4.37) y (4.38) son el mismo, puesto que la transformación (4.35) no depende del tiempo. Podemos por lo tanto comparar directamente las dos expresiones (4.37) y (4.38) para $\dot{Q}_\alpha$. Las dos expresiones sólo pueden ser válidas a la vez, es decir las transformaciones (4.35) y (4.35) sólo pueden ser canónicas, si

$$-\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial q_\beta}{\partial P_\alpha}, \qquad\qquad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial p_\beta}{\partial P_\alpha}. \tag{4.39}$$

Del mismo modo comparando las expresiones para $\dot{P}_\alpha$ obtenemos las condiciones

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}, \qquad\qquad -\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}. \tag{4.40}$$

Estas expresiones, aparte de darnos las condiciones necesarias para que una tranformación sea canónica, nos serán útiles para demostrar la invariancia de los corchetes de Poisson (que estudiaremos en la siguiente sección) bajo transformaciones canónicas.

4.4. Corchetes de Poisson

Existe otro formalismo para describir la dinámica de un sistema, que está íntimamente relacionado con el formalismo hamiltoniano y con las transformaciones canónicas: el formalismo de los corchetes de Poisson. A igual que el formalismo hamiltoniano, el formalismo de los corchetes de Poisson no aporta física nueva, ya que es equivalente al hamiltoniano (y por lo tanto también al formalismo lagrangiano), pero sí proporciona un enfoque nuevo para tratar sistemas dinámicos, relacionándolo con teoría de álgebras de Lie y proporcionando un lenguaje que es directamente aplicable a la formulación de la mecánica cuántica.

El corchete de Poisson es un símbolo matemático que sirve para expresar de manera sencilla ciertas propiedas físicas del sistema. En particular, sirve para estudiar las constantes del movimiento.

En el formalismo hamiltoniano, la derivada total con respecto al tiempo de cualquier cantidad $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Si ahora definimos los *corchetes de Poisson* $\{f, g\}$ de dos funciones $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ y $g(q_\alpha, p_\alpha, t)$ como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}, \tag{4.42}$$

entonces vemos que se puede escribir (4.41) como

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4.43}$$

Esta última ecuación describe la evolución de la cantidad $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ y por lo tanto se puede considerar como su ecuación del movimiento.

EJERCICIO: Demostrar que de la ecuación (4.43) se pueden recuperar las ecuaciones de Hamilton (4.9). Pista: tomar $f(q_\alpha, p_\alpha, t) = q_\alpha$

En particular la ecuación de Poisson (4.43) toma una forma sencilla si la función $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ es una constante de movimiento. En este caso la ecuación se reduce a

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{4.44}$$

El formalismo de los corchetes de Poisson resulta especialmente útil para estudiar los conjuntos de las cantidades conservadas. Pero antes de entrar en este tema, discutiremos algunas de sus propiedades.

Se puede comprobar (**Ejercicio**) utilizando directamente la definición (4.42) que los corchetes de Poisson tienen las siguientes propiedades

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{4.45}$$

$$\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}, \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\{f, g\} = \{\frac{\partial f}{\partial \eta}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial \eta}\}, \tag{4.47}$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g, \tag{4.48}$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \tag{4.49}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$ si es necesario) y η cualquier variable de las funciones consideradas. Las ecuaciones (4.45)-(4.47) expresan la antisimetría y la linearidad de los corchetes de Poisson, la ecuación (4.48) la decomposición del producto y la ecuación (4.49) es la *identidad de Poisson* o la *identidad de Jacobi*.

Aparte de estas propiedades, los corchetes de Poisson son invariantes bajo transformaciones canónicas.

- *Demostración*: Para demostar esto, consideramos primero los llamados *corchetes fundamentales de Poisson* de las variables canónicas q_α y p_α:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \qquad \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{4.50}$$

Otro conjunto de variables canónicas Q_α y P_α, generado a través de una transformación canónica (4.35) satisface las mismas relaciones. Aplicando la regla de la cadena y las condiciones para canonicidad (4.39)-(4.40) vemos que

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\gamma} = -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial q_\gamma}{\partial P_\beta} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\gamma}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\beta} = 0. \tag{4.51}$$

Del mismo modo es fácil de demostrar que

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \qquad \{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{4.52}$$

En general, los corchetes de Poisson de dos funciones f y g transforma bajo una transformación canónica (4.35) como

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \\
&= \frac{\partial f}{\partial Q_\beta}\frac{\partial g}{\partial Q_\gamma}\{Q_\beta, Q_\gamma\} + \frac{\partial f}{\partial Q_\beta}\frac{\partial g}{\partial P_\gamma}\{Q_\beta, P_\gamma\} \\
&\qquad + \frac{\partial f}{\partial P_\beta}\frac{\partial g}{\partial Q_\gamma}\{P_\beta, Q_\gamma\} + \frac{\partial f}{\partial P_\beta}\frac{\partial g}{\partial P_\gamma}\{P_\beta, P_\gamma\} \\
&= \frac{\partial f}{\partial Q_\beta}\frac{\partial g}{\partial P_\beta} - \frac{\partial f}{\partial P_\beta}\frac{\partial g}{\partial Q_\beta},
\end{aligned} \tag{4.53}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado la regla de la cadena y las condiciones para canonicidad (4.39)-(4.40) y en la tercera igualdad la invariancia canónica de los corchetes fundamentales de Poisson (4.51)-(4.52). Por lo tanto vemos que no sólo los corchetes fundametales son invariantes bajo transformaciones canónicas, sino también los corchetes de cualesquieres dos cantidades f y g.

Lo que acabamos de ver implica que la dinámica descrita por la ecuacion de Poisson (4.43) es independiente de las variables canónicas que utilicemos.

Esta propiedad también nos sirve para comprobar cuándo dos variables son canónicas.

Constantes del movimiento

Pasaremos ahora al estudio de las constantes del movimiento. Ya hemos visto que si una función $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ es constante durante el movimiento del sistema, esta función satisface la ecuación

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{4.54}$$

En particular, si f no depende del tiempo explícitamente, entonces (4.54) se reduce a $\{f, H\} = 0$.

Está claro que cuanto más constantes del movimiento conozcamos, más simple será en análisis del sistema, puesto que se reduce el número de ecuaciones diferenciales que tenemos que resolver. El formalismo de los corchetes de Poisson nos proporciona una manera elegante de estudiar las constantes del movimiento:

* **Teorema de Poisson** (o el *teorema de Poisson-Jacobi*) dice que si dos funciones $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ y $g(q_\alpha, p_\alpha, t)$ son constantes del movimiento, entonces el corchete de Poisson de f y g tambíen es una constante del movimiento.

- *Demostración*: Efectivamente, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \; = \; \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} \; = \; \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} \; = \; \{\{f, g\}, H\}, \tag{4.55}$$

  donde en la segunda identidad hemos utilizado que f y g son constantes del movimiento y en la última igualdad la identidad de Jacobi (4.49).

De esta manera, conociendo dos o más constantes del movimiento, se puede encontrar más aplicando los corchetes de Poisson a los distintos pares de constantes. Sin embargo, no siempre es posible obtener de este modo todas las constantes del sistema, ni todas las constantes obtenidas son independientes. Es posible que el resultado obtenido sea una combinación (constante) de la constantes ya conocidas y también puede ocurrir que de un conjunto de constantes de movimiento genera sólo un subconjunto de todas las constantes del sistema.

- **Ejemplo:** Veremos ahora un ejemplo concreto, el de una partícula libre, no sometida a fuerzas ni ligaduras. Está claro que en este caso el potencial es cero y el hamiltoniano sólo consiste en la energía cinética y depende por lo tanto, en coordenadas cartesianas, sólo de los momentos $p_i = m\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Por el análisis hecho en las secciones 1.4 y 4.2 sabemos que aparte de los p_i, también los momentos angulares $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$ se conservan. Efectivamente, es fácil comprobar que los corchetes de Poisson $\{p_i, H\}$ y $\{L_i, H\}$ son cero, con lo cual satisfacen la condición (4.54), dado que ni p_i ni L_i dependen del tiempo. Calculando los distintos corchetes de Poisson de las distintas combinaciones de cantidades conservadas obtenemos

$$\{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{p_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} p_k, \qquad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{4.56}$$

  Estas 6 constantes de movimiento describen completamente el sistema de 3 grados de libertad. Pero es fácil de ver que si sólo concieramos L_1 y L_2, podríamos obtener L_3 a través de los corchetes de Poisson, aunque no sería posible obtener los p_i.