

Capítulo 3

Pequeñas oscilaciones

Una clase de fenómenos que pueden ser tratados en la formulación lagrangiana de una manera muy efectiva son las pequeñas oscilaciones de un sistema alrededor de los estados de equilibrio. La teoría de este tipo de oscilaciones tiene un gran número de aplicaciones físicas en acústica, estudio de espectros moleculares, vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos acoplados. Si las desviaciones del estado de equilibrio del sistema son lo suficientemente pequeñas, la dinámica del sistema se puede describir de la misma manera que si fuera un sistema de osciladores armónicos lineales acoplados.

3.1. Osciladores acoplados. Modos normales de oscilación.

Supongamos que tenemos un sistema conservativo con n grados de libertad, donde las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas no dependen del tiempo (todas las ligaduras son esclerónomas). El lagrangiano genérico que describe este sistema es

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n) \quad (3.1)$$

Ya que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo y las ligaduras son esclerónomas, la energía se conserva y viene dada por $E=T+V$.

Se dice que el sistema está en equilibrio cuando las fuerzas generalizadas que actúan sobre el mismo son nulas

$$Q_i = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (3.2)$$

para todo i . En la ecuación anterior el subíndice 0 indica que la derivada está evaluada en la configuración de equilibrio $\{q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}\}$. Esto es, las n fuerzas generalizadas se anulan simultáneamente cuando las variables toman los valores $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}$. Esto significa que el potencial V tiene un extremo en ese punto del espacio de configuraciones.

Si la configuración inicial del sistema está en equilibrio con velocidades iniciales \dot{q}_i nulas, el sistema continuará en equilibrio indefinidamente (\dot{q}_i y \ddot{q}_i son nulas). Ejemplo: un péndulo en reposo o un huevo sobre un extremo. Mientras que si se encuentra en un lugar alejado del equilibrio también con velocidades nulas, la no anulación de la aceleración (ya que fuera del equilibrio las fuerzas generalizadas son no nulas) implica que el sistema ganará velocidad y se apartará entonces del punto inicial.

Una posición de equilibrio se denomina *estable* si una pequeña desviación del estado de equilibrio sólo produce un movimiento acotado alrededor de la posición de reposo. El equilibrio es

inestable cuando una pequeña desviación del reposo produce un movimiento no acotado. Si el punto de equilibrio corresponde a un mínimo de energía potencial, el estado inicial apartado del equilibrio tiene energía potencial mayor, por lo que la conservación de la energía implica que el sistema se tiene que mover hacia punto de menos energía potencial cuando aumenta la energía cinética y, por tanto, hacia el punto de equilibrio. El movimiento está acotado y, por tanto, esto corresponde a un punto de equilibrio estable. Sin embargo, si en el punto de equilibrio la energía es máxima, después de una perturbación el sistema tendería a alejarse de él, claramente, el equilibrio es inestable en este caso. Veremos una prueba más rigurosa de esto más adelante.

En este tema vamos a estudiar el movimiento de un sistema en las inmediaciones de un punto de equilibrio estable. Ya que las desviaciones con respecto a este punto son pequeñas, todas las funciones se pueden expandir en desarrollos de Taylor alrededor de ese punto. Llámemos $\eta_i \equiv q_i - q_{0i}$ a las desviaciones de las coordenadas generalizadas con respecto al equilibrio. Las q_i serán las nuevas coordenadas generalizadas y sus derivadas $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$. Desarrollamos ahora en serie de Taylor hasta orden dos (el orden más bajo no trivial) alrededor de (q_{01}, \dots, q_{0n}) , la energía potencial será

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \mathcal{O}(\eta_k^3) \quad (3.3)$$

donde hemos usado la convención de sumación sobre índices repetidos. Los términos lineales en η_i se anulan por la condición de equilibrio (derivada nula del potencial). El primer término de la serie no es más que la energía potencial de la posición de equilibrio y lo puedo eliminar desplazando el punto en el cual la energía potencial se cancela (punto que es arbitrario) al punto de equilibrio (hago $V(q_{01}, \dots, q_{0n}) = 0$). De manera que lo que tengo es (a segundo orden en las η_k)

$$V(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j \quad (3.4)$$

donde hemos llamado a la segunda derivada del potencial en el punto de equilibrio (que es una constante que sólo depende de las coordenadas generalizadas en es punto), V_{ij} . De su definición es obvio que esa constante es simétrica, $V_{ij} = V_{ji}$.

Como ya vimos en el tema anterior, la independendencia del tiempo de las ligaduras lleva a que la energía cinética se pueda escribir de la forma genérica

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.5)$$

Y haciendo un desarrollo en potencias de Taylor

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \\ m_{ij}(q_1, \dots, q_n) &= m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \mathcal{O}(\eta_k^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

El segundo término en esta expansión lo puedo olvidar porque T es ya cuadrático en las perturbaciones: $T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ con $T_{ij} \equiv m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n})$. De nuevo, es obvio que por construcción las T_{ij} son simétricas.

Usando las expresiones que acabamos de obtener para las energías cinética y potencial podemos obtener el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j) + \mathcal{O}(\eta_i^3, \dot{\eta}_i^3) \quad (3.7)$$

Este lagrangiano determina las trayectorias de las nuevas coordenadas generalizadas η_i a través de las n ecuaciones de Lagrange correspondientes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0 \quad (3.8)$$

para $i = 1, \dots, n$. Lo que tenemos entonces es un sistema de n ecuaciones diferenciales, lineales y acopladas.

Ejemplo: Dos péndulos acoplados

Las ecuaciones del movimiento que acabamos de obtener ¹,

$$T_{ik}\ddot{\eta}_k + V_{ik}\eta_k = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

son muy parecidas a las que tenemos en teorías de circuitos y otros campos de la física, así que podemos intentar usar soluciones similares para las ecuaciones del movimiento,

$$\eta_k(t) = C a_k e^{-i\omega t} \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

donde $C a_k$ es una constante compleja que nos da la amplitud de la oscilación para cada coordenada η_k . La constante C es un escalar que se introduce por conveniencia (factor de escala) y es la misma para todos los valores de k . Ya que el problema original sólo involucra cantidades reales, debemos tomar la parte real de la solución propuesta. Ya que las ecuaciones diferenciales son lineales y sus coeficientes reales, las partes reales e imaginarias de las η_k no pueden mezclarse entre sí, por lo que puede usarse la forma compleja de las η_k propuestas y tomarse la parte real al final del cálculo. Sustituyendo las η_k en las ecuaciones en (3.8) se obtiene

$$(V_{ik}a_k - \omega^2 T_{ik}a_k) = 0, \quad (3.11)$$

para $i = 1, \dots, n$. Esto es un sistema algebraico, lineal y homogéneo para las incógnitas a_k . Este sistema tendrá una solución no trivial sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo

$$\det(V_{ik} - \omega^2 T_{ik}) = 0. \quad (3.12)$$

Matricialmente esto lo puedo escribir como

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = 0. \quad (3.13)$$

Esta condición me determina que la incógnita ω^2 corresponde a las raíces de un polinomio de grado n . Una vez obtenemos los valores de ω^2 , podemos resolver el sistema de ecuaciones en (3.11) para obtener los valores de las constantes a_k y tener así totalmente determinadas las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

En general, la ecuación anterior tiene n raíces reales positivas ². Las ω_α ($\alpha = 1, \dots, n$) determinadas se denominan **frecuencias características o autofrecuencias o frecuencias resonantes**. Y para cada ω_α obtengo un conjunto de n soluciones a_i a la ecuación (3.11). La solución general de las ecuaciones del movimiento (3.8) viene dada por una combinación lineal de todas las posibles soluciones de la forma (3.10) con distintas frecuencias características (y tomando la parte real como indicamos anteriormente):

$$\eta_k(t) = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^n C_j a_k^j e^{-i\omega_j t} \right]. \quad (3.14)$$

En la expresión anterior la j etiqueta cada una de las soluciones de la ecuación característica (3.12) y k etiqueta cada una de las coordenadas generalizadas. Es decir, tengo un conjunto de n valores de ω_j (y las correspondientes $a_k^{(j)}$ y C_j) para cada una de las n coordenadas generalizadas $\eta_k(t)$. Una solución completa de las ecuaciones del movimiento por tanto, vendría dada por una combinación de las n posibles frecuencias para cada coordenada generalizada de la manera escrita en (3.14). De modo que si el sistema es apartado ligeramente de la posición de equilibrio, se producirán pequeñas oscilaciones alrededor de la configuración de equilibrio con frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_k$.

¹ Aquí hemos cambiado la notación en el segundo índice por conveniencia para el desarrollo posterior.

² *Argumento físico:* Es evidente por argumentos físicos que las raíces son reales y positivas. La existencia de una parte imaginaria en ω supondría la presencia, en la dependencia temporal de las coordenadas η_j , y por tanto de las velocidades $\dot{\eta}_j$, de un factor decreciente o creciente exponencialmente. Y esto es inadmisibles, ya que conllevaría una variación temporal de la energía total del sistema, que es conservada.

3.1.1. Descripción matricial

En la mayoría de los casos conviene trabajar usando técnicas matriciales.

Llamamos \mathbf{V} a la matriz de componentes V_{ij} , \mathbf{T} a la de componentes T_{ij} , y \mathbf{a}^j al vector columna de componentes a_i^j asociados a la frecuencia ω_j . Agrupamos además estos n vectores columna en una matriz de dimensión $n \times n$ (luego cada columna está asociada a una ω_j distinta)

$$\mathbf{A} = \left(\left(\begin{array}{c} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \dots \\ a_n^1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \dots \\ a_n^2 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} a_1^n \\ a_2^n \\ \dots \\ a_n^n \end{array} \right) \right). \quad (3.15)$$

y definimos una matriz diagonal con los valores de las ω_j

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Con estas definiciones las ecuaciones (3.11) para cada ω_j se pueden escribir como

$$\mathbf{V}\mathbf{a}^j = \omega_j^2 \mathbf{T}\mathbf{a}^j, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

y todas éstas, a su vez, como una única ecuación matricial (se entiende el cuadrado como el producto matricial de la matriz consigo misma)

$$\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{\Omega}^2 \quad (3.18)$$

Vamos a ver que la matriz de autovalores \mathbf{A} diagonaliza simultáneamente a \mathbf{V} y a \mathbf{T} .

Para ello el primer paso es multiplicar la ecuación (3.17) a la izquierda por el vector fila $(\mathbf{a}^l)^T$ (donde T indica transposición matricial) y llamamos $\lambda_j \equiv \omega_j^2$

$$(\mathbf{a}^l)^T \mathbf{V}\mathbf{a}^j = \lambda_j (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^j, \quad (3.19)$$

y ahora escribimos la misma ecuación pero intercambiando los índices j y l

$$(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{V}\mathbf{a}^l = \lambda_l (\mathbf{a}^j)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^l, \quad (3.20)$$

Si tenemos en cuenta que

$$[(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{V}\mathbf{a}^l]^T = (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{V}^T \mathbf{a}^j = (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{V}\mathbf{a}^j \quad (3.21)$$

$$[(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^l]^T = (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{T}^T \mathbf{a}^j = (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^j \quad (3.22)$$

donde hemos usado que las matrices \mathbf{V} y \mathbf{T} son simétricas. Si trasponemos (3.19) y la restamos de (3.20) tenemos

$$(\lambda_j - \lambda_l) (\mathbf{a}^l)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^j = 0. \quad (3.23)$$

De manera que si $j \neq l$ y $\lambda_j \neq \lambda_l$, entonces

$$(\mathbf{a}^l)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^j = 0, \quad (3.24)$$

esto es, los vectores correspondientes a valores distintos de λ_j son ortogonales a través de la matriz \mathbf{T} .

Elegimos entonces la normalización ³ de manera que

$$(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{T}\mathbf{a}^j = 1. \quad (3.25)$$

³Puedo elegir una normalización arbitraria porque las ecuaciones que determinan estos vectores, (3.11), son homogéneas y, por tanto, los puedo multiplicar por un factor constante arbitrario.

Usando esto en las ecuaciones (3.24) tengo que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (3.26)$$

Multiplicando ahora la ecuación (3.18) por la izquierda por la matriz \mathbf{A}^T y usando que la ecuación anterior, obtenemos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} \Omega^2 = \Omega^2 \quad (3.27)$$

que es la matriz diagonal de elementos ω_j^2 definida en (3.16). Es decir, la matriz \mathbf{A} diagonaliza simultáneamente a \mathbf{V} y \mathbf{T} como queríamos ver.

Hasta ahora hemos supuesto que no hay degeneración, es decir, que para $j \neq l$, $\lambda_j \neq \lambda_l$. La generalización al caso en el que hay degeneración es análoga a lo que ocurre en un problema de autovalores. Si hay degeneración, en las ecuaciones para las \mathbf{a}^j y \mathbf{a}^l más de una de las componentes de cada uno puede elegirse arbitrariamente siempre y cuando se cumpla la condición de ortogonalidad (3.24). Aquí vamos siempre a suponer que no hay degeneración.

Recapitulando, una vez determinadas las matrices \mathbf{V} y \mathbf{T} se resuelve el problema de autovalores (3.12)

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = 0 \quad (3.28)$$

para calcular los n autovalores ω_j^2 . Con estos resolvemos las ecuaciones (3.17) para obtener los autovectores \mathbf{a}^j que normalizamos para que cumplan (3.26). Para determinar las constantes C_j deben usarse las condiciones iniciales, que podemos escribir de forma matricial si definimos los vectores columna

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \eta_1(t=0) \\ \eta_2(t=0) \\ \dots \\ \eta_n(t=0) \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1(t=0) \\ \dot{\eta}_2(t=0) \\ \dots \\ \dot{\eta}_n(t=0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Usando estas condiciones iniciales en las soluciones (3.14), tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_i(t=0) &= \sum_{j=1}^n \text{Re}[C_j] a_1^j \\ \dot{\eta}_i(t=0) &= \sum_{j=1}^n \omega_j \text{Im}[C_j] a_1^j \end{aligned} \quad (3.30)$$

que en forma matricial se puede expresar como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_0 &= \mathbf{A} \text{Re}[\mathbf{C}] \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 &= \mathbf{A} \Omega \text{Im}[\mathbf{C}] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando la condición (3.26), multiplicamos a la izquierda cada una de estas ecuaciones por $\mathbf{A}^T \mathbf{T}$ y usamos además que $(\Omega^{-1})_{ij} = \delta_{ij} \omega_i^{-1}$ para obtener

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathbf{C}] &= \mathbf{A}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\eta}_0 \\ \text{Im}[\mathbf{C}] &= \Omega^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Hemos visto entonces que la solución se puede obtener de forma sistemática operando matricialmente.

Ejemplo: Molécula triatómica

3.1.2. Modos normales

Una pregunta lógica después de lo que hemos visto es, ¿existe un conjunto de coordenadas generalizadas tal que cada una de ellas ejecute una oscilación simple, es decir, con un único modo de vibración? Es decir, ¿existe una elección de coordenadas generalizadas tal que el sistema se desacople y la vibración resultante de una pequeña perturbación con respecto a la posición de equilibrio tiene una única frecuencia? La respuesta es sí, como vamos a ver en esta sección. A esto es lo que se les llama *modos normales* y son combinaciones lineales de las η_k que acabamos de encontrar.

Vamos a escribir las ecuaciones del movimiento en forma matricial para el vector columna $\boldsymbol{\eta}(t)$

$$\mathbf{T}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Al vector de coordenadas normales lo voy a llamar $\boldsymbol{\zeta}$. Lo que quiero es encontrar las $\boldsymbol{\zeta}$ tales que las componentes de este vector se desacoplen en las ecuaciones del movimiento. Esto lo consigo eligiendo las $\boldsymbol{\zeta}$ de la forma

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}. \quad (3.34)$$

Ya que si sustituyo esta definición en las ecuaciones del movimiento y uso que $\mathbf{A}^T\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ tengo

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

o, en términos de las componentes de las matrices,

$$\ddot{\zeta}_j + \omega_j^2\zeta_j = 0. \quad (3.36)$$

Como queríamos obtener. Las coordenadas normales están desacopladas entre sí, cada una vibra con una frecuencia ω_j .

Algo importante a notar es que el signo enfrente de ω_j^2 en esta ecuación determina la estabilidad del sistema. De manera que estabilidad significa que todos los autovalores de \mathbf{V} , que es una matriz real y simétrica, son positivos. Esto tiene sentido físicamente ya que quiere decir que la energía potencial del sistema se incrementa independientemente de en qué dirección sea el desplazamiento. Sin embargo, si uno de los autovalores es negativo, tenemos al menos un grado de libertad inestable de manera que el sistema es inestable.

La expansión en coordenadas normales es muy útil en muchos casos. Los modos normales son el conjunto natural de coordenadas generalizadas para cualquier sistema de pequeñas oscilaciones.

La definición (3.34) se puede invertir fácilmente

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}^T\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}, \quad (3.37)$$

lo que nos da la forma sistemática de obtener los modos normales en términos de las coordenadas η_j . Vemos que cada modo normal es una superposición lineal de las n coordenadas η_j , con coeficientes dados por los elementos de matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{T}$ que es independiente de las condiciones iniciales, sólo depende del sistema en sí. Lo notable es que esta superposición representa una oscilación particular del sistema en la que *todos* los componentes de éste vibran con la misma frecuencia; propiedad que tienen todos los sistemas que ejecutan pequeñas oscilaciones como las estudiadas, por complejas que sean. Cada ω_j representa entonces una frecuencia a la que vibra el sistema en conjunto (cada componente con su propia fase y amplitud) y las ω_j son entonces llamadas **frecuencias propias** del sistema. La propiedad notable de oscilar en conjunto con igual frecuencia permite identificar los modos normales en sistemas sencillos si se puede determinar cómo darle condiciones iniciales apropiadas para que esto ocurra. La forma más general de oscilación es una combinación lineal de los modos normales, que es justamente lo que (3.14) representa.

3.2. Oscilaciones forzadas y oscilaciones amortiguadas. Resonancias.

Las oscilaciones libres estudiadas hasta ahora se producen cuando el sistema es desplazado inicialmente de su posición de equilibrio y después se le permite oscilar por sí mismo, sin intervención externa. Sin embargo, a menudo el sistema es llevado fuera del equilibrio por una fuerza externa que sigue actuando después del momento inicial $t = 0$. La frecuencia de estas oscilaciones forzadas no viene descrita por la frecuencias propias, sino por la frecuencia de las fuerzas externas aplicadas. Sin embargo los modos normales son importantes para determinar las amplitudes de las oscilaciones forzadas y el problema se simplifica en gran manera usando las coordenadas normales obtenidas de los modos libres.

Podemos incluir estas fuerzas externas en las ecuaciones de Lagrange usando las fuerzas generalizadas correspondientes de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{ext}(q_1, \dots, q_n, t). \quad (3.38)$$

Vamos a suponer que las fuerzas externas no dependen de las velocidades generalizadas.

Para que las oscilaciones sean pequeñas las fuerzas aplicadas deben serlo también, de forma que puedo desarrollar también esas fuerzas en potencias de Taylor alrededor de la posición de equilibrio.

Veamos lo que obtengo si me quedo a primer orden en esa expansión, es decir, si hago

$$\sum_{l=1}^n (T_{sl} \ddot{\eta}_l + V_{sl} \eta_l) = Q_{0s}(t) \quad (3.39)$$

donde $Q_{0s}(t) \equiv Q_s^{ext}(q_{01}, \dots, q_{0n}, t)$.

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial, introduciendo el vector columna de fuerzas

$$\mathbf{Q}^{ext} \equiv \begin{pmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \\ \dots \\ Q_{03} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

tenemos

$$\mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{ext}. \quad (3.41)$$

Del que podemos obtener las ecuaciones de los modos normales como se hizo arriba, reemplazando $\boldsymbol{\eta}$ por $\mathbf{A} \boldsymbol{\zeta}$ y multiplicando por \mathbf{A}^T para obtener

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{ext} = \mathbf{Q}'. \quad (3.42)$$

Es decir, que aunque haya fuerzas externas los modos normales se desacoplan

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = Q'_k. \quad (3.43)$$

Estas ecuaciones son un conjunto de n ecuaciones diferenciales inhomogéneas que se pueden resolver sólo si conocemos la dependencia en el tiempo de la fuerza externa.

3.2.1. Oscilaciones amortiguadas

Las oscilaciones libres, una vez iniciadas, no cesan nunca. Por supuesto esto es una simplificación, porque en realidad tenemos fuerzas disipativas o de rozamiento que acabarían por extinguir

el movimiento. A este tipo de casos se les denomina **oscilaciones amortiguadas** y se pueden estudiar introduciendo en nuestro análisis las correspondiente fuerzas de amortiguamiento.

La hipótesis más frecuente (y si queréis la más simple) es suponer que la fuerza de amortiguamiento es una función lineal y opuesta a la velocidad. Éstas son el tipo de fuerzas esperables, por ejemplo, cuando el movimiento es en el seno de un fluido o gas y las velocidades son pequeñas. Supongamos que tenemos un sistema con N partículas y n grados de libertad, y que cada partícula tiene una velocidad $\dot{\vec{r}}_a$. La fuerza de amortiguamiento sobre esa partícula sería

$$\vec{F}_a = -\nu_a \dot{\vec{r}}_a \quad \forall a = 1, \dots, N \quad (3.44)$$

donde ν_a es un coeficiente positivo que depende de las características de la partícula y del medio en el que se mueve.

Como ya hemos visto en otros temas, si las ligaduras no dependen del tiempo, puedo escribir la velocidad de cada partícula en términos de un conjunto de n coordenadas generalizadas como

$$\dot{\vec{r}}_a = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad (3.45)$$

y la fuerza generalizada asociada a esta fuerza amortiguadora es

$$Q_k^{dis} = - \sum_{a=1}^N \nu_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} = - \sum_{l=1}^n \sum_{a=1}^N \nu_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \dot{q}_l. \quad (3.46)$$

Definimos los coeficientes simétricos en los índices k y l como

$$\alpha_{kl} \equiv \sum_{a=1}^N \nu_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \right)_0, \quad (3.47)$$

donde las derivadas están evaluadas en las posiciones de equilibrio porque de nuevo me quiero quedar a primer orden en el desarrollo alrededor de esas posiciones de equilibrio. Podemos escribir entonces las fuerzas generalizadas como

$$Q_k^{dis} = - \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \dot{q}_l = - \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \dot{\eta}_l. \quad (3.48)$$

Donde hemos usado las coordenadas η_l que definimos anteriormente como $\eta_l \equiv q_l - q_{0l}$. Si defino la matriz simétrica α cuyos elementos son los coeficientes α_{kl} , puedo escribir las ecuaciones de movimiento en presencia de una fuerza amortiguadora en forma matricial como

$$\mathbf{T}\ddot{\eta} + \mathbf{V}\dot{\eta} = -\alpha\dot{\eta} \quad (3.49)$$

La solución general de este sistema de ecuaciones acopladas se obtiene proponiendo soluciones análogas a lo que hicimos en el caso sin amortiguamiento

$$\eta_k = C a_k e^{rt}, \quad (3.50)$$

donde r es en general un número complejo. Reemplazando estas expresiones en la ecuaciones del movimiento (3.49) y agrupando las a_k en un vector columna

$$(r^2 \mathbf{T} + r \alpha + \mathbf{V}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (3.51)$$

que es equivalente a (3.11) en el caso sin amortiguar y, de nuevo, tendrá solución no trivial si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo

$$\det(r^2 \mathbf{T} + r \alpha + \mathbf{V}) = 0. \quad (3.52)$$

Y de ahí puedo determinar los posibles valores de r . Esta ecuación es un polinomio de grado $2n$ en r , con coeficientes reales, de manera que sus raíces son reales o pares de complejos conjugados. En todo caso las partes reales son siempre negativas ya que de otro modo la coordenada η_k en (3.50) seguiría creciendo indefinidamente, lo que no es posible en el sistema considerado.

Calculemos cómo varía la energía de un sistema con una fuerza disipativa de este tipo. Sabemos que la energía viene dada por

$$E = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L. \quad (3.53)$$

Y si calculamos la derivada total con respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] = - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \end{aligned} \quad (3.54)$$

La última expresión es definida negativa ya que la doble suma es definida positiva, lo que es evidente si se usa la definición de α_{kl}

$$\sum_{a=1}^N \nu_a \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \right)_0 \dot{q}_k \dot{q}_l = \sum_{a=1}^N \nu_a \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \Big|_0 \dot{q}_k \right|^2. \quad (3.55)$$

Si definimos la función definida positiva

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (3.56)$$

entonces, la variación de la fuerza viene dada por

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F} < 0. \quad (3.57)$$

Y la fuerza generalizada puede escribirse como

$$Q_k^{dis} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (3.58)$$

A la función \mathcal{F} se la conoce como *función de disipación de Rayleigh*.

3.2.2. Oscilaciones forzadas y amortiguadas

Cuando combinamos fuerzas externas y amortiguamiento, las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{ext} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (3.59)$$

y si imponemos que las oscilaciones son pequeñas y escribimos las ecuaciones de manera matricial

$$\mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\alpha} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{ext}. \quad (3.60)$$

- Vamos a considerar el caso particular en el cual las *matrices* \mathbf{T} y $\boldsymbol{\alpha}$ *son proporcionales*. Esto no es tan extraño si tenemos en cuenta que la matriz \mathbf{T} ,

$$T_{kl} = \sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \right)_0, \quad (3.61)$$

tiene una forma análoga a α_{kl} con m_i en vez de ν_i . Así, si $\nu_i = \kappa m_i$, con κ una constante positiva independiente de i , tenemos que $\boldsymbol{\alpha} = \kappa \mathbf{T}$, y podemos escribir las ecuaciones del movimiento como

$$\mathbf{T}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \kappa \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{ext}. \quad (3.62)$$

con lo procediendo de la misma manera que hicimos con las oscilaciones forzadas, podemos obtener los modos normales desacoplados

Ejercicio: Demostrar

$$\ddot{\zeta}_k + \kappa \dot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = Q'_k, \quad (3.63)$$

donde las ω_k son las frecuencias propias del sistema no amortiguado.