

Capítulo 2

Potenciales centrales

En este capítulo estudiaremos una primera aplicación del formalismo lagrangiano: una partícula moviéndose en un potencial que sólo depende de la distancia r del origen. Hay muchos ejemplos de este tipo de sistema en la naturaleza, como un planeta en un campo gravitatorio, un sistema de estrellas dobles, la electrostática o problemas de dispersión.

2.1. Repaso de coordenadas esféricas

Pasaremos ahora rápidamente al caso de coordenadas esféricas. El cambio de coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ a esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ y viceversa está dado por

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, & \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\z &= r \cos \theta, & \phi &= \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

La base ortonormal $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ está relacionada con la base cartesiana $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ como

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z,\tag{2.2}$$

$$r\vec{e}_\theta = r(\cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z),\tag{2.3}$$

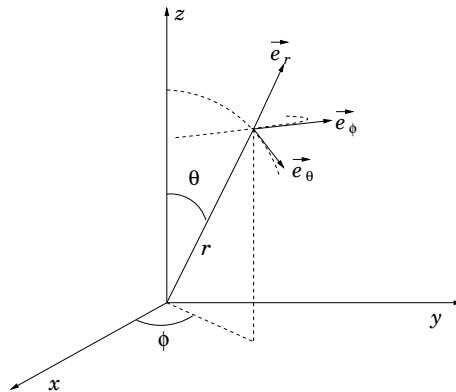


Figura 2.1: El cambio de coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ a coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$.

$$r \sin \theta \vec{e}_\phi = r \sin \theta \left(-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \right), \quad (2.4)$$

y la métrica en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.5)$$

En coordenadas esféricas la posición de una partícula está dado por el vector de posición $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$ y la velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (2.6)$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi, \quad (2.7)$$

El momento angular \vec{L} en estas coordenadas está dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \vec{e}_\theta + mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_\phi. \quad (2.8)$$

También es importante darse cuenta que la componente z en coordenadas cartesianas es igual que la componente θ en coordenadas esféricas:

$$L_z = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L_\theta, \quad (2.9)$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el cambio de coordenadas (2.1).

Finalmente, para completitud damos las expresiones para el gradiente, la divergencia, el rotacional y la divergencia en coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \psi = \partial_r \psi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \psi \vec{e}_\phi, \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_\phi, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\partial_\theta (\sin \theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_r - \frac{1}{r} \partial_r (r A_\phi) \right) \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r \right) \vec{e}_\phi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \psi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \psi. \quad (2.13)$$

2.2. Reducción del problema de dos cuerpos

Una primera observación importante es que bajo ciertas circunstancias, un sistema de dos partículas con interacciones se puede reducir a un problema de una sola partícula en un potencial. Al ser así, muchos problemas de dos cuerpos se reducen a un problema de una partícula.

Considera dos partículas con masas m_1 y m_2 y posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 que no están sometidas a fuerzas externas, ni a ligaduras y que interactúan mutuamente a través un potencial de interacción que sólo depende de la posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, y posiblemente de la velocidad relativa $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Ejemplos de sistemas de este tipo son dos masas conectadas a través de un muelle o dos masas moviéndose en su propio campo gravitatorio. El lagrangiano de este sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{r}}_{cm})^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2 - V(\vec{r}, \vec{v}), \quad (2.14)$$

donde en el término de la energía cinética reconocemos la energía cinética del centro de masas y la energía cinética de cada uno de los componentes, relativo al centro de masas.

Los vectores de posición relativo al centro de masas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 están relacionados con el vector de posición relativo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a través de (vease figura 2.2):

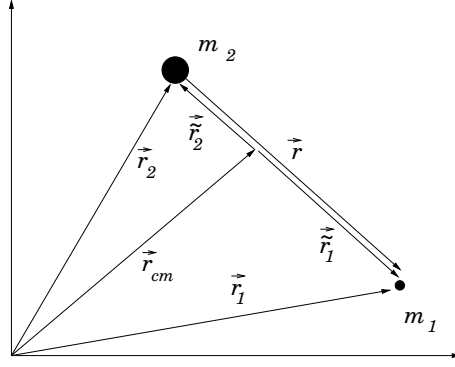


Figura 2.2: Un sistema de dos masas m_1 y m_2 : el vector de posición de centro de masas \vec{r}_{cm} , los vectores de posición relativo al centro de masas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 y el vector de posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad (2.15)$$

tal que en términos del vector de posición relativo \vec{r} y el vector de posición de centro de masas \vec{r}_{cm} , podemos escribir el lagrangiano (2.14) como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{r}}_{cm})^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r}, \vec{v}). \quad (2.16)$$

Una primera observación es que \vec{r}_{cm} no sólo es una coordenada cíclica, sino que también se desacopla completamente del resto del sistema. Su ecuación del movimiento $\ddot{\vec{r}}_{cm} = 0$ dice que el centro de masas se mueve con una velocidad constante, independientemente de como se comportan las masas m_1 y m_2 (Esto era de esperar, dado que no hay fuerzas externas ni ligaduras que actúan sobre el sistema). Podemos, por tanto, meternos en el sistema de referencia que se mueve con la misma velocidad que el centro de masas y el lagrangiano se reducirá a

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r}, \vec{v}). \quad (2.17)$$

La segunda observación es que la expresión (2.17) es en realidad el lagrangiano de una sola partícula con masa

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.18)$$

moviéndose en el potencial $V(\vec{r}, \vec{v})$. Lo que hemos hecho, en otras palabras es meternos en el sistema de la masa m_2 , que ve la otra masa moverse alrededor de ella, pero comportándose como tuviera una masa efectiva M . La masa efectiva M se llama usualmente la *masa reducida*.

Fijaos que si $m_1 \ll m_2$ tenemos que $M \approx m_1$ y $\vec{r}_1 = -\vec{r}$, mientras $\vec{r}_2 = 0$. En este caso tenemos que el centro de masas (casi) coincide con la posición de m_2 , que a penas está influenciado por m_1 . Este es el caso de una estrella masiva con un planeta orbitándola.

Hemos pues conseguido reducir el problema de dos cuerpos al problema más sencillo de una sola partícula. Este resultado ya era conocido por Newton. Sin embargo el tratamiento general de N masas moviéndose en el potencial generado por estas mismas es mucho más complicado. De hecho, el matemático francés Jules Henri Poincaré (1854-1912) demostró en 1889 que el problema de 3 partículas no tiene solución expresable con funciones uniformes para condiciones iniciales generales. Algunas soluciones específicas sí son conocidas, correspondiendo al caso de que una o dos de las masas sean muy pequeñas en comparación con la otra o al caso de que las condiciones iniciales sean muy especiales. Un ejemplo del primer caso es de un planeta cerca de un sistema de una estrella doble, lo que se resuelve relativamente fácilmente con teoría de perturbaciones. Ejemplos del segundo caso fueron ya dados por Lagrange, que demostró que tres masas pueden recorrer órbitas

elípticas (y por lo tanto periódicas) alrededor del centro de masas si uno elige adecuadamente las condiciones iniciales. También demostró que tres cuerpos posicionados en las vértices de un triángulo equilátero o en posiciones colineales tienen un movimiento metaestable que mantiene estas posiciones. Son los llamados *puntos de Lagrange* y ejemplos de estos casos se encuentran en el sistema solar y la navegación espacial: el grupo de asteroides los Troianos se encuentran en los puntos de Lagrange del sistema Jupiter-Sol y se utiliza los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Sol y Tierra-Luna para colocar satélites en órbitas estables y económicas. Finalmente es interesante observar que las soluciones periódicas de sistemas de N partículas son inestables y que el sistema corresponde a un sistema caótico: pequeñas variaciones en las condiciones iniciales llevan a desviaciones arbitrariamente grandes en escalas de tiempo finitas. Esto en particular también se aplica a nuestro sistema solar.

2.3. El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento

Consideramos ahora el lagrangiano de una partícula en un potencial $V(r)$ en coordenadas esféricas:

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (2.19)$$

Ya hemos visto en la sección anterior que el lagrangiano también corresponde a un sistema de dos partículas con interacciones mutuas, donde m juega el papel de masas reducida. Por el resto de este capítulo consideraremos el caso de una sola partícula, pero es útil saber que en cualquier momento se puede volver a traducir los resultados al caso de dos masas.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema son

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta} + mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{1}{2}mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (2.22)$$

Debido a la simetría esférica del sistema, la única componente de la fuerza es en la dirección radial. (Fijaos que no decimos si apunta hacia fuera o hacia dentro. Esto depende de la forma específica de $V(r)$.)

La consecuencia de esta simetría esférica es que el momento angular \vec{L} se conserva, componente por componente. Esto impone restricciones sobre la posición y el momento de la partícula: el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ sólo se conserva si tanto \vec{r} como \vec{p} están restringidos al plano perpendicular a \vec{L} . El movimiento en un potencial central por lo tanto siempre es un movimiento plano.

Con esta observación se puede simplificar bastante las ecuaciones de movimiento (2.20)-(2.22). Sin pérdida de generalidad podemos elegir el origen del sistema de coordenadas en el plano perpendicular a \vec{L} y la dirección $\theta = 0$ tal que coincide con la orientación de \vec{L} (o equivalentemente, en coordenadas cartesianas, elegimos la dirección z perpendicular al plano de movimiento). En este sistema de coordenadas, todo el movimiento toma lugar en el plano $\theta = \pi/2$ y los únicos grados de libertad son por lo tanto las coordenadas polares planas r y ϕ . Las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0, \quad (2.24)$$

lo que corresponde a las ecuaciones de movimiento del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (2.25)$$

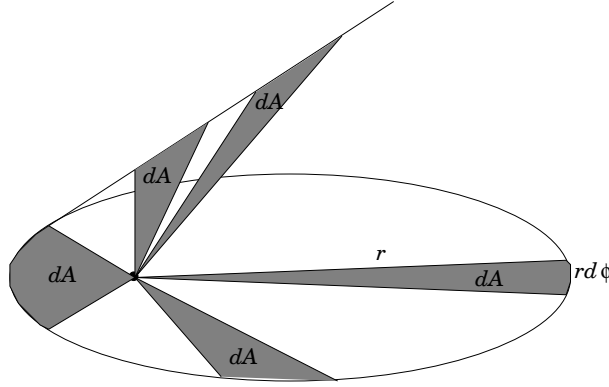


Figura 2.3: La segunda Ley de Kepler: en intervalos iguales de tiempo dt el vector de posición recorre superficies iguales $dA = r^2 d\phi$. Es independiente de la forma del potencial central y (por lo tanto) sigue válida para una partícula libre, que se mueve en línea recta.

Discutamos ahora una por una las ecuaciones de movimiento. La más sencilla es la de ϕ , ya que ϕ es una coordenada cíclica. La ecuación (2.24) dice que la cantidad $\ell = mr^2\dot{\phi}$ se conserva. Por (2.8) sabemos que ℓ corresponde a la componente θ (y por lo tanto también z) del momento angular y por nuestra elección de la orientación de la base también es la norma del momento angular total $|\vec{L}| = \ell$.

Del hecho que ℓ es constante podemos deducir una ley de la mecánica celeste. La cantidad

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{\ell}{2m} \quad (2.26)$$

es obviamente constante. Aquí $dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi$ es la superficie recorrida por el vector de posición \vec{r} en el intervalo dt , tal que (2.26) dice que la velocidad sectorial dA/dt es constante. Es la *segunda ley de Kepler* o la *ley de las áreas*: en intervalos de tiempo iguales el vector de posición recorre áreas iguales. Esto implica que la masa se moverá más rápido cerca del centro del potencial y más lento lejos (véase Figura 2.3). Johannes Kepler (1571-1630) formuló esta ley (junto con dos más) para el movimiento de los planetas en un potencial gravitatorio $V(r) \sim 1/r$, basado en las observaciones que había hecho el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), sin la ayuda de un telescopio. Sin embargo a base de la derivación que acabamos de hacer, está claro que la segunda ley es independiente de la forma del potencial y es solamente una manifestación de la conservación de momento angular. Efectivamente, incluso es válido en ausencia de potenciales, con la masa moviéndose en línea recta (Véase Figura 2.3).

Pasamos ahora a la ecuación de r . Substituyendo $\dot{\phi}$ por su expresión equivalente en función del momento angular ℓ , obtenemos para (2.23)

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.27)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y el problema se ha reducido al de una partícula unidimensional en un potencial efectivo

$$U(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}, \quad (2.28)$$

donde el término debido al momento angular se llama *energía centrífuga* y representa la influencia de ϕ en el movimiento en la dirección r . Veremos que este término hará que la masa no se pueda acercar arbitrariamente cerca al centro de fuerzas.

Aparte del momento angular, hay otra cantidad conservada: la energía, dado que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo y las fuerzas son conservativas. La energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r). \end{aligned} \quad (2.29)$$

También aquí vemos que la energía se reduce a la energía de una partícula unidimensional en un potencial $U(r)$.

En lugar de intentar resolver la ecuación (2.27), es más fácil (y equivalente¹) utilizar las expresiones de las cantidades conservadas E y ℓ , ya que estas consisten de dos ecuaciones diferenciales de primera orden:

$$mr^2\dot{\phi} = \ell, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E. \quad (2.31)$$

Estas dos ecuaciones se pueden integrar y resolver el problema (en principio). De la ecuación para r sacamos que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}, \quad (2.32)$$

así que integrando obtenemos la siguiente expresión para t en función de la distancia del centro:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{\ell^2}{2mr'^2}\right)}}. \quad (2.33)$$

En realidad estamos interesados en la expresión de r en función de t , pero en principio la función obtenido al calcular la integral (2.33) es invertible. Del mismo modo podemos deducir de (2.30) la expresión para ϕ :

$$\phi = \int_{t_0}^t \frac{\ell}{mr^2(t')} dt', \quad (2.34)$$

donde la expresión para $r(t)$ se obtiene de (2.33).

En la práctica, estamos más interesados en una expresión para r en función de ϕ que en la expresión de r y ϕ en función de t , puesto que la función $r(\phi)$ nos da la ecuación de la trayectoria. Esta expresión se puede derivar fácilmente de (2.30) y (2.32). Tenemos que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}} \quad (2.35)$$

tal que integrando, obtenemos

$$\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2mE - 2mV(r') - \frac{\ell^2}{r'^2}}}. \quad (2.36)$$

Igual que (2.33), esta expresión es en principio invertible, tal que se puede derivar la expresión inversa para $r(\theta)$. Con la expresión (2.36) (o equivalentemente (2.33) y (2.34)) hemos resuelto el

¹Se puede derivar la expresión para la energía total (2.29) de la ecuación de movimiento de r . Multiplicando (2.27) con \dot{r} se puede reescribir la ecuación como una derivada total con respecto al tiempo. Al integrar, la cantidad conservada que se encuentra es justamente (2.29).

problema de las trayectorias de una masa en un potencial arbitrario $V(r)$, por lo menos formalmente.

En la práctica sin embargo, resulta muy difícil integrar las expresiones (2.33), (2.34) y (2.36), puesto sólo para unos pocos potenciales $V(r)$ podemos expresar los integrales como funciones conocidas. Una primera observación es que la integral (2.36) se simplifica bastante al hacer el cambio de variables $u = r^{-1}$. Tenemos entonces que

$$\phi - \phi_0 = \int_{u_0}^u \frac{\ell du'}{\sqrt{2mE - 2mV(u') - \ell^2 u'^2}}. \quad (2.37)$$

Una clase de potenciales importantes son las potenciales de la forma

$$V = ar^p = au^{-p}, \quad (2.38)$$

desde el punto de vista físico porque aparecen con cierta frecuencia en la naturaleza y desde el punto de vista matemático porque hacen la expresión (2.37) tratable para ciertos valores de p .

El caso más sencillo es cuando $V(r) = 0$, es decir, una partícula libre. En este caso la integral (2.37) se reduce a

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}, \quad (2.39)$$

donde hemos hecho el cambio de variables $w = \ell u / \sqrt{2mE}$. Integrando obtenemos pues para la trayectoria

$$r \sin \phi = \frac{\ell}{\sqrt{2mE}}, \quad (2.40)$$

o sea, la partícula moviéndose con velocidad constante a lo largo de la recta que pasa a una distancia $\ell / \sqrt{2mE}$ del origen (lo que era de esperar, dado que se trata de una partícula libre).

Para el potencial del oscilador armónico $V = \frac{1}{2}ar^2$ podemos escribir (2.37) como

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{\ell dw}{\sqrt{2mEw - ma - \ell^2 w^2}}, \quad (2.41)$$

donde hemos aplicado el cambio $u^2 = w$. También aquí hemos podido reducir la integral en una forma manejable, donde la solución es

$$r^{-2} = \frac{mE}{\ell^2} \left(\sqrt{1 - \frac{a\ell^2}{mE^2} \cos(\phi - \phi_0) + 1} \right). \quad (2.42)$$

En general se puede resolver la integral (2.37) con funciones trigonométricas para $p = -1$ y $p = -2$ y con integrales elípticas para $p = -3$ y $p = -4$. El caso $p = -1$ corresponde al potencial de Newton, que estudiaremos en más detalle en sección 2.5. Un caso físicamente interesante es el potencial $V = a/r^2 - b/r$, que representa una atracción a distancias grandes, pero una repulsión fuerte a distancias cortas. Potenciales de este tipo se encuentran en física molecular.

Hay muchos tipos de potenciales que no son de la forma polinómica (2.38) y que sin embargo son relevantes en la física, como el potencial de Yukawa $V(r) = -e^{-ar}/r$, que aparece en física nuclear, o el potencial logarítmico $V(r) = \log(ar)$ de una fuente lineal. Para estos casos es mucho más difícil resolver el integral (2.37) y en estos casos habrá que recorrer a aproximaciones o cálculo numérico. Sin embargo veremos en la siguiente sección que a pesar de que no tenemos una expresión exacta para la trayectoria, sí se puede deducir muchas propiedades cualitativas de las órbitas.

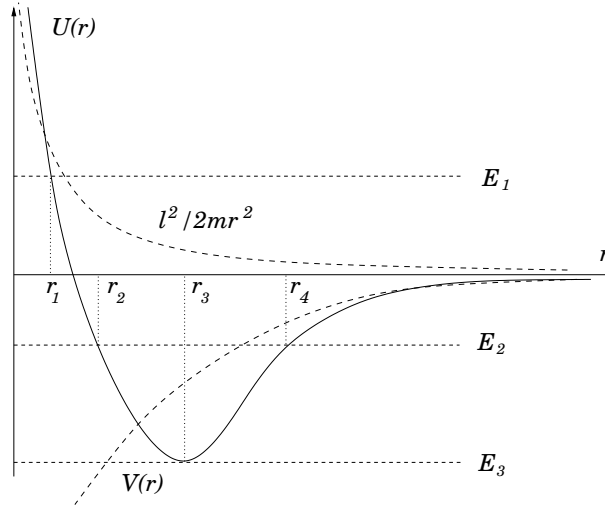


Figura 2.4: El potencial efectivo $U(r)$ es la suma del potencial $V(r)$ y el término centrífuga $\ell^2/2mr^2$. El movimiento de una partícula en un potencial $V(r)$ está restringido a las zonas donde $E \geq V(r) + \ell^2/2mr^2$. Dependiendo de las condiciones iniciales, la partícula puede acercarse o alejarse más o menos al centro del potencial.

2.4. Estudio cualitativo de las trayectorias

Hemos visto en la sección anterior que es posible reducir el problema de una partícula en un potencial central $V(r)$ a la ecuación (2.27) de una partícula unidimensional en un potencial

$$U(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (2.43)$$

Del estudio del movimiento en el potencial efectivo $U(r)$ es posible sacar mucha información sobre las trayectorias en el potencial original $V(r)$, incluso si no es posible resolver la ecuación (2.27) de manera exacta.

En el problema bi-dimensional, la energía y el momento angular vienen dados por las condiciones iniciales.² Sin embargo, para el problema uni-dimensional el momento angular ℓ no juega ningún papel, dado que es proporcional a $\dot{\phi}$. Por lo tanto, dado un valor para ℓ , queda completamente determinado el potencial uni-dimensional.

Para diferentes valores de E , la ley de conservación de energía restringe el movimiento en el potencial efectivo $U(r)$. De (2.29) tenemos para la velocidad radial

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r))}. \quad (2.44)$$

Vemos por lo tanto que la partícula con energía E sólo se puede mover por las zonas donde $E \geq V(r) + \ell^2/2mr^2$, si no la velocidad radial se volvería imaginaria.

Por ejemplo, consideremos partículas con distintas energías moviéndose en el potencial atractivo $V(r)$ que da lugar al potencial efectivo $U(r)$, como en la Figura 2.4. Por convenio hemos elegido que el potencial vale cero en el infinito. Una partícula con energía $E_1 > 0$ puede venir de lejos, acercarse al centro del potencial no más que r_1 , que es la distancia por la cual $E = U(r)$. Es

²Estará claro que la posición y la velocidad inicial implican un cierto valor para la energía y el momento angular. En muchas ocasiones es incluso más fácil dar las condiciones iniciales en función de E y ℓ que en función de posición y velocidad inicial.

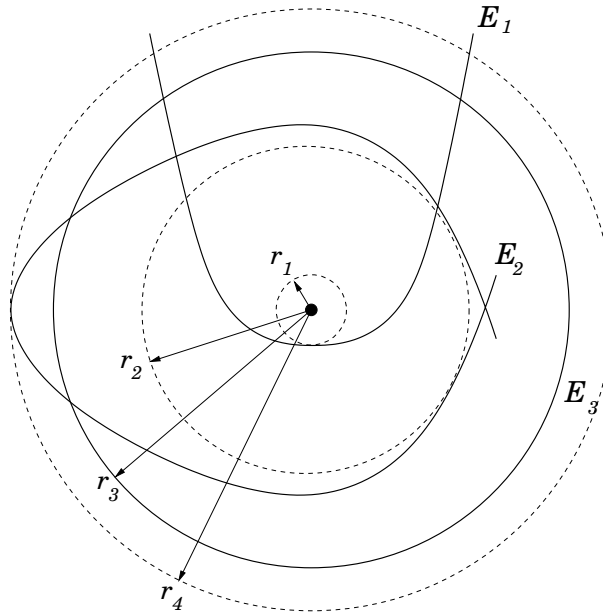


Figura 2.5: Las trayectorias de partículas con energía E_1 , E_2 y E_3 en el potencial de Figura 2.4.

el punto donde la partícula nota el efecto de la fuerza centrífuga, debido al momento angular. Observa que aunque en este punto $\dot{r} = 0$, la velocidad de la partícula no es cero, puesto que tiene todavía una velocidad angular $\dot{\phi}$ no nula. Por otro lado, para esta energía no hay cota superior para la distancia radial: la partícula puede alejarse del centro hasta el infinito (Véase Figura 2.5). Esto es el caso de un cometa que entre en el sistema solar desde el espacio interestelar, se aproxima al sol en una trayectoria parabólica, llega a una distancia mínima y sale del sistema solar para no volver nunca más.

La trayectoria de una partícula con energía $E_2 < 0$ es muy diferente, ya que ahora \dot{r} se hace zero en dos puntos distintos, r_2 y r_4 . La trayectoria por lo tanto tiene un punto de máxima aproximación y uno de máximo alejamiento, correspondiendo a r_2 y r_4 respectivamente. Este es el caso de un cometa capturado por el campo gravitatorio o la luna dando vueltas alrededor de la tierra. El hecho de que la órbita está acotada por arriba y por abajo no implica necesariamente que la órbita está cerrada.

El mínimo de energía que una partícula puede tener en el potencial $V(r)$ de Figura 2.4 es E_3 , correspondiendo al mínimo del potencial efectivo $U(r)$. La trayectoria es circular y el radio r_3 corresponde a la distancia donde la fuerza atractiva del potencial cancela justamente la fuerza centrífuga del momento angular. El ejemplo en el sistema solar que más se parece a este caso es el del planeta Venus, que sigue una trayectoria elíptica con tan baja excentricidad ($e = 0,007$) que parece casi circular.

Esta clasificación de órbitas (abiertas, acotadas y circulares) es válida para un grupo grande de potenciales atractivos, con las propiedades que tiene una singularidad menos fuerte que r^{-2} en $r = 0$ y que tiende a cero asintóticamente para r grande. En esta clase encontramos en potencial de Newton en tres dimensiones y el potencial de Yukawa. El potencial molecular $V = a/r^2 - b/r$ también cae en esta clase, para valores adecuados para a , b y ℓ .

Entre los potenciales que no satisfacen estas condiciones tenemos el potencial $V(r) = a/r^n$, con $n \geq 2$, que corresponde al potencial de Newton en dimensiones mayores que tres. En este caso el comportamiento del potencial efectivo cerca de cero está dominado por $V(r)$ y el efecto de la energía centrífuga $\ell^2/2mr^2$ es despreciable (vease Figura 2.6). Para una partícula con energía

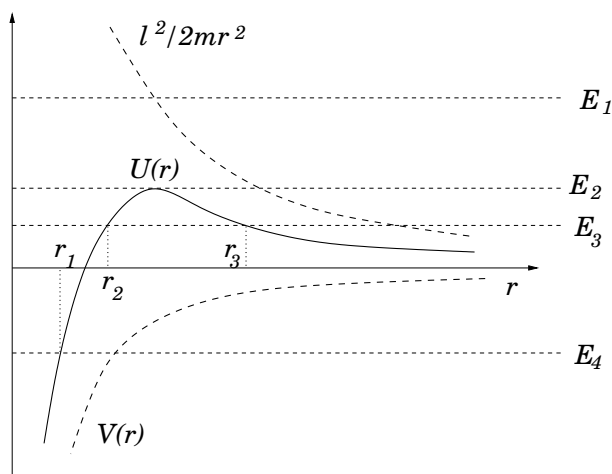


Figura 2.6: Los movimientos de partícula con distintas energías en un potencial $V(r) = ar^{-n}$, con $n \geq 2$.

E_1 no existe ninguna restricción: la partícula puede recorrer todas las distancias entre el centro y infinito. Para una partícula con energía E_3 , su movimiento depende de su posición inicial: si está cerca del centro del potencial, puede moverse entre el centro y r_2 , mientras si está lejos, puede salir hasta el infinito, pero no acercarse más que una distancia r_3 . Una partícula con energía E_4 sólo puede moverse en la región entre el centro y r_1 . Finalmente fijaos que una órbita circular aquí también es posible, si la partícula tiene una energía E_2 , pero al contrario con el potencial de Figura 2.4, este movimiento es inestable frente a pequeñas perturbaciones y decaerá al caso con energía E_1 o uno de los casos de energía E_3 .

Finalmente, potenciales que no tienden a un valor asintótico, sino tienden a infinito para r grande³ siempre tienen órbitas acotadas. Ejemplos de estos potenciales son el oscilador armónico y el potencial logarítmico.

2.5. El problema de Kepler

A Newton y sus contemporáneos les costó mucho adivinar como la fuerza de la gravedad varía con la distancia del sol. Históricamente, el primero en sugerir que la fuerza varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia fue Robert Hooke (1635-1703), pero más o menos al mismo tiempo fue propuesto también por gente como Newton y Christopher Wren (1632-1723). El mérito de Newton era derivar las leyes de Kepler de la fórmula de la fuerza gravitacional y darse cuenta que la gravedad es una fuerza universal entre dos masas cualesquiera.

En esta sección vamos a prestar especial atención al potencial de Newton (o el de Coulomb) $V(r) = k/r$ y a las trayectorias de partículas en este potencial. En particular queremos resolver el conocido *problema de Kepler*, es decir, derivar las tres leyes de Kepler de las ecuaciones de movimiento de una partícula en este potencial. Recordamos que las leyes de Kepler son:

1. Las planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, donde el sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.
2. El vector de posición del planeta recorre superficies iguales en intervalos iguales de tiempo.

³Potenciales que tienden a $-\infty$ para r grandes no son físicos, puesto que no están acotados por debajo. una partícula ganaría más y más energía, simplemente alejándose del centro del potencial.

3. El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo del tamaño del eje largo de la órbita, con la constante de proporcionalidad K , la *constante de Kepler*, igual para todos los planetas.

Ya hemos visto que la segunda ley es simplemente una consecuencia de la conservación de momento angular, válida en cualquier potencial central. Las otras dos leyes son específicas del potencial $V(r) = -kr^{-1}$.

Rellenando $V(u) = -ku$ en la ecuación de la órbita (2.37), podemos resolver la integral directamente

$$\phi = \int \frac{\ell du}{\sqrt{2mE + 2mku - \ell^2 u^2}} = \arccos \frac{-2mk + 2\ell^2 u}{2mk\sqrt{1 + 2\ell^2 E/mk^2}}, \quad (2.45)$$

lo que en términos de r se reduce a

$$r^{-1} = \frac{mk}{\ell^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{mk^2}} \cos \phi \right). \quad (2.46)$$

Reconocemos en (2.46) la ecuación de una sección cónica

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad (2.47)$$

si identificamos la excentricidad e y la constante p como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{mk^2}}, \quad p = \frac{\ell^2}{mk}. \quad (2.48)$$

De las propiedades de secciones cónicas sabemos para la ecuación (2.47) representa una hipérbola para $e > 1$ ($E > 0$), una parábola para $e = 1$ ($E = 0$), una elipse para $e < 1$ ($E < 0$) y un círculo para $e = 0$ ($E = -mk^2/2\ell^2$).

Para un potencial atractivo ($k > 0$), como en el caso del potencial gravitatorio, este análisis coincide con la clasificación de órbitas que hemos hecho en la sección anterior. Los planetas tienen trayectorias acotadas, con energía $E < 0$. Ahora vemos que sus órbitas corresponden a elipses, tal como dice la primera ley de Kepler.

Para un potencial repulsivo ($k < 0$), como el potencial de Coulomb entre dos partículas con el mismo signo de carga eléctrica, sabemos por el análisis de sección 2.4 que la energía siempre es positiva, tal que las únicas trayectorias posibles son hipérbolas.

Nos concentraremos ahora en el caso de una partícula en una órbita acotada en un potencial atractivo, para derivar la tercera ley de Kepler. De las propiedades de elipses sabemos que el semi-eje mayor a y el semi-eje menor b están relacionados con e y p como

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{k}{2E}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell}{\sqrt{-2mE}}. \quad (2.49)$$

Viceversa, la excentricidad e expresada en función de a es

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{mka}}. \quad (2.50)$$

La manera más fácil de derivar la tercera ley de Kepler es saliendo de la segunda ley. Integrando (2.26) sobre el intervalo de un periodo $[0, T]$ obtenemos que

$$T = \frac{2m}{\ell} \pi ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2}, \quad (2.51)$$

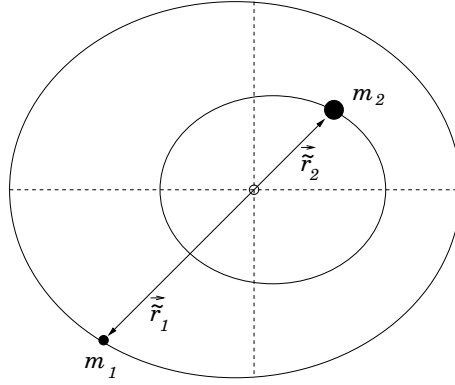


Figura 2.7: Un sistema de estrellas dobles con masas $m_2 = 2m_1$.

donde en la primera igualdad hemos utilizado que el área de una elipse es $A = \pi ab$ y en la segunda las expresiones (2.49) y (2.50) de b y e en función de a .

De (2.51) vemos que efectivamente el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del eje grande de la elipse, pero la constante de Kepler

$$K = \frac{4\pi^2 m}{k} \quad (2.52)$$

depende de m y no puede ser igual por todos los planetas. Por lo tanto la tercera ley de Kepler sólo se cumple de forma débil para los potenciales $V(r) \sim 1/r$, en el sentido que $T^2 \sim a^3$, pero la constante no es universal. Por ejemplo para el potencial de Coulomb, $k = cqQ$, donde Q y q son las cargas eléctricas de la partículas y $c = 8,98 \cdot 10^9 \text{ kg m}^3 / \text{C}^2 \text{ s}^2$ la constante eléctrica. Por lo tanto vemos que la constante de Kepler en electromagnetismo depende tanto de la masa como de la carga de las partículas.

Para el potencial gravitatorio tenemos que $k = Gm_1 m_2$, donde m_1 y m_2 son (en el caso del sistema solar) las masas del sol y del planeta. Sin embargo la masa m que aparece en (2.52) es la masa reducida (2.18). En el caso del sol y los planetas sabemos que la masa del planeta m_1 es mucho menor que la masa del sol m_2 , tal que la masa reducida m es primera aproximación es igual a m_1 (vease la discusión de sección 2.2). Por lo tanto, la expresión para la constante de Kepler se reduce a

$$K = \frac{4\pi^2 m}{Gm_1 m_2} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_2}. \quad (2.53)$$

Efectivamente, en esta aproximación la constante de Kepler sólo depende de la masa m_2 del sol, o en general, de la masa central que da origen al potencial.

En el caso de que las dos masas m_1 y m_2 sean comparables (por ejemplo en una estrella doble), esta aproximación ya no es válida y hay que volver a traducir muchos de los resultados al problema de dos partículas. Por ejemplo para $m_2 = 2m_1$ tenemos por (2.15) que $\vec{r}_1 = -2\vec{r}_2$ y si \vec{r} sigue una trayectoria elíptica, también lo harán \vec{r}_1 y \vec{r}_2 (vease Figura 2.7). Aunque la versión débil de la tercera ley de Kepler es válida (con $K = 4\pi^2/3Gm_1$) en la formulación equivalente de una partícula de masa reducida, no es válida para cada una de las masas m_1 y m_2 por separada. Es fácil de ver que, para que el centro de masas siga situado en el origen el periodo de m_1 tiene que ser el mismo que el de m_2 , a pesar de tener una órbita más pequeña.

También la segunda ley de Kepler es más difícil, puesto el momento angular total es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas. Y aunque el momento angular total se conserva (y por lo tanto en el sistema de la masa reducida vale la ley de las áreas), esto no es verdad para cada momento angular por separado.

El problema de Kepler es importante desde el punto de vista histórico, puesto que era la primera vez donde se pone una teoría física a prueba con experimentos (en este caso observaciones): por un lado las leyes de Kepler eran puramente empíricas, sacadas de datos observacionales y describían el movimiento de los planetas sin explicar el porqué. Por otro lado la teoría de Newton era la primera teoría fundamental, basado en deducciones a base de principios. La importancia del problema de Kepler está justamente en que Newton era capaz de demostrar que sus ideas podían explicar el movimiento de los planetas.