



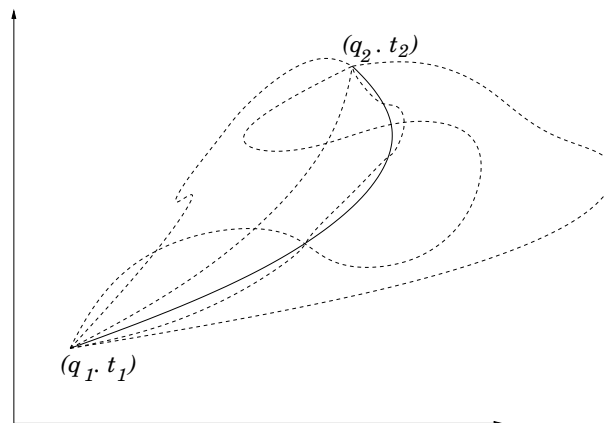
Mecánica Analítica

Universidad de Granada

5º curso de matemáticas

Dr. Bert Janssen

*Departamento de Física Teórica y del Cosmos,
Universidad de Granada, Campus de Fuente Nueva
18071 Granada, España
bjanssen@ugr.es*



junio 2006

En la medida en que las proposiciones matemáticas se refieren a la realidad no son ciertas, y en la medida en que son ciertas no se refieren a la realidad.

A. Einstein

Q: What is the difference between theoretical physics and mathematical physics?

A: Theoretical physics is done by physicists who lack the necessary skills to do real experiments; mathematical physics is done by mathematicians who lack the necessary skills to do real mathematics.

N.D. Mermin (theoretical physicist)

Índice general

1. Formalismo lagrangiano	6
1.1. Ligaduras y coordenadas generalizadas	6
1.2. El principio de trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange	8
1.3. El principio de mínima acción	11
1.4. Interpretación y propiedades del Lagrangiano	12
1.4.1. Invariancia bajo traslaciones en el tiempo y conservación de la energía mecánica	13
1.4.2. Coordenadas cíclicas y conservación del momento conjugado	14
1.4.3. Invariancia bajo rotaciones y conservación del momento angular	14
2. Potenciales centrales	17
2.1. Repaso de coordenadas esféricas	17
2.2. Reducción del problema de dos cuerpos	18
2.3. El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento	20
2.4. Estudio cualitativo de las trayectorias	24
2.5. El problema de Kepler	26
2.6. Problemas	30
3. Pequeñas oscilaciones	32
3.1. Osciladores acoplados. Modos normales de oscilación.	32
3.1.1. Descripción matricial	35
3.1.2. Modos normales	37
3.2. Oscilaciones forzadas y oscilaciones amortiguadas. Resonancias.	38
3.2.1. Oscilaciones amortiguadas	38
3.2.2. Oscilaciones forzadas y amortiguadas	40
4. Formalismo hamiltoniano y transformaciones canónicas	42
4.1. El Hamiltoniano como transformada de Legendre	42
4.2. Interpretación y cantidades conservadas	44
4.3. Transformaciones canónicas	45

4.4. Corchetes de Poisson 49

Capítulo 1

Formalismo lagrangiano

Hemos visto que la segunda ley de Newton (??), junto el principio de la relatividad, forma la base de la mecánica clásica. En la práctica, sin embargo, hay muchos casos donde no es fácil utilizar la segunda ley, puesto que algunas de las fuerzas no son conocidas. En este capítulo desarrollaremos un formalismo para resolver los problemas de la dinámica si las fuerzas desconocidas son del tipo que imponen ligaduras holónomas.

1.1. Ligaduras y coordenadas generalizadas

La segunda ley de Newton (??) relaciona las fuerzas que actúan sobre un sistema con los cambios de velocidad de ese sistema. Dado que un sistema de N partículas tiene en general la forma de un conjunto de $3N$ ecuaciones diferenciales parciales acopladas de segundo orden,

$$\vec{F}_a^{(tot)} = m_a \ddot{\vec{r}}_a \quad a = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

El sistema queda completamente determinado con $6N$ constantes de integración, habitualmente tomadas las N posiciones iniciales y N velocidades iniciales. Esto es lo que llevó a Laplace (1749-1827) a expresar su determinismo al decir que una vez conocidas las posiciones y velocidades de todas las partículas en un momento $t = t_0$, toda la historia y todo el futuro del universo están determinados y son calculables.¹

Sin embargo hay muchos casos donde en la práctica es imposible aplicar la segunda ley para resolver un problema de dinámica, simplemente porque hay más variables que ecuaciones.

- **Ejemplo:** Ilustremos esto con el ejemplo sencillo del péndulo matemático plano (véase Figura 1.1): una masa m cuelga de una cuerda inelástica y sin masa de longitud L en un campo gravitacional. La fuerza gravitatoria $\vec{F} = m\vec{g}$ no es la única fuerza actuando sobre la masa, puesto que la cuerda misma también ejerce una fuerza \vec{f} sobre m . (En realidad la fuerza \vec{f} de la cuerda es una fuerza efectiva que describe las interacciones de las partículas de la cuerda con la masa m , dado que el sistema de la masa y las partículas individuales de la cuerda son inmanejables). El problema ahora es que para determinar el movimiento de la masa m a través de la segunda ley, es necesario conocer también una expresión para \vec{f} , pero dado que \vec{f} es una fuerza efectiva que surge de las interacciones de la cuerda con la masa, no tenemos esa expresión.

¹Y cuando Napoleón le preguntó dónde en su visión del mundo estaba Dios, contestó Laplace: “No necesito esa hipótesis.”

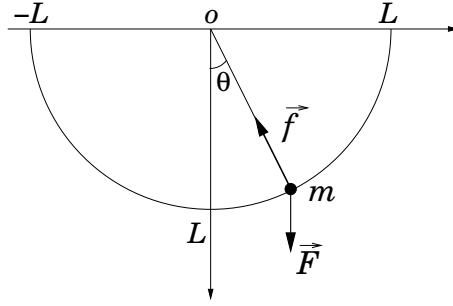


Figura 1.1: El péndulo matemático plano: una masa m cuelga de una cuerda con longitud L y está sometida a las fuerzas \vec{F} de la gravedad y \vec{f} de la tensión de la cuerda.

El efecto de la fuerza desconocida \vec{f} es mantener la masa a distancia L del origen o . El movimiento de la masa por lo tanto está restringido debido a la fuerza \vec{f} . Decimos que la masa está sometida a una *ligadura*, y a las fuerzas efectivas que restringen el movimiento de un sistema las llamamos *fuerzas de ligaduras*.

- **Ligadura:** Restricción en el movimiento de un sistema.

Hay varios tipos de ligaduras y varias maneras de clasificarlas. Una manera de distinguir las ligaduras es a base de su dependencia en el tiempo: las ligaduras que no dependen explícitamente de t se llaman *esclerónomas*, mientras las que sí dependen explícitamente se llaman *reónomas*. Ejemplos de un sistema con una ligadura esclerónoma son el péndulo plano mencionado arriba o un gas en el contenedor. Ejemplos de sistemas reónomos son una masa sobre una superficie que cambia con el tiempo o un gas en un contenedor deformable.

Otra manera de clasificar las ligaduras es según su expresión matemática. Las ligaduras que pueden escribirse como una ecuación en función de las coordenadas

$$S(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (1.2)$$

se llaman *ligaduras holónomas*. Matemáticamente, la ligadura (1.2) define una superficie o una curva en el espacio \mathbb{R}^{3N} a la que las partículas están restringidas. Ejemplos de ligaduras holónomas son el péndulo plano mencionado arriba, una partícula que se mueve por una superficie o un cuerpo rígido. Ejemplos de sistemas no-holónomos son un gas en un contenedor, proyectiles que se caen a la tierra o una rueda que rueda sin resbalar. Las ligaduras en los dos primeros casos no-holónomos son de la forma $S(\vec{r}_a, t) \leq 0$, mientras el tercer ejemplo tiene una ligadura que conecta las coordenadas con las velocidades de una forma que no es integrable a una condición (1.2).

Los sistemas con ligaduras holónomas son mucho más fáciles de tratar porque estas ligaduras imponen relaciones exactas entre las coordenadas que permiten escribir algunas en función de las otras. Esta propiedad hace que exista un sistema de coordenadas preferidas, las llamadas *coordenadas generalizadas*, y que en estas coordenadas las fuerzas efectivas se eliminen de la descripción, tal que el problema sea resoluble. En este curso nos restringiremos a sistemas con ligaduras holónomas.

El número de coordenadas generalizadas es igual al número de *grados de libertad*. Una partícula libre, sin ligaduras, tiene 3 grados de libertad, uno por cada dirección espacial en que se puede mover. Un sistema de N partículas sin ligaduras tiene $3N$ grados de libertad, pero si el sistema está sometido a k ligaduras holónomas ($S_n(q_\alpha, t) = 0 \quad n = 1, \dots, k$), podemos utilizar estas ligaduras para eliminar k de los $3N$ grados de libertad. Un sistema de N partículas sometido a k ligaduras holónomas tiene, por tanto, $3N - k$ grados de libertad.

Existen por lo tanto $3N - k$ coordenadas generalizadas $q_\alpha(t)$ (con $\alpha = 1, \dots, 3N - k$) que están relacionadas con las coordenadas originales \vec{r}_a a través de

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-k}(t), t), \quad a = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

Y estas coordenadas son:

- Independientes entre sí.
- Suficientes para describir la configuración del sistema: Un conjunto $\{q_1(t), \dots, q_{3N-k}(t)\}$ me define el estado del sistema y el espacio de dimensión $3N - k$ formado por todos los posibles conjuntos de coordenadas generalizadas es el espacio de configuraciones del sistema. La evolución del sistema a través del tiempo estará representada por una curva en el espacio de configuraciones.

Una manera de pensar en esta relación consiste en verlo como un cambio de coordenadas \vec{r}_a a coordenadas q_α . Efectivamente el conjunto de las relaciones (1.3) y las ligaduras (1.2) es invertible.

- **EJEMPLO** En el caso del péndulo plano, tenemos dos ligaduras ($\sqrt{x^2 + y^2} = L$ y $z = 0$) y por lo tanto sólo un grado de libertad. La coordenada generalizada por lo tanto es el ángulo θ que describe la desviación de la posición de equilibrio. Para una partícula en una esfera tenemos una ligadura ($\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$) y como coordenadas generalizadas podemos tomar los ángulos θ y ϕ que parametrizan la esfera. La relación (1.3) entre las coordenadas originales y las generalizadas es simplemente el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta. \quad (1.4)$$

Claramente esta parametrización de x, y y z satisface la ligadura y las relaciones (1.4) junto con la ligadura son invertibles.

Con la herramienta de las coordenadas generalizadas podemos ahora reformular los problemas de la dinámica con ligaduras holónomas de tal forma que las fuerzas de ligaduras desaparecen de la descripción.

1.2. El principio de trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange

Una primera observación es que aunque no conocemos las fuerzas de ligadura cuantitativamente, sí podemos afirmar una propiedad importante: para las ligaduras holónomas, que restringen las partículas a una superficie (o una curva), las fuerzas de ligadura son perpendiculares a la superficie y por lo tanto proporcionales al gradiente de la función $S(\vec{r}_a, t)$

Podemos definir un *desplazamiento virtual* $\delta\vec{r}_a$ como un desplazamiento infinitesimal desde un punto \vec{r}_a al punto $\vec{r}_a + \delta\vec{r}_a$ consistente con las fuerzas y las ligaduras presentes en el momento $t = t_0$. Fijaos que el desplazamiento virtual está definido por un momento fijo en el tiempo y difiere por lo tanto de lo que sería un desplazamiento real en un intervalo dt . $\delta\vec{r}_a$ difiere de una derivada total por $d\vec{r}_a = \delta\vec{r}_a + \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial t}dt$. Sólo para ligaduras esclerónomas (independientes de t), los dos desplazamientos coinciden.

Supongo un sistema en equilibrio, es decir, la fuerza total sobre cada partícula del sistema es 0

$$\vec{F}_a = 0 \quad \forall a = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

Si multiplico por el trabajo virtual $\delta\vec{r}_a$, eso también será 0 e igualmente si sumo sobre todas la partículas:

$$\sum_{a=1}^N \vec{F}_a \cdot \delta\vec{r}_a = 0. \quad (1.6)$$

Hasta aquí nada nuevo. Vamos ahora a separar las fuerzas externas de las de ligadura, $\vec{F}_a = \vec{F}_a^{ext} + \vec{f}_a$, donde las \vec{f}_a son las fuerzas de ligadura

$$\sum_{a=1}^N \vec{F}_a^{ext} \cdot \delta\vec{r}_a + \sum_{a=1}^N \vec{f}_a \cdot \delta\vec{r}_a = 0. \quad (1.7)$$

El producto $\vec{F}_a \cdot \delta\vec{r}_a$ puede ser interpretado como el trabajo virtual, ya que no necesito integración porque el desplazamiento es infinitesimal. Lo que vamos a hacer ahora es restringirnos a sistemas en los cuales el trabajo virtual realizado por las fuerzas de ligadura es 0, $\delta W_f = \sum_{a=1}^N \vec{f}_a \cdot \delta\vec{r}_a = 0$. Esto se cumple por ejemplo para sistemas forzados a moverse en una superficie (ligaduras holónomas) ya que las fuerzas de ligadura son perpendiculares a la superficie mientras que los desplazamientos virtuales son tangentes a la superficie. Esto significa que para esos sistemas las fuerzas de ligadura no realizan trabajo para los desplazamientos virtuales \equiv **Principio de los trabajos virtuales**.

Esto lo vamos a generalizar a un sistema que no esté en equilibrio, sino que en el que cada una de las partículas se mueve según la segunda ley de Newton.

Consideremos ahora un sistema de N partículas, obedeciendo cada una a la segunda ley de Newton $\vec{F}_a^{(tot)} = \dot{\vec{p}}_a$.² Escribiendo la fuerza total actuando sobre la a -ésima partícula como la suma de las fuerzas actuales y las fuerzas de ligadura $\vec{F}_a^{(tot)} = \vec{F}_a + \vec{f}_a$, tenemos que

$$0 = \sum_{a=1}^N (\vec{F}_a + \vec{f}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{a=1}^N (\vec{F}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a, \quad (1.8)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el principio del trabajo virtual. A esto es lo que normalmente se le llama **principio de D'Alembert** (del cual el principio de trabajos virtuales es un caso específico).

Aunque de esta manera hemos podido eliminar las fuerzas de ligadura, no podemos igualar a cero los coeficientes $(\vec{F}_a - \dot{\vec{p}}_a)$, puesto que las $\delta\vec{r}_a$ no son independientes, sino que están relacionadas mutuamente por las ligaduras. Conviene por lo tanto reescribir (1.8) en función de las coordenadas generalizadas, que por construcción sí son independientes.

Derivando la relación (1.3) entre las coordenadas \vec{r}_a y las coordenadas q_α con respecto a t tenemos que

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial t}, \quad (1.9)$$

para $a = 1, \dots, N$ y donde hemos usado el convenio de sumación de Einstein para las coordenadas generalizadas (estoy sumando $\forall \alpha = 1, \dots, 3N - k$). Del mismo modo, los desplazamientos virtuales se escriben como

$$\delta\vec{r}_a = \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (1.10)$$

(Nótese que como los desplazamientos virtuales están tomados en $t = t_0$ no hay variación en t). La ecuación (1.8) se puede por lo tanto reescribir como

$$\sum_a \vec{F}_a \cdot \sum_{\alpha=1}^{3N-k} \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \sum_{\alpha=1}^{3N-k} \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (1.11)$$

²A partir de ahora adoptaremos la notación en que indicamos las derivadas (totales) con respecto a t con un punto: $\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega}$ y $\frac{d^2\Omega}{dt^2} = \ddot{\Omega}$.

El coeficiente del último término se puede escribir como

$$\begin{aligned}
m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left(m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \right) - m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(m_a \vec{v}_a \cdot \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_a \vec{v}_a \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_\alpha} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_a v_a^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_a v_a^2 \right),
\end{aligned} \tag{1.12}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que la derivada total y la derivada parcial con respecto a q_α son intercambiables y, por (1.9) que $\partial \vec{v}_a / \partial \dot{q}_\alpha = \partial \vec{r}_a / \partial q_\alpha$.

La cantidad $(\frac{1}{2} m_a v_a^2)$ en (1.12) es la energía cinética T_a de la a -ésima partícula, definido en (??). Si definimos la fuerza generalizada $Q_\alpha = \sum_a \vec{F}_a \cdot \partial \vec{r}_a / \partial q_\alpha$ veremos que (1.11) se convierte en

$$\sum_{\alpha=1}^{3N-k} \left\{ Q_\alpha - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0, \tag{1.13}$$

donde T es la energía cinética total de las N partículas. Nótese que en el caso de coordenadas cartesianas la energía cinética no depende de las coordenadas, sólo de las velocidades, y el último término por lo tanto es cero en estas coordenadas. Sin embargo, en general ese término es no nulo y tiene que ver con la conexión no trivial de las coordenadas curvilineas.

Hasta ahora no hemos hecho más que un cambio de coordenadas de \vec{r}_a a q_α , utilizando el principio de trabajo virtual para eliminar las fuerzas de ligadura. Pero si ahora suponemos que las ligaduras son holónomas, sabemos que las q_α son coordenadas generalizadas y por lo tanto mutuamente independientes. En ese caso (1.13) tiene que ser válido para cada δq_α por separado, y así para ligaduras holónomas tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0. \tag{1.14}$$

Si además suponemos que las fuerzas reales \vec{F}_a son conservativas (y por lo tanto derivables de un potencial), podemos escribir Q_α como

$$Q_\alpha = \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} = \sum_a - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \tag{1.15}$$

tal que (1.14) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0, \tag{1.16}$$

o, para potenciales que son funciones sólo de las coordenadas generalizadas, no de las velocidades,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, 3N - k. \tag{1.17}$$

Aquí hemos introducido la función $L = T - V$, llamada la **función de Lagrange** o simplemente el **lagrangiano** y las ecuaciones (1.17) se llaman las **ecuaciones de Lagrange** o de **Euler-Lagrange**. El Lagrangiano es una función escalar que puede depender de las coordenadas generalizadas q_α , sus derivadas \dot{q}_α y el tiempo t .

Con las ecuaciones de Lagrange hemos conseguido un formalismo para describir el comportamiento de un sistema sin que aparezcan las fuerzas de ligaduras. Es más, para la gran clase de problemas donde las fuerzas son conservativas, incluso el concepto de fuerzas desaparece del todo del formalismo. Sólo involucra a las funciones escalares T y V y es por tanto independiente de las coordenadas elegidas.

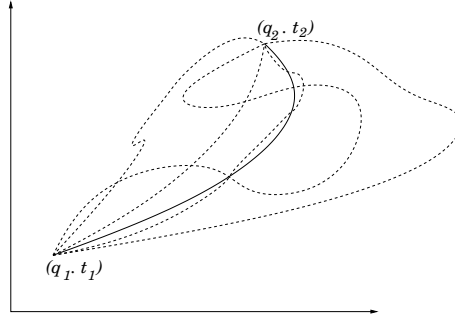


Figura 1.2: La trayectoria real (línea continua) y algunas trayectorias posibles (líneas discontinuas) de una partícula moviéndose de $q_\alpha(t_1)$ a $q_\alpha(t_2)$. La trayectoria real corresponde a la que tiene el valor mínimo para S .

Nótese que para un sistema dado, el lagrangiano no es único. Ya hemos visto que V está determinado salvo una constante global, pero la degeneración va más lejos. Cada funcional L' , relacionada con un lagrangiano L a través de la relación $L' = L + dG/dt$ donde $G(q_\alpha, t)$ es una función arbitraria, nos dará las mismas ecuaciones de movimiento. En otras palabras, dos lagrangianos que difieren por una derivada temporal total son físicamente equivalentes y los consideraremos por lo tanto el mismo lagrangiano. Demostraremos esta propiedad en la siguiente sección.

La gran ventaja del formalismo lagrangiano es que, no sólo desaparecen las desconocidas fuerzas de ligaduras, sino que también es fácilmente generalizable a otros campos de la física, donde el concepto de fuerzas no tiene el sentido que tiene en la mecánica newtoniana, como en la mecánica de fluidos, teoría de la relatividad o la teoría de campos.

1.3. El principio de mínima acción

Antes de seguir con la discusión de las propiedades del lagrangiano, es útil comentar que hay otro método más fácil de conseguir las ecuaciones de Lagrange que a través del principio de trabajo virtual. Este método es el *principio de mínima acción*, propuesto por Maupertuis (1698 - 1759) y desarrollado por Euler, utilizando el cálculo variacional.

Según el principio de mínima acción, el movimiento de un sistema yendo de la posición $q_\alpha(t_1)$ en $t = t_1$ a $q_\alpha(t_2)$ en $t = t_2$ es tal que la integral S definida como

$$S(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) dt, \quad (1.18)$$

llamada la *acción*, es mínima para la trayectoria $q_\alpha(t)$ seguida. Aquí $L = T - V$ es el lagrangiano del sistema, definido en la sección anterior.

Si la acción es mínima para la trayectoria real, cualquier trayectoria con las mismas condiciones iniciales y finales tiene que tener un valor superior para S y la trayectoria real corresponde a un valor estacionario de S . En otras palabras, la variación de la acción, debido a la variación de las trayectorias $q_\alpha(t) \rightarrow q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$, manteniendo $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$, es cero. Demostraremos ahora que esto implica que las coordenadas $q_\alpha(t)$ satisfacen las ecuaciones de Lagrange (1.17).

La variación de la acción (1.18) cuando realizamos desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas δq_α viene dada por

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right) \delta q_\alpha dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right]_{t_1}^{t_2},
\end{aligned} \tag{1.19}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $\delta \dot{q}_\alpha = d(\delta q_\alpha)/dt$ y hemos integrado por partes. Tomando los puntos $q_\alpha(t_1)$ y $q_\alpha(t_2)$ fijos, está claro que el segundo término de (1.19) es cero.

El hecho de que la variación δS tiene que ser cero para cualquier variación δq_α arbitraria, implica por un lema conocido del cálculo variacional que la función multiplicando δq_α es cero:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \tag{1.20}$$

lo que es precisamente la ecuación de Lagrange (1.17). Ahora también está claro lo que ya anunciamos en la sección anterior. Dos lagrangianos que difieren por una derivada total implican las mismas ecuaciones de movimiento, puesto que la variación de la derivada total es cero por las condiciones iniciales y finales.

Estrictamente hablando, las ecuaciones de Lagrange (1.20) no dan las condiciones necesarias para que la acción (1.18) sea mínima, sino extrema. En principio una solución de (1.20) podría corresponder con un máximo de S y habrá que averiguar la estabilidad de la solución. En la práctica estaremos contentos si logramos obtener una solución exacta para un sistema dado.

El principio de mínima acción da cierto rigor matemático a las ecuaciones de la mecánica newtoniana. Asocia un valor S a cada curva entre las posiciones iniciales y finales y selecciona la trayectoria real como la curva que tiene el valor mínimo de S .

Visto desde el punto de vista físico, la función $S = S(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)$ es una manera compacta de resumir las ecuaciones de movimiento de un sistema, que vienen dadas por las ecuaciones de Lagrange. Muchas veces, en teoría de campos o en relatividad uno va tan lejos que identifica la acción (o el lagrangiano) con la teoría que utiliza, dado que S contiene codificada toda la dinámica del sistema.

1.4. Interpretación y propiedades del Lagrangiano

Miremos ahora la estructura de las ecuaciones de Lagrange (1.17). Ya hemos visto en el ejemplo de la partícula sin ligaduras en coordenadas cartesianas que recuperamos la segunda ley de Newton:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{1.21}$$

donde p_i es la componente i del vector de momento \vec{p} . En general, para cualquier tipo de coordenadas generalizadas podemos definir el *momento generalizado* o *momento conjugado* p_α como³

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}. \tag{1.22}$$

En (1.15) ya hemos interpretado la variación de V respecto a q_α como la fuerza generalizada Q_α , así que la ecuación de Lagrange (1.17) se puede escribir de la forma

$$\dot{p}_\alpha - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}. \tag{1.23}$$

³Nótese que los p_α no necesariamente forman un vector, puesto que los q_α tampoco necesariamente lo son.

La generalización de (1.21) es obvia, sólo queda la interpretación del segundo término de la izquierda. Antes ya mencionamos su relación con la conexión de las coordenadas curvilíneas. Efectivamente, para el caso de ligaduras esclerónomas, la energía cinética T en coordenadas generalizadas es de la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^2 = \frac{1}{2} \sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (1.24)$$

con

$$a_{\alpha\beta} = \sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_\beta} \quad (1.25)$$

jugando el papel de una métrica en el espacio definido por los valores posibles de las coordenadas generalizadas. Efectivamente analizando en más detalle, se puede escribir (1.23) como

$$\ddot{q}_\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \quad (1.26)$$

donde los $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel (la conexión) de la métrica que describe la superficie de los posibles valores de los q_α . En ausencia de fuerzas (V constante), reconocemos la ecuación de las geodésicas del curso de geometría diferencial, así que (1.26) es la ecuación de la trayectoria de una partícula sometida a fuerzas externas en un espacio curvo, donde la curvatura está causada por las ligaduras esclerónomas.

De la forma del lagrangiano también podemos deducir que en ciertas condiciones hay cantidades que se conservan a lo largo del movimiento. Ya hemos hablado en el capítulo 1 sobre la conservación de momento, energía y momento angular, pero el formalismo lagrangiano nos permite deducirlo con más rigor. También veremos que estas cantidades conservadas tienen una relación directa con las simetrías del espacio y el tiempo.

1.4.1. Invariancia bajo traslaciones en el tiempo y conservación de la energía mecánica

Una primera simetría tiene que ver con la invariancia bajo traslaciones en el tiempo. La derivada total del lagrangiano con respecto a t es

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (1.27)$$

o en otras palabras, hay una cantidad

$$E = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad (1.28)$$

cuya derivada total está directamente relacionada con la dependencia de L en t :

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.29)$$

En general, la dependencia del lagrangiano de t suele venir de ligaduras reónomas o de variaciones del potencial V con el tiempo, pero en los casos más interesantes para la física fundamental, el lagrangiano no depende explícitamente de t , sino sólo a través de q_α y \dot{q}_α . Esto corresponde con la homogeneidad del tiempo (las leyes de la física no varían de momento en momento) y por lo tanto (1.29) implica que en estos casos la cantidad E es constante.

La interpretación de la función E no siempre está clara, pero bajo ciertas circunstancias (bastante comunes), resulta que E es la energía mecánica del sistema. En el caso de que la relación (1.3) entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas originales no dependen de t , la energía cinética es una función que viene dada por la expresión (1.24) y por lo tanto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T \quad (1.30)$$

(por el teorema de Euler para funciones homogéneas, o directamente calculándolo). Si además suponemos que el potencial V sólo depende de las coordenadas q_α , y no de las velocidades \dot{q}_α , tenemos que

$$E = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - (T - V) = T + V. \quad (1.31)$$

La función E , dada en (1.28) es (por lo menos en cuanto forma) idéntica al Hamiltoniano H que desarrollaremos en el capítulo 4, a través de una transformación de Legendre.

1.4.2. Coordenadas cíclicas y conservación del momento conjugado

Pasemos ahora a la homogeneidad del espacio. Si un lagrangiano no depende de una coordenada q_α , aunque puede depender de la velocidad \dot{q}_α , decimos que esta coordenada es **cíclica**. En este caso tenemos inmediatamente por (1.17) que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \quad (1.32)$$

o sea, que el momento conjugado p_α en la dirección q_α está conservado.

Ejemplo: Para una partícula libre sin ligaduras, el potencial es cero y el lagrangiano depende sólo de las velocidades. En este caso las coordenadas generalizadas son las coordenadas cartesianas y el momento conservado es el momento mecánico total \vec{p} , como ya sabíamos por la segunda ley de Newton.

Sin embargo el momento conjugado p_α no siempre tiene que coincidir con el momento mecánico $p_i = mv_i$.

Ejemplo: Un ejemplo típico es el caso de una partícula con carga e en un campo electromagnético, especificado por los potenciales electromagnéticos ϕ y \vec{A} . El lagrangiano en este caso está dado por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - e\phi(x) + e \dot{x}_i A_i(x). \quad (1.33)$$

Está claro que en este caso por la definición (1.22), el momento conjugado p_i viene dado por

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i(x). \quad (1.34)$$

Efectivamente, en el caso de que los potenciales electromagnéticos no dependan de alguna dirección x_k , no es el momento mecánico $m\dot{x}_i$ el que se conserva, sino la combinación (1.34)

La conservación de momento conjugado está por lo tanto relacionada con la simetría de traslaciones del lagrangiano. En general en presencia de un potencial, el momento no se conserva, puesto que el potencial rompe la invariancia bajo traslaciones.

1.4.3. Invariancia bajo rotaciones y conservación del momento angular

Finalmente miramos el caso de la invariancia bajo rotaciones, debido a la isotropía del espacio. Si no hay una dirección preferida en el espacio, no puede haber dependencia explícita en las coordenadas angulares. Si ahora actuamos con una rotación infinitesimal $\delta\phi$ alrededor de un eje, tenemos que el vector de posición \vec{r} está transformado en el vector $\vec{r} + \delta\vec{r}$, donde la norma de $|\delta\vec{r}|$ está dada por $|\delta\vec{r}| = r \sin\theta \delta\phi$, y θ es el ángulo entre el vector \vec{r} y el eje de rotación (véase la Figura 1.3). Dada la forma de la norma y el hecho de que $\delta\vec{r}$ sea ortogonal tanto a \vec{r} y al eje de rotación, podemos escribir

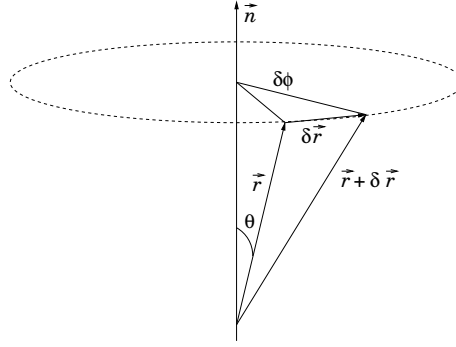


Figura 1.3: El cambio de un vector \vec{r} bajo una rotación infinitesimal $\delta\phi$.

$$\delta\vec{r} = \delta\phi (\vec{n} \times \vec{r}), \quad (1.35)$$

donde \vec{n} es un vector de unidad paralelo al eje de rotación. De (1.35) derivamos directamente que bajo la rotación infinitesimal $\delta\phi$, la velocidad se transforma como

$$\delta\vec{v} = \delta\phi (\vec{n} \times \vec{v}). \quad (1.36)$$

El cambio infinitesimal δL de lagrangiano, producida por la rotación $\delta\phi$ es por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta\dot{\vec{r}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot (\delta\phi \vec{n} \times \vec{r}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot (\delta\phi \vec{n} \times \vec{v}) \\ &= \dot{\vec{p}} \cdot (\delta\phi \vec{n} \times \vec{r}) + \vec{p} \cdot (\delta\phi \vec{n} \times \vec{v}) \\ &= \delta\phi \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p}) \\ &= \delta\phi \vec{n} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}), \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde en la cuarta igualdad hemos utilizado la propiedad cíclica del producto mezclado,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}). \quad (1.38)$$

Si el lagrangiano es invariante bajo rotaciones, la variación δL tiene que ser cero para cualquier rotación $\delta\phi$ arbitraria, tal que de (1.37) concluimos que la cantidad $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ se conserva. Reconocemos claramente el momento angular, definido en (??).

En esta sección hemos visto que la conservación de energía, momento y momento angular están relacionados con la invariancia del lagrangiano bajo, respectivamente, traslaciones en el tiempo, en el espacio y bajo rotaciones. En el fondo, hemos demostrado tres casos particulares del *teorema de Noether* que dice que por cada simetría continua global de un sistema existe una cantidad (carga) conservada y vice versa, cada cantidad conservada está relacionada con una simetría global continua del sistema. Otro ejemplo de una carga de Noether es la carga eléctrica, debido al hecho de que la teoría de Maxwell es invariante bajo transformaciones gauge actuando en los potenciales electromagnéticos.

