MECÁNICA

Segundo curso del Grado en Matemáticas

Introducción

Representación matemática del espacio físico

Representamos el espacio físico como un espacio vectorial de dimensión 3, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = \ x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i = x_i\vec{e}_i\,, \tag{1}$$

con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ una base del espacio vectorial formada por vectores linealmente independientes:

- $|\vec{e}_i| = 1$ para $i = 1, 2, 3$.
- Vectores ortogonales ($\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ para $i \neq j$: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ para $i \neq j$).

En la última igualdad en (1) hemos usado el *convenio de sumación de Einstein.*

Ejemplo: Coordenadas cartesianas (x,y,z), definidas por la base $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$

$$\vec{x} = \ x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2}$$

Operaciones básicas con vectores

- Suma: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3$
- Producto escalar: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \\ m(\vec{x} \cdot \vec{y}) &= (m\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (m\vec{y}) \quad \text{con m cualquier escalar} \end{aligned} \tag{3}$$

- Producto vectorial:

$$\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} x_i y_j \vec{e}_k \tag{4}$$

  donde $\vec{n}$ es un vector unitario y ortogonal a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ y ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita.

  El producto vectorial cumple las siguientes propiedades

  $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

  $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

  $m(\vec{x} \times \vec{y}) = (m\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (m\vec{y})$

- Productos triples:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$$
$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$$

Derivadas e integrales

Considero un vector $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ escrito en coordenadas cartesianas y que depende de cierta variable u:

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{i} + A_y(u)\vec{j} + A_z(u)\vec{k} \tag{5}$$

Defino los siguiente operadores:

1. *Derivada*:

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du}\,\vec{i} + \frac{dA_y(u)}{du}\,\vec{j} + \frac{dA_z(u)}{du}\,\vec{k} \tag{6}$$

$\frac{d}{du}(\vec{A}(u) \cdot \vec{B}(u)) = \frac{d\vec{A}(u)}{du} \cdot \vec{B}(u) + \frac{d\vec{B}(u)}{du} \cdot \vec{A}(u)$

$\frac{d}{du}(\vec{A}(u) \times \vec{B}(u)) = \frac{d\vec{A}(u)}{du} \times \vec{B}(u) + \vec{A}(u) \times \frac{d\vec{B}(u)}{du}$

$\frac{d}{du}(\psi(u)\vec{A}(u)) = \frac{d\psi(u)}{du}\vec{A}(u) + \psi(u)\frac{d\vec{A}(u)}{du}$

2. *Operador nabla:* Operador diferencial que se puede aplicar sobre funciones escalares $\psi(x, y, z, t)$ o vectoriales $\vec{A}(x, y, z, t)$. En coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \equiv \partial_x\vec{i} + \partial_y\vec{j} + \partial_z\vec{k} \tag{7}$$

- Gradiente (de una función escalar ψ): $\vec{\nabla}\psi$
  - El vector $\vec{\nabla}\psi$ es, en todo punto, ortogonal a las líneas o superficies de $\psi = cte.$.
  - La dirección de $\vec{\nabla}\psi$ es la de máxima variación de ψ.
- Divergencia (de una función vectorial $\vec{A}$): $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.
- Rotacional (de una función vectorial $\vec{A}$): $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- Laplaciano (de una función escalar ψ o vectorial $\vec{A}$): $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$.
  - $\Delta\psi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\psi = \nabla^2\psi$
  - $\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

3. *Integración de vectores*

$$\vec{I} = \int_{u_1}^{u_2} \vec{A}(u)du = \int_{u_1}^{u_2} A_x(u)du\,\vec{i} + \int_{u_1}^{u_2} A_y(u)du\,\vec{j} + \int_{u_1}^{u_2} A_z(u)du\,\vec{k} \tag{8}$$

Integrales de línea y circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva

- Decimos que $\ell \subset \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, es una curva regular si $\exists$ una aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, de clase C^1 en $[a, b]$, inyectiva y tal que $\exists\ \gamma'(t)$ continua $\forall t \in [a, b]$, tal que $\ell = \gamma([a, b])$. γ se denomina *parametrización* de la curva ℓ. Una misma curva ℓ puede tener distintas parametrizaciones.

Dada una curva ℓ y un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de ℓ a la integral

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt \tag{9}$$

donde $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, con $t \in [a, b] \to \gamma(t)$, es una parametrización de la curva ℓ (es decir $\gamma([a, b]) = \ell$).

El resultado de esta integral es, salvo signo, independiente de la parametrización. En concreto si α y β son parametrizaciones que recorren ℓ en sentidos contrarios

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{10}$$

Ejemplo: Trabajo $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, donde el elemento de línea $d\vec{s}$ es el vector de desplazamientos infinitesimales. Para el caso de coordenadas cartesianas

$$d\vec{s} \ = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \tag{11}$$

- *Regla de Barrow para campos vectoriales conservativos*

  Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{F}$ es tal que $\exists$ una función escalar $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ parametriza una curva, entonces

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_\gamma \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = V(\gamma(a)) - V(\gamma(b)). \tag{12}$$

  V se denomina *potencial* de $\vec{F}$ y $\vec{F}$ de llama *campo conservativo.*

- *Integrales a lo largo de curvas cerradas*

  Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva es cerrada y las integrales a lo largo de curva cerradas se denotan con el símbolo $\oint_\gamma$. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo, de la Eq. (12) se deduce que $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Cambios de coordenadas

1. **Coordenadas cartesianas** (x, y, z)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{13}$$

2. **Coordenadas cilíndricas** (ρ, ϕ, z)

   El cambio de coordenadas de cartesianas a cilíndricas y viceversa viene dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\cos\phi(t), & \rho(t) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \\ y(t) &= \rho(t)\sin\phi(t), & \phi(t) &= \operatorname{arc\,tg}\tfrac{y(t)}{x(t)}, \\ z(t) &= z(t), & z(t) &= z(t). \end{aligned} \tag{14}$$

   La base ortonormal $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ está relacionada con la base cartesiana $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de la

Figura 1: *El cambio de coordenas cartesianas* $\{x, y, z\}$ *a coordenadas esféricas* $\{r, \theta, \phi\}$.

siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\rho(t) &= \cos\phi(t)\ \vec{i} + \sin\phi(t)\ \vec{j}, & (15)\\
\vec{e}_\phi(t) &= \left(-\sin\phi(t)\ \vec{i} + \cos\phi(t)\ \vec{j}\right), & (16)\\
\vec{e}_z(t) &= \vec{k} & (17)
\end{aligned}
$$

En coordenadas cilídricas la posición de una partícula viene dada por el vector de posición $\vec{r}(t) = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$, y la velocidad es

$$
\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho(t) + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z(t) + \rho\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\phi(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \dot{z}(t)\vec{e}_z + \rho(t)\dot{\phi}(t)\vec{e}_\phi(t) \tag{18}
$$

Finalmente, por completitud damos las expresiones para el gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas (por simplicidad, aquí no escribimos explícitamente la dependencia en t):

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \partial_\rho\psi\ \vec{e}_\rho + \tfrac{1}{\rho}\partial_\phi\psi\ \vec{e}_\phi + \partial_z\psi\vec{e}_z & (19)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \tfrac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \tfrac{1}{\rho}\partial_\phi(A_\phi) + \partial_z A_z, & (20)\\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \tfrac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} & (21)
\end{aligned}
$$

3. **Coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ)

El cambio de coordenadas de cartesianas a esféricas y viceversa viene dado por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t), & r(t) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2},\\
y(t) &= r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t), & \theta &= \operatorname{arc\,tg}\tfrac{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}{z(t)},\\
z(t) &= r(t)\cos\theta(t), & \phi &= \operatorname{arc\,tg}\tfrac{y(t)}{x(t)}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

La base ortonormal $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ está relacionada con la base cartesiana $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ como

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r(t) &= \sin\theta(t)\cos\phi(t)\ \vec{i} + \sin\theta(t)\sin\phi(t)\ \vec{j} + \cos\theta(t)\ \vec{k}, && (23)\\
\vec{e}_\theta(t) &= \Big(\cos\theta(t)\cos\phi(t)\ \vec{i} + \cos\theta(t)\sin\phi(t)\ \vec{j} - \sin\theta(t)\ \vec{k}\Big), && (24)\\
\vec{e}_\phi(t) &= \Big(-\sin\phi(t)\ \vec{i} + \cos\phi(t)\ \vec{j}\Big), && (25)
\end{aligned}$$

En coordenadas esféricas la posición de una partícula esta dado por el vector de posición $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$ y la velocidad es

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} && (26)\\
&= \dot{r}(t)\ \vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\ \vec{e}_\theta(t) + r(t)\sin\theta(t)\dot{\phi}(t)\ \vec{e}_\phi(t), && (27)
\end{aligned}$$

Finalmente, por completitud damos las expresiones para el gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas esféricas (omitimos la dependencia en el tiempo t por simplicidad):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \partial_r\psi\ \vec{e}_r + \tfrac{1}{r}\partial_\theta\psi\ \vec{e}_\theta + \tfrac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\psi\ \vec{e}_\phi, && (28)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \tfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r) + \tfrac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A_\theta) + \tfrac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi A_\phi, && (29)\\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \tfrac{1}{r\sin\theta}\Big(\partial_\theta(\sin\theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta\Big)\vec{e}_r + \Big(\tfrac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi A_r - \tfrac{1}{r}\partial_r(rA_\phi)\Big)\vec{e}_\theta\\
&\quad + \tfrac{1}{r}\Big(\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\Big)\vec{e}_\phi, && (30)
\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales homogeneas de segundo orden con coeficientes constantes

- Busco $y(t)$ solución de la ecuación:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 > 0. \tag{31}$$

Dos soluciones independientes son

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad \Big((i\omega)^2e^{i\omega t} + \omega^2e^{i\omega t} = 0\Big)\\
y_2(t) &= e^{-i\omega t} \quad \rightarrow \quad \Big((-i\omega)^2e^{-i\omega t} + \omega^2e^{-i\omega t} = 0\Big).
\end{aligned}$$

La solución general es una combinación lineal de $y_1(t)$ y $y_2(t)$, con coeficientes $A, B \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \boxed{Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}} = A\Big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\Big) + B\Big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\Big)\\
&= \underbrace{(A+B)}_{A'}\cos(\omega t) + \underbrace{(iA - iB)}_{B'}\sin(\omega t) = \boxed{A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t)}, && (32)
\end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned}
y(t) &= \boxed{A''\cos(\omega t + \alpha)} = A''\Big(\cos(\omega t)\cos\alpha - \sin(\omega t)\sin\alpha\Big)\\
&= \underbrace{(A''\cos\alpha)}_{A'}\cos(\omega t) + \underbrace{(-A''\sin\alpha)}_{B'}\sin(\omega t)\\
&= \boxed{A'''\sin(\omega t + \beta)} = A'''\Big(\sin(\omega t)\cos\beta + \cos(\omega t)\sin\beta\Big)\\
&= \underbrace{(A'''\cos\beta)}_{B'}\sin(\omega t) + \underbrace{(A'''\sin\beta)}_{A'}\cos(\omega t)\,. && (33)
\end{aligned}$$

- Busco $y(t)$ solución de la ecuación:

$$\ddot{y} - \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 > 0. \tag{34}$$

Dos soluciones independientes son

$$\begin{aligned} y_3(t) &= e^{\omega t} \quad \rightarrow \quad \Big((\omega)^2 e^{\omega t} - \omega^2 e^{\omega t} = 0\Big) \\ y_4(t) &= e^{-\omega t} \quad \rightarrow \quad \Big((-\omega)^2 e^{-\omega t} - \omega^2 e^{-\omega t} = 0\Big). \end{aligned}$$

La solución general es una combinación lineal de $y_3(t)$ y $y_4(t)$ con coeficientes $A, B \in \mathbb{C}$

$$y(t) = \boxed{Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}}. \tag{35}$$

Repaso de la mecánica newtoniana

Definiciones básicas

- Posición: $\vec{r}(t)$
- Velocidad: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
- Aceleración: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt^2}$
- Momento o cantidad de movimiento: $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$.
- Momento angular: "cantidad de rotación" ($\vec{r}_O(t)$ no es necesariamente el vector de posición)
$$\vec{L}(t) = \vec{r}_O(t) \times \vec{p}(t)$$
- Momento de fuerza o torque:
$$\vec{M}(t) = \vec{r}_O(t) \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

Leyes de Newton

Válidas en cualquier sistema de referencia inercial.

- Primera ley de Newton (o ley de la inercia):
$$\sum_{i=1}^{N_{\text{fuerzas}}} \vec{F}_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a} = 0 \tag{36}$$
- Segunda ley de Newton:
$$\sum_{i=1}^{N_{\text{fuerzas}}} \vec{F}_i = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{37}$$
donde m es la masa inercial.
- Tercera ley de Newton (o ley de acción y reacción):
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{38}$$

Trabajo y energía

El trabajo W realizado por una fuerza $\vec{F}$ para llevar una partícula de un punto $\vec{r}_1$ a un punto $\vec{r}_2$ a lo largo de un camino C viene dado por

$$W_{1\to 2} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{39}$$

La segunda ley de Newton implica que

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 = T_2 - T_1 \tag{40}$$

donde T_i es la energía cinética en el punto $\vec{r}_i$.

Fuerzas conservativas

El trabajo no depende del camino:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{41}$$

Puedo definir una energía potencial $V(\vec{r})$ que cumple:

- $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad W_{1\to 2} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$
- Conservación de la energía mecánica: $E_1 = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E_2 \quad \forall 1, 2$ (en general cada estado está definido por $\vec{r}, \vec{v}$).

Si se tiene una fuerza no conservativa, el trabajo realizado por la misma conlleva una variación de la energía mecánica

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{cons.} + \vec{F}_{no\,cons} = -\vec{\nabla} V + \vec{F}_{no\,cons} \quad \rightarrow \quad W_{no\,cons.} = E_2 - E_1 = \int_x^y \vec{F}_{no\,cons.} \cdot d\vec{s} \tag{42}$$

Ejemplos de fuerzas conservativas y no conservativas

- **Conservativa:** Fuerza gravitatoria. Principio de equivalencia (la masa inercial es igual a la masa gravitatoria).

$$\vec{F}_G = G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \qquad \underbrace{\rightarrow}_{\text{cerca de la superficie terrestre}} \qquad V_G(h) \simeq mgh$$

  donde $G = 6{,}67310^{-11} m^3/(kg\, s^2)$ es la constante de Newton.

- **Conservativa:** Fuerza elástica. Ley de Hooke

$$F_k = -k(x - x_0) \qquad V_k(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

- **No conservativa:** Fuerzas de rozamiento/arrastre.

Sistemas de partículas

Supongamos un sistema con N partículas, con posiciones $\vec{r}_a$ y masas m_a con $a = 1, ...N$.

Definimos el centro de masas como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a, \tag{43}$$

donde $M = \sum_a m_a$ es la masa total del sistema. Se puede demostrar que el centro de masas está bien definida, es decir, que no depende del sistema de coordenadas elegido. Veremos que en muchos aspectos (aunque no todos), el sistema se comportará como una sola partícula con masa M situada en $\vec{r}_{cm}$.

Del mismo modo que para una sola partícula, se define la velocidad, la aceleración y el momento del centro de masas como

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}, \tag{44}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}, \tag{45}$$

$$\vec{p}_{cm} = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} = M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}. \tag{46}$$

En cuanto a las fuerzas actuando sobre la a-ésima partícula, hay que distinguir entre *fuerzas internas*, ejercida por otra partícula del sistema, y *fuerzas externas*, proviniendo de una causa exterior al sistema. Por la segunda ley de Newton (37) sabemos que el total de fuerzas internas y fuerzas externas causan una acceleración de la a-ésima partícula, dada por

$$\vec{F}_a^{total} = \sum_{\substack{b = 1 \\ b \neq a}}^{N} \vec{F}_{ab}^{(int)} + \vec{F}_a^{(ext)} = m_a \vec{a}_a, \tag{47}$$

donde con $F_{ab}^{(int)}$ anotamos la fuerza de la b-ésima partícula del sistema sobre la a-ésima. En cuanto a las fuerzas internas, asumiremos la *tercera ley de Newton*, que la fuerza que la partícula a ejerce sobre b es igual de intensidad y opuesto en dirección a la fuerza ejercida por b sobre a. Sumando (47) sobre todas las partículas, obtenemos que

$$\sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a^{total} = \sum_{\substack{b, a = 1 \\ b \neq a}}^{N} \vec{F}_{ab}^{(int)} + \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a^{(ext)} = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a^{(ext)} = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{a}_a = M \vec{a}_{cm} \tag{48}$$

Por la tercera ley está claro que las fuerzas internas aparecen en el primer término de dos en dos, anulandose mutuamente, tal que, llamando la fuerza externa total actuando sobre el sistema $\vec{F}_{tot} = \sum_a \vec{F}_a^{(ext)}$, (48) se reduce a

$$\vec{F}_{tot} = M \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt}. \tag{49}$$

En otras palabras, sean como sean las fuerzas internas y no importa como de complicado resultan los movimientos de las partículas individuales, el centro de masas se comporta como si fuera una sola partícula de masa M, obedeciendo una "segunda ley de Newton". Por lo tanto, si el total de las fuerzas externas es cero, el momento total se conserva.

De manera similar se define el momento angular y el momento de fuerza externas del sistema de N partículas como

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \times \vec{p}_a, \tag{50}$$

$$\vec{M}_{tot}^{(ext)} = \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \times \vec{F}_a^{(ext)}. \tag{51}$$

Fijaos que en la definición (51) sólo entran las fuerzas externas,

Trabajo de un sistema de partículas

El trabajo realizado por las fuerzas sobre un sistema de partículas se define como

$$W_{1\to 2} = \sum_{a=1}^{N} \int_C \vec{F}_a \cdot d\vec{s}_a, \tag{52}$$

que, de modo similar al caso de una sola partícula se puede reescribir como

$$W = T(2) - T(1), \tag{53}$$

donde definimos la energía cinética del sistema como $T = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a |\vec{v}_a|^2$.

Si suponemos que tanto las fuerzas externas como las internas son conservativas

$$W = \sum_{a=1}^{N} \int_1^2 \Big(\vec{F}_a^{(ext)} + \sum_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{N} \vec{F}_{ab}^{(int)}\Big) \cdot d\vec{s}_a = \sum_{a=1}^{N} \Big(V_a(1) - V_a(2)\Big) + \sum_{\substack{b,a=1 \\ b\neq a}}^{N} \Big(V_{ab}(1) - V_{ab}(2)\Big). \tag{54}$$

A la cantidad V_{ab} se le llama la *energía potencial interna* y las identidades (53) y (54) indican que la energía mecánica total

$$E_{tot} = \frac{1}{2} M |v_{cm}|^2 + \sum_{a=1}^{N} \Big(\frac{1}{2} m_a |\tilde{v}_a|^2 + V_a + \sum_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{N} V_{ab}\Big) \tag{55}$$

está conservada. Donde $\vec{\tilde{v}}_a = \vec{v}_a - \vec{v}_{cm}$ es la velocidad interna de la partícula a.

Campos Físicos

Fuerza que ejercerán todas las partículas de un sistema sobre otra partícula en una determinada posición $\vec{r}$.

Campo gravitatorio: $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m} = \sum_i^N -Gm_i \frac{\vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}$; $\qquad \vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r})$