Formalismo Hamiltoniano

1. (a) Comprobar que el lagrangiano de una partícula libre de masa m, en un sistema de referencia no inercial (x, y, z) moviéndose con velocidad angular constante ω alrededor del eje Z viene dado por:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \omega^2(x^2 + y^2)) \, ,$$

(b) Calcular el Hamiltoniano del sistema. Comprobar que se puede escribir como:

$$H = H_o - \omega \mathbf{L} \, ,$$

donde H_o es el Hamiltoniano de una partícula libre.

2. Considera el lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) + Ax^n\dot{x}, \tag{1}$$

con A y n constantes arbitrarios. Calcula el hamiltoniano correspondiente $H = H(x, p)$ y demuestra que se reduce al hamiltoniano $\tilde{H} = H(x, \tilde{p})$, correspondiente al lagrangiano

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \tag{2}$$

bajo la redefinición de los momentos $p = \tilde{p} + Ax^n$. Explica por qué. (Pista: compara las ecuaciones de Lagrange de L y $\tilde{L}$.)

3. Considera una partícula con masa m en un campo gravitatorio constante, restringida a moverse sobre un espiral con ecuación R =cte y $z = k\theta$ con k una constante. Calcula el hamiltoniano y resuelve las ecuaciones de Hamilton.

4. La ecuación de movimiento de una partícula de masa m y carga e moviéndose en un campo magnético uniforme B en la dirección z se puede obtener del Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) \, .$$

(a) Escribir las ecuaciones de movimiento.

(b) Escribir el Hamiltoniano.

(c) Calcular los corchetes de Poisson: $[m\dot{x}, m\dot{y}]$, $[m\dot{x}, H]$

5. Sea el Hamiltoniano de una partícula en un campo gravitorio constante en la dirección z:

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq \, ,$$

y la transformación:

$$Q = -p \quad P = q + Ap^2 \, .$$

(a) Comprobar que la transformación es canónica

(b) Encontrar el Hamiltoniano en las nuevas variables. Demostrar que se puede eliminar Q ajustando la constante A. Para dicho valor de A resolver las ecuaciones de movimiento, y expresar la solución en las variables originales q y p.

6. Sea la transformación de coordenadas:

$$Q = \ln(1 + q^{1/2}\cos p)\,, \tag{3}$$
$$P = 2(1 + q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p\,. \tag{4}$$

(a) Comprobar que la transformación es canónica. (b) Comprobar que la función generadora de la transformación viene dada por:

$$F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p\,.$$

7. Considera el hamiltoniano $H_0(p, q)$ que no depende explicitamente del tiempo y que describe algun sistema de un grado de libertad. Sobre el sistema H_0 actua una perturbación tal que el sistema nuevo está descrito por el hamiltoniano perturbado $H = H_0 - \epsilon q \sin \omega t$. ¿Como se modifican las ecuaciones de movimiento debido a la perturbación? Dada la función generadora

$$F(q, P) = qP - \frac{\epsilon q}{\omega}\cos \omega t, \tag{5}$$

demuestra que el hamiltoniano $\tilde{H}$, generado de la transformación canónica inducido por F, es otra vez de la forma $\tilde{H} = H_0(Q, P - \frac{\epsilon}{\omega}\cos \omega t)$. En otras palabras, la transformación canónica absorbe la perturbación en el hamiltoniano. Demuestra a través de las ecuaciones de movimiento que Q y P son efectivamente las variables canónicas de $\tilde{H} = H_0$.

8. Considera el lagrangiano de un oscilador armónico amortiguado

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 e^{2\gamma t} - \tfrac{1}{2} k^2 q^2 e^{2\gamma t}, \tag{6}$$

con γ una constante positiva. Deriva las ecuaciones de movimiento y interpreta cada término. Calcula la forma del hamiltoniano. Dada la transformación canónica

$$Q = q\, e^{\gamma t}, \qquad\qquad P = p\, e^{-\gamma t}, \tag{7}$$

busca la función generadora $F(q, P)$ que genera esta transformación y calcula el hamiltoniano $\tilde{H}$ para el cual Q y P son las variables canónicas. Resuelva las ecuaciones de movimiento de $\tilde{H}$, distinguiendo entre los casos que sea γ mayor, igual o menor que $\sqrt{k/m}$. ¿Cuál es la interpretación de cada uno de los casos en las variables antiguas q y p?

9. Un sistema está descrito por el lagrangiano

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \tfrac{1}{2} A(x^2 + y^2) - Bxy, \tag{8}$$

con A y B constantes positivas. Aplica el cambio de coordenadas

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \qquad\qquad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \tag{9}$$

e interpreta el sistema a través de la nueva forma del lagrangiano. Demuestra que el hamiltiano se descompone en dos partes H_θ y H_ϕ que dependen sólo de θ y de ϕ respectivamente. Utiliza los corchetes de Poisson para demostrar que ambas son cantidades conservadas. Define la cantidad $\ell = m(\theta p_\phi - \phi p_\theta)$ y demuestra que ℓ se conserva en el caso de $B = 0$. Interpreta las cantidades H_θ, H_ϕ y ℓ y comenta por qué están conservadas.

10. El Hamiltoniano de un oscilador armónico simple es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

(a) Utilizar el cambio de variables:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x + i\frac{p}{m\omega}) \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x - i\frac{p}{m\omega})$$

y expresar el Hamiltoniano en función de a y a^*.

(b) Calcular los corchetes de Poisson: $[a, a^*]$, $[a, H]$, $[a^*, H]$.

(c) Resolver las ecuaciones de movimiento para a y a^*.

11. Considerar el movimiento de una partícula de masa m en un potencial gravitatorio $V(r) = -k/r$, en el plano XY.

(a) Escribir el Hamiltoniano.

(b) El momento angular está orientado en la dirección z, con modulo: $L = xp_y - yp_x$, y el vector de Laplace-Runge-Lenz viene dado por: $\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$, donde $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Demostrar que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{K}$ son cantidades conservadas.