Pequeñas oscilaciones

1. De un péndulo de masa m y longitud $3l$ cuelga otro péndulo de la misma masa y longitud $4l$ (ver Figura 1). Hallar el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange de este péndulo doble. Resolver las ecuaciones en el límite de oscilaciones pequeñas.

2. Sean dos cuerpos de masa m y otro de masa M kg unidos por tres muelles formando una circunferencia de radio R en el plano horizontal (ver Figura 1). Los muelles son idénticos con constante elástica k y longitud natural a. La longitud de equilibrio de los muelles en la circunferencia es $b = 2\pi R/3$.

   (a) Escribir el Langrangiano del sistema, y las ecuaciones de movimiento.

   (b) Encontrar los modos normales de oscilación (frecuencias y amplitudes) alrededor de la posición de equilibrio.

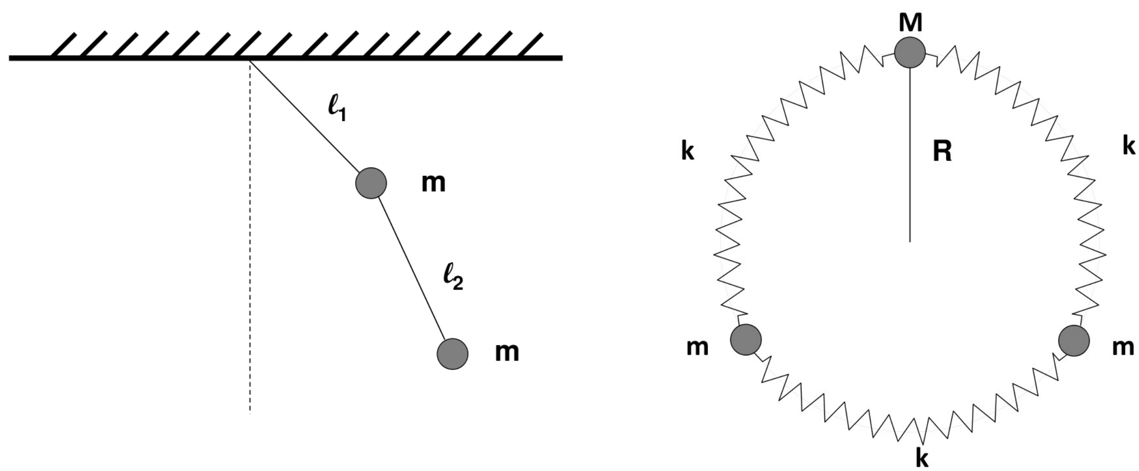

Figura 1: *El problema del péndulo doble (probema 1), y de los 3 muelles (problema 2).*

3. Sean dos osciladores acoplados de masa m con energía cinética y potencial respectivamente:

$$\begin{aligned} T &= ma^2(2\dot{x}^2 - 10\dot{x}\dot{y} + 13\dot{y}^2)\,, \\ V &= mga(5x^2 - 22xy + 25y^2)\,, \end{aligned}$$

   donde a es una constante y g la aceleración de la gravedad. Determinar los modos normales de oscilación (frecuencias y amplitudes), y las coordenadas normales.

4. Sean dos masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg unidas por un muelle de constante elástica $k = 2$ N/m. Cada una de las masas a su vez está unida por un muelle a la pared de constante elástica $k_1 = 3$ N/m y $k_2 = 6$ N/m respectivamente (ver Figura 2).

   (a) Escribir el Langrangiano del sistema, y las ecuaciones de movimiento.

   (b) Encontrar los modos normales de oscilación.

   (c) Si inicialmente el sistema está en reposo y desplazamos m_1 una distancia l hacia la derecha, escribir la ecuación de la trayectoria para cada una de las masas.

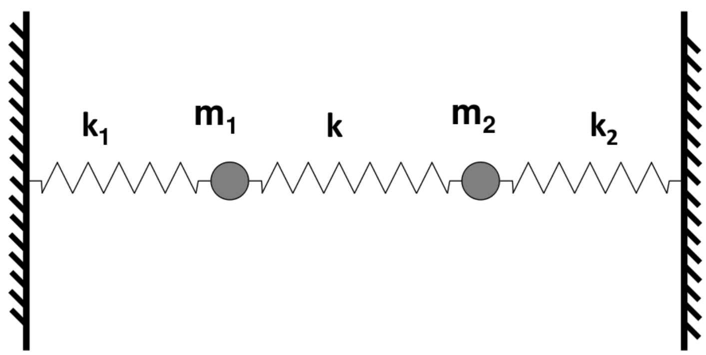

Figura 2: *Problema 3.*