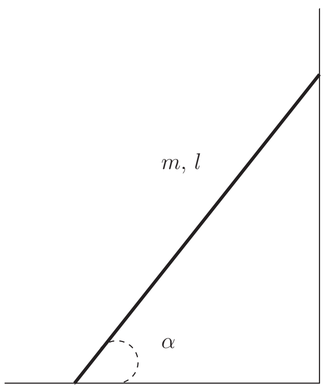
Formalismo lagrangiano

1. Tenemos una escalera de masa m y longitud l apoyada sobre un muro vertical sin rozamiento (Figura 1, izquierda). Encuentra la relación entre el coeficiente de rozamiento del suelo μ y el ángulo de equilibrio de la escalera con el suelo.

2. Un juguete consiste en dos varillas de masa despreciable formando un ángulo recto y de longitud ℓ_1 y ℓ_2. En los extremos hay dos masas m_1 y m_2 (Figura 1, derecha). Se suspende por el vértice del ángulo. Calcula su posición de equilibrio usando el Principio de los Trabajos Virtuales.



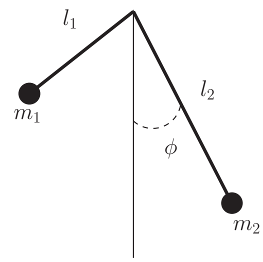


Figura 1: La escalera del Problema 1 y el juguete del Problema 2.

3. Sea un sistema de 3 poleas colgadas del techo y conectadas por una cuerda de longitud ℓ. De cada polea cuelga una masa distinta. ¿Cuál es la relación entre las masas para que el sistema esté en equilibrio? (Figura 2, derecha).

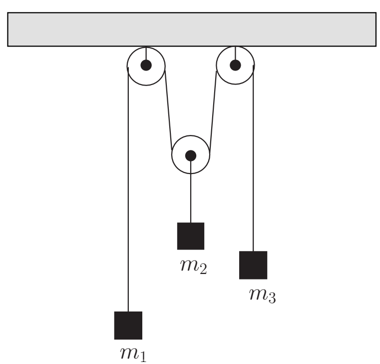


Figura 2: Las poleas del Problema 3.

4. Sea un péndulo invertido compuesto por una varilla vertical de masa despreciable y longitud total ℓ en el extremo de la cual hay una masa m. A una distancia b del suelo el péndulo está sujeto por un muelle horizontal de constante k, que cuando la varilla está vertical tiene su longitud natural L. Determina el valor mínimo de la constante k para que el sistema esté en equilibrio.

5. Considera una partícula restringida a moverse sobre la superficie de una esfera de radio R en un campo gravitatorio constante. Escribe las ecuaciones de movimiento y demuestra que las órbitas con

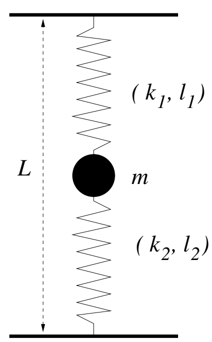
θ (el ángulo azimutal) constante sólo son posibles en el hemisferio sur de la esfera. Comenta cómo varía el ángulo de equilibrio θ_0 en función del momento angular.

6. Una masa se mueve a lo largo de una hélice dada por las ecuaciones $\rho = az$ y $\varphi = -bz$ en un campo gravitatorio. Demuestra que la ecuación de movimiento está dada por

$$(a^2b^2z^2 + a^2 + 1)\ddot{z} + a^2b^2z\dot{z}^2 + g = 0\ .$$

7. Una masa puntual está colgada de dos muelles entre dos paredes de distancia L (Figura 3, izquierda). Los muelles tienen tamaño ℓ_1 y ℓ_2 y constantes de muelle k_1 y k_2 respectivamente. Calcula el movimiento de la masa si sólo están permitidos los desplazamientos verticales.

8. Dos masas están conectadas a través de una cuerda de longitud L. Una masa está colocada en una mesa donde puede moverse sin rozamiento y la otra cuelga de la cuerda que pasa por un agujero en la mesa y sólo puede moverse verticalmente (Figura 3, derecha). Calcula las ecuaciones de Lagrange y determina las constantes de movimiento. ¿Cuál es su interpretación? Resuelve el problema en el caso de que una de las cantidades conservadas sea cero.



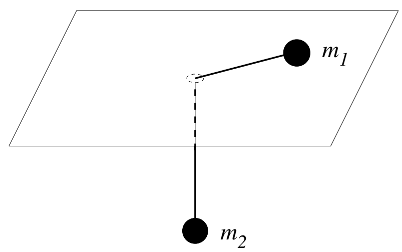


Figura 3: La masa entre dos muelles del Problema 7 y las masas en una mesa del Problema 8

9. Tenemos una cuña de masa M, ángulo α y altura h que se puede desplazar sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Sobre la cuña dejamos en reposo un cuerpo de masa m. Comprueba que la velocidad del cuerpo cuando llega al suelo y el tiempo que tarda en caer vienen dados por:

$$v_f^2 = \frac{2gh}{M + m\sin^2\alpha}\frac{M^2 + 2mM\sin^2\alpha + m^2\sin^2\alpha}{M+m}\ , \quad t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{\frac{M + m\sin^2\alpha}{(M+m)\sin^2\alpha}}\ .$$

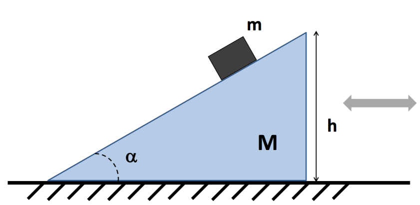


Figura 4: La masa en la cuña móvil del Problema 9.

10. Dos masas m_1 y m_2 están conectadas por un muelle de constante k y masa despreciable, inicialmente en reposo en una superficie horizontal. A m_1 se le da un impulso (momento) inicial I, en la dirección de m_1 a m_2. Halla el desplazamiento de m_2 antes de volver a pararse por primera vez.

11. Sea un aro de radio a que está girando sobre su eje vertical con velocidad angular ω. Colocamos un cuerpo de masa m que se puede desplazar sobre el aro.

    a) Escribe el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento, y determina la posición de equilibrio de la masa m.

    b) Determina la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de punto de equilibrio.

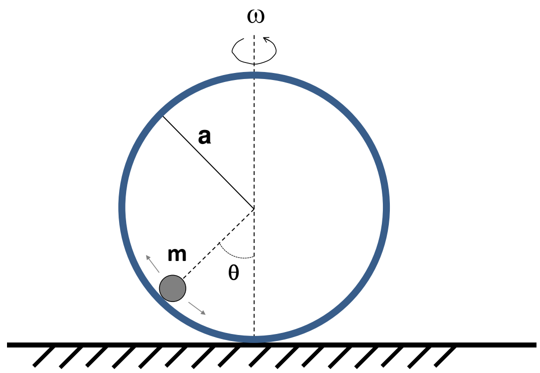


Figura 5: La masa en el aro del Problema 11.

12. Se puede demostrar (a través del teorema de Bertrand) que sólo hay dos potenciales con la propiedad que todas las trayectorias acotadas son cerradas. Uno es el conocido potencial de Newton, el otro es el potencial del oscilador armónico $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Deriva para este último potencial el equivalente de las leyes de Kepler. En otras palabras:

    a) ¿Cuál es la forma de las órbitas?

    b) ¿Existe algún equivalente de la ley de las áreas?

    c) ¿Cuál es la relación entre el periodo y el tamaño de la órbita?