Capítulo 3
TRABAJO Y ENERGÍA

3.1 Introducción

3.2 Trabajo realizado por una fuerza

3.3 Energía cinética

3.4 Energía potencial: fuerzas conservativas

3.5 Conservación de la energía mecánica

3.6 Conservación de la energía y fuerzas disipativas

3.7 Potencia, rendimiento y velocidad metabólica

3.1 Introducción

Trabajo y energía relacionados: energía es capacidad para realizar trabajo (cuando un sistema realiza un trabajo sobre otro le transfiere energía).

Hay dos tipos o formas principales de energía:

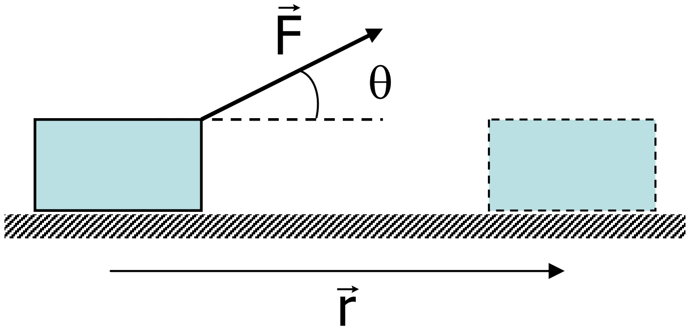
- Cinética: debida al *movimiento*.
- Potencial: debida a la *posición* en un campo de fuerzas (gravitatoria, electromagnética, elástica, ...).

Veremos que la energía está relacionada con una ley de conservación: la energía total se conserva aunque haya intercambios de un tipo por otro.

A la hora de resolver problemas, cuando no se conoce bien la fuerza o se prefiere una forma alternativa, el principio de la conservación de la energía generalmente simplifica los cálculos.
Una ventaja a la hora de trabajar con trabajos y energías en vez de con fuerzas es que las primeras son magnitudes escalares.

3.2 Trabajo realizado por una fuerza

El trabajo realizado por una fuerza constante F que produce un desplazamiento r en una dirección que forma un ángulo θ con la línea de acción de la fuerza se define como:



$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F_T\, r = F \cos\theta\, r}$$

(producto escalar)

F_T = componente tangencial al desplazamiento

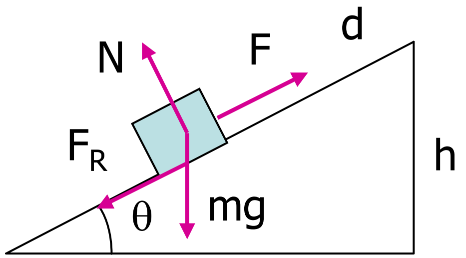
Unidades de trabajo:	1 N m = 1 J	(julio)	[SI]	1 J = $10^5 \times 10^2$ = 10^7 erg
	1 dyn cm = 1 erg	(ergio)	[cgs]	

- El trabajo es nulo si r=0 y/o la fuerza es perpendicular al desplazamiento.
  Ej.: el realizado por el peso sobre un cuerpo en una superficie horizontal.
- El trabajo es positivo si la fuerza es favorable al movimiento ($\cos\theta > 0$).
- El trabajo es negativo si la fuerza se opone al movimiento ($\cos\theta < 0$).
  Ej.: el realizado por una fuerza de rozamiento.

Si varias fuerzas actúan sobre un objeto: $\boxed{W = \sum W_i\ , \qquad W_i = \vec{F}_i \cdot \vec{r}}$

W igual al trabajo de la fuerza resultante: $\boxed{W = \vec{R} \cdot \vec{r}, \qquad \vec{R} = \sum \vec{F}_i}$

Ejemplo: subir un bloque por un plano inclinado con rozamiento

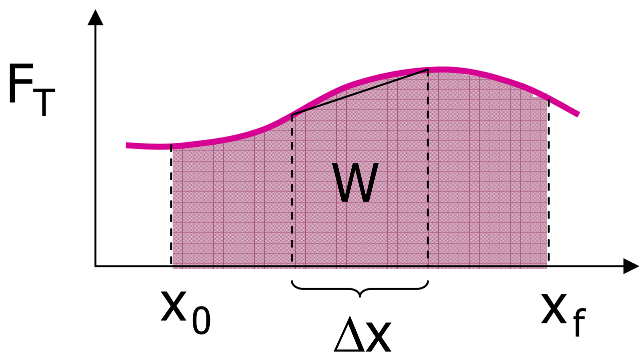


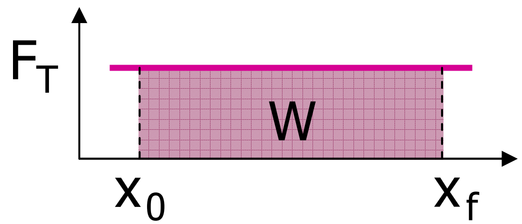
$$\left.\begin{aligned} W_g &= -m\,g\,\text{sen}\theta\,d \\ W_F &= \vec{F}\cdot\vec{d} = F\,d \\ W_R &= -F_R d = -\mu\,m\,g\cos\theta\,d \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} W &= W_g + W_F + W_R = \vec{R}\cdot\vec{d} = R_T\,d \\ R_T &= F - m\,g\,\text{sen}\theta - \mu\,m\,g\cos\theta \end{aligned}$$

Si la fuerza varía con el desplazamiento (en una dimensión para simplificar)

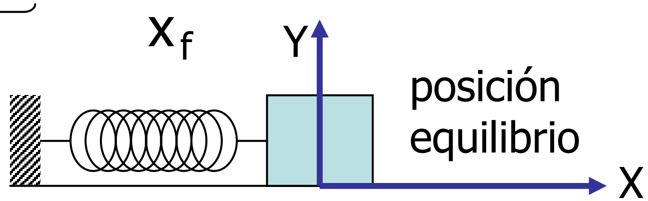
$$\boxed{W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_T(x_i)\,\Delta x = \int_{x_0}^{x_f} F_T(x)\,dx}$$

cuando F_T es constante se recupera
$W = F_T\, r$, siendo $r = x_f - x_0$





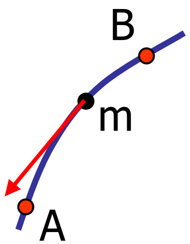
Ejemplo: muelle



$$F_T(x) = -k\,x$$

3.3 Energía cinética

Supongamos una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza resultante F que la desplaza a lo largo de una trayectoria:



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a} \cdot \vec{v}\,dt = \int_A^B m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \int_A^B m\,\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} m\,\vec{v} \cdot \vec{v}\right]_A^B = \left[\tfrac{1}{2} m\,v^2\right]_A^B = \tfrac{1}{2} m\,v_B^2 - \tfrac{1}{2} m\,v_A^2$$

Se define la **energía cinética** de la partícula como:
(un escalar con las mismas unidades que el trabajo)

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2} m\,v^2}$$

Teorema del trabajo y la energía: El trabajo total W realizado sobre un objeto para desplazarlo de una posición A a otra B es igual al cambio de la energía cinética del objeto.
Es un teorema general que se cumple para todo tipo de fuerzas.

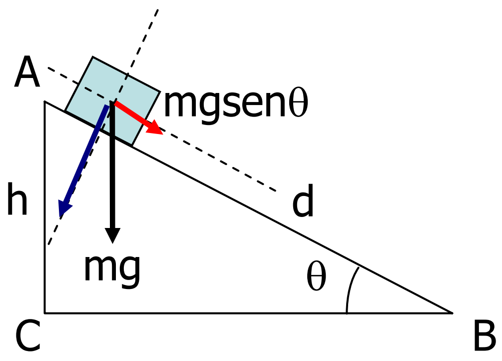
$$\boxed{W = \Delta E_c = E_c^B - E_c^A}$$

(Si W>0 la velocidad aumenta y si W<0 la velocidad disminuye).

3.4 Energía potencial: fuerzas conservativas

El trabajo realizado por ciertas fuerzas *(conservativas)* puede obtenerse a partir de la variación de otra forma de energía *(potencial)* que depende de la posición del objeto o de la configuración del sistema.

Supongamos la fuerza de la gravedad y calculemos el W realizado *sólo por esta fuerza* (*mg*) al mover un objeto a lo largo de dos caminos diferentes que unan el punto inicial A y el final B:



Camino 1: De A hasta B por el plano inclinado,

$$W_{AB} = m\,g\,d\,\mathrm{sen}\theta = m\,g\,h$$

Camino 2: De A hasta B pasando por C,

$$\left.\begin{array}{l} W_{AC} = m\,g\,h \\ W_{CB} = 0 \quad (\vec{F} \perp \vec{r}) \end{array}\right\} W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = m\,g\,h$$

Vemos que el trabajo es el mismo. Se puede probar que, aunque elijamos otro camino, W sólo depende de la diferencia de altura h entre A y B.

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo realizado por la misma entre dos puntos A y B es independiente del camino (la trayectoria seguida).
Por tanto el trabajo realizado sólo depende de las posiciones inicial y final.

Ejemplos de fuerzas conservativas: gravitatoria, electrostática, elástica.

Ejemplo de fuerza no conservativa: rozamiento
(W depende de longitud de la trayectoria)

$$W_{AB} = -F_R d_{AB}$$

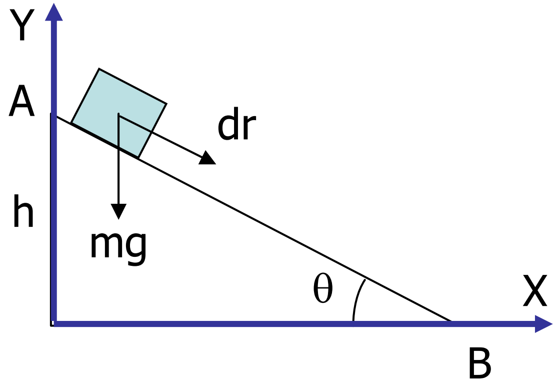
Para cualquier fuerza conservativa definimos la **energía potencial** U como aquella magnitud cuya variación de un punto A a otro B (cambiada de signo) nos da el W realizado por la fuerza entre esos dos puntos:

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B}$$

No tiene sentido hablar de energía potencial para fuerzas no conservativas.

Existe una energía potencial asociada a cada fuerza conservativa.

Energía potencial gravitatoria



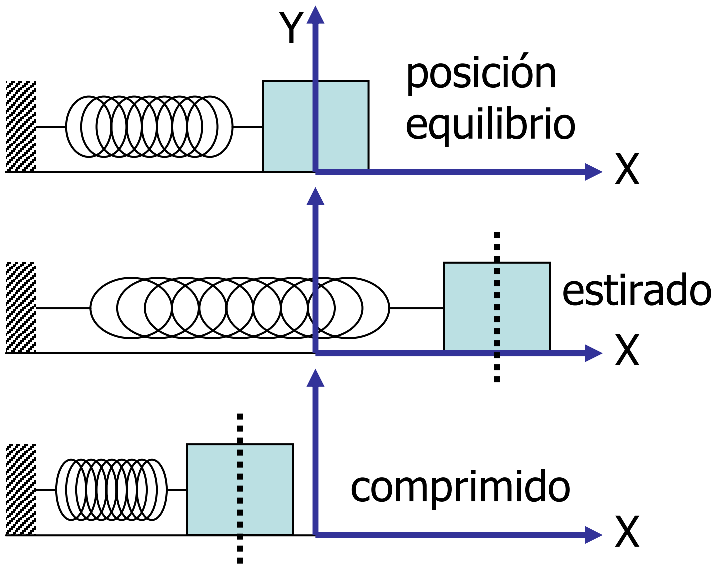
$$\vec{F} = -m\,g\,\hat{j}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B m\,g\,\hat{j}\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j})$$

$$= -\int_A^B m\,g\,dy = -(mgy_B - mgy_A)$$

$$W_{AB} = U_A - U_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(y) = m\,g\,y}$$

Energía potencial elástica



$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{i}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B k\,x\,\hat{i}\cdot dx\,\hat{i} = -k\int_A^B x\,dx$$

$$= -\left(\tfrac{1}{2}kx_B^2 - \tfrac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W_{AB} = U_A - U_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(x) = \tfrac{1}{2}k\,x^2}$$

3.5 Conservación de la energía mecánica

Consideremos un sistema sobre el que *sólo* actúan fuerzas conservativas.
El trabajo total realizado por las fuerzas desde A hasta B es igual a

a) La variación de la energía cinética: $\boxed{W = \Delta E_c = E_c^B - E_c^A}$

Y también a:

b) Menos la variación de la energía potencial: $\boxed{W = -\Delta U = U_A - U_B}$

Por tanto: si definimos la **energía mecánica** como $E_m = E_c + U$, suma de la energía cinética y la energía potencial, vemos que E_m **se conserva** (permanece constante) pues

$$\boxed{E_c^A + U_A = E_c^B + U_B = E_m = \text{constante}}$$

Si actúan simultáneamente distintas fuerzas conservativas (gravitatoria, elástica, etc.) entonces U es la suma de todas ellas.

Aplicación útil: calcular velocidad final v en caída libre desde altura h

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(y_i - y_f)}} \;, \text{ con } h = y_i - y_f$$

3.6 Conservación de la energía y fuerzas disipativas

En los sistemas físicos reales suelen actuar tanto fuerzas conservativas como no conservativas (por ejemplo la de rozamiento). Entonces la energía mecánica no se conserva:

$$\left.\begin{aligned} W = W_{conser} + W_{noconser} &= \Delta E_c \\ W_{conser} &= -\Delta U \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{noconser} = \Delta E_c + \Delta U = \Delta E_m$$

Por tanto, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de energía mecánica del sistema. Se cumple además el **Principio de conservación de la energía**: la energía no se crea ni se destruye, se transforma (de un tipo a otro: química, térmica, elástica, ...)

Conviene clasificar las fuerzas no conservativas en:

- disipativas ($W_{noconser} < 0$: se cede energía útil por rozamiento o fricción)
- aplicadas ($W_{noconser} > 0$: máquinas que transforman energía interna en trabajo)

Ejemplo: una persona que corriendo convierte la energía química interna de los músculos en energía cinética y calor.

Salto vertical y leyes de escala

Sólo se realiza trabajo muscular de 1→2:

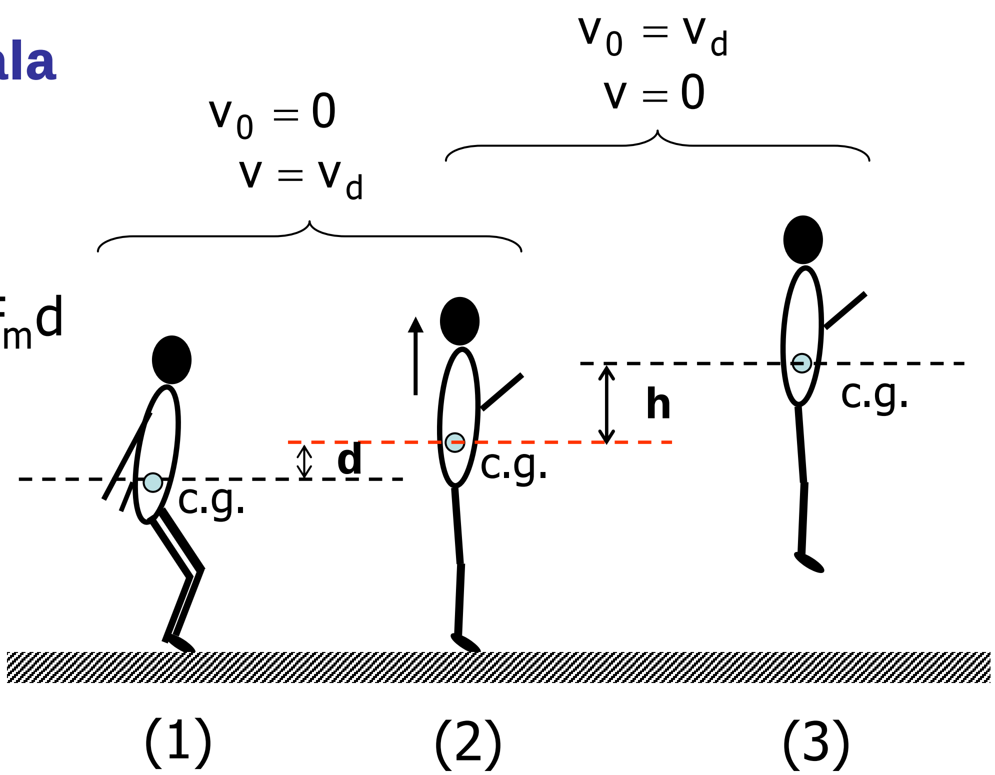
$$W = \Delta E_c + \Delta U = \tfrac{1}{2} m v_d^2 + mgd = F_m d$$

De 2→3 no se hace trabajo.
La energía se conserva:

$$W = mg\,(d + h)$$

$$\Rightarrow F_m d \approx m\,g\,h \Rightarrow \boxed{h = \frac{F_m d}{m\,g}}$$

(Supongamos d << h)



Aplicando las leyes de escala a animales semejantes que sólo difieran en su tamaño L, tenemos que si k = L′/L entonces:

$$\left.\begin{aligned} d' &= d \times k \\ F'_m &= F_m \times k^2 \\ m' &= m \times k^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h' = \frac{(F_m \times k^2)(d \times k)}{(m \times k^3)\,g} = h$$

la altura del salto no depende del tamaño del animal

3.7 Potencia, rendimiento y velocidad metabólica

Muchas máquinas, incluyendo los organismos vivos, son capaces de transformar algún tipo de energía en trabajo.

Definimos **potencia** como la capacidad de realizar trabajo por unidad de tiempo, es decir, la rapidez con que una fuerza realiza un trabajo

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

o también

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unidades en el sistema SI: 1 J/s = 1 W (vatio)
en el sistema inglés: 1 CV (caballo de vapor; hp) = 746 W

Casi siempre, las fuerzas disipativas hacen que el trabajo neto realizado sea menor que la energía necesaria para producirlo.

Definimos **eficiencia** o **rendimiento** como el cociente entre el trabajo realizado y la energía consumida,

$$\eta = \frac{W_{realizado}}{E_{consumida}}$$

(expresado en % si se multiplica por 100)

En los animales se define la **velocidad** o **tasa metabólica** como la energía consumida por unidad de tiempo (es una potencia).

Se necesita energía para la realización de trabajo externo y para el mantenimiento de las funciones básicas: circulación sanguínea, respiración, formación de proteínas, mantenimiento del gradiente iónico entre interior y exterior de las células, mantenimiento de la temperatura corporal...

Tasa metabólica basal: la mínima para el funcionamiento del organismo.

Tasa metabólica basal ≈ 80 W [cerebro (16 W), corazón (7 W) ...].

Cualquier actividad adicional conlleva disipar energía en forma de calor ($W_{realizado} < E_{consumida}$).

Rendimiento muscular η = 25%
(de cada 100 J consumidos, 75 J calor)

Consumo energético de una persona (70 kg)

$\approx 10^7$ J/día $\Rightarrow v_{met} \approx 120$ W

Actividad	v.m. (W)
Dormir	80
Sentado	110
Escribir	130
De pie	160
Andar	300
Deporte moderado	300-500
Deporte intenso	400-1400
Actividad extrema	≈1600

Se mide a partir de cantidad de O_2 consumido
(su reacción con carbohidratos, lípidos y proteínas produce 2×10^4 J/ℓ O_2)

$$\text{Ejemplo: } 1.45\ \ell\ O_2/\text{min} \times 2\times10^4\ \text{J}/\ell\ O_2 = 483\ \text{W}$$

El calor es una forma de energía tan habitual que tiene una unidad propia.
Se define **caloría** como la cantidad de calor (energía térmica) necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 °C a 15.5 °C.

$$\boxed{1 \text{ caloría} = 4.18 \text{ J}}$$

$$\text{Ejemplo}: \quad 10^7 \text{ J} \times \frac{1 \text{ cal}}{4.18 \text{ J}} = 2.4 \times 10^6 \text{ cal} = 2400 \text{ kcal}$$

Para una persona físicamente activa $v_{met} = 150$ W $\Rightarrow$ consumo de 3100 kcal/día

Diversos tipos de alimentos producen cantidades distintas de energía mediante la combustión con el O_2:

	Calor de combustión (en el laboratorio)	Calor de combustión fisiológico (en el organismo)
Grasas:	9.43 kcal/g	9.02 kcal/g
Proteínas:	5.60 kcal/g	4.07 kcal/g
Hidratos de carbono:	4.11 kcal/g	4.07 kcal/g

La energía de los alimentos que no se quema directamente se almacena en forma de energía química para su posterior utilización.

Aplicación: ritmo cardíaco y leyes de escala

A partir del concepto de tasa metabólica y utilizando las leyes de escala se puede calcular **cómo varía el ritmo cardíaco con el tamaño de los individuos**.

Como la energía consumida acaba disipándose en forma de calor que escapa a través de la piel, se encuentra que v_{met} es proporcional al área del cuerpo de un animal .

Establecemos una hipótesis biológica considerando que el O_2 necesario para el metabolismo es proporcionado por la sangre y ésta es bombeada por el corazón.

Una v_{met} elevada se producirá cuanto más grande sea el corazón y más rápido pueda bombear. Por tanto, podemos suponer que la $\mathbf{v_{met}}$ es proporcional al volumen del corazón **V** por la frecuencia de bombeo **f** (pulsaciones por segundo),

$$\mathbf{v_{met}} \propto \mathbf{V\, f}$$

Sea k el factor de escala entre dos animales semejantes, según el modelo de semejanza geométrica ($k = L'/L$; $k^2 = A'/A$; $k^3 = V'/V$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_{met}'}{v_{met}} &= k^2 \\ \frac{v_{met}'}{v_{met}} &= \frac{V'\,f'}{V\,f} = k^3\,\frac{f'}{f} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f' = \frac{1}{k} f$$

Así que el corazón de un animal mayor late más lentamente que el de uno pequeño.

Puede comprobarse cómo el ritmo cardíaco en bebés es superior. En ratones también se aprecia claramente. El mamífero con mayor ritmo cardíaco que existe es la musaraña.

Por ejemplo, si comparamos a seres humanos (adultos) con el mono (rhesus) con un factor de escala entre ambos de 2.5

$$f_{\text{corazón humano}} = \frac{1}{2.5} f_{mono} = 0.4\, f_{mono} \quad \text{(experimentalmente se obtiene 0.5)}$$