Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

J. C. Rosales y P. A. García Sánchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Capítulo 6

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Rango de una matriz

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. El rango por filas de la matriz A es la dimensión del subespacio vectorial de K^n generado por sus filas, a saber, $\{(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})\}$. El rango por columnas de A es la dimensión del subespacio vectorial de K^m generado por las columnas de A.

Ejercicio 72: Calcula el rango por filas y por columnas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.

Teorema. El rango por filas de A coincide con el rango por columnas de A.
A dicha cantidad la llamaremos simplemente rango de A y la denotaremos por rango(A).

Teorema (rango y determinantes). El rango de una matriz es el máximo de los órdenes de sus submatrices cuadradas regulares.

Ejercicio 73: Calcula el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathcal{R}).$$

`Maxima 45`: El rango de una matriz también se puede calcular contando las filas no nulas de su forma triangular reducida asociada.

```
(%i1) A:matrix([0,1,2,3],[4,5,6,7],[8,9,10,11]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) rank(A);
```

(%o2) $$2$$

```
(%i3) echelon(A);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i4) triangularize(A);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas sobre un cuerpo K es una expresión de la forma

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}.$$

Los elementos $a_{ij} \in K$ son los coeficientes del sistema, los $b_i \in K$ son los términos independientes, y las x_i son las incógnitas. Una solución es una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in K^n$ tal que $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ verifica las igualdades del sistema.

Las m igualdades del sistema anterior se pueden expresar como una única igualdad entre matrices,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

a la que llamaremos expresión matricial del sistema. A dichas matrices se les llama matriz de coeficientes, matriz incógnita, y matriz de términos independientes.

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Normalmente denotaremos a esta matriz por $(A|B)$.

Si un sistema tiene solución diremos que es compatible, y en caso contrario incompatible. Si tiene una única solución, es un sistema compatible determinado, y si tiene más de una solución decimos que es un sistema compatible indeterminado.

Dos sistemas de ecuaciones lineales sobre un cuerpo y con igual número de incógnitas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Proposición (operaciones elementales).

1) Si intercambiamos de posición dos ecuaciones de un sistema, obtenemos un sistema equivalente.
2) Si multiplicamos una ecuación por un escalar no nulo, obtenemos un sistema equivalente.
3) Si a una ecuación le sumamos otra multiplicada por un escalar, también obtenemos un sistema equivalente al original.

Ejercicio 74: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{array}\right\}.$$

Teorema de Rouché-Frobenius. Sea $AX = B$ la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas.

1) El sistema es compatible si y sólo si rango(A) = rango$(A|B)$.
2) El sistema es compatible determinado si y sólo si rango(A) = rango$(A|B) = n$.

Maxima 46: Vamos a estudiar el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ 3x+y+2z=1 \\ x+4y=0 \end{array}\right\}.$$

```
(%i1)  modulus:5$
(%i2)  B:matrix([1,1,1],[3,1,2],[1,4,0])$
(%i3)  rank(B);
```
(%o3) 2

```
(%i4)  C:addcol(B,[3,1,0])$
(%i5)  rank(C);
```
(%o5) 2

El sistema es compatible indeterminado.

Maxima 47: Estudiemos ahora el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ en función del parametro a.

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=a \\ 2x+ay+z=1 \\ 3x+3y+az=2 \end{array}\right\}.$$

```
(%i1)  modulus:7$
(%i2)  D:matrix([1,1,1],[2,a,1],[3,3,a])$
(%i3)  determinant(D);
```
(%o3) $a^2 - 5\,a + 6$

```
(%i4)  factor(a^2-5*a+6);
```
(%o4) $(a-3)\,(a-2)$

Así, si $a \notin \{2,3\}$, la matriz de coeficientes tiene rango máximo y el sistema es compatible determinado.

Estudiemos por separado los casos $a = 2$ y $a = 3$.

```
(%i5)  E:subst(2,a,D);
```
(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i6)  rank(E);
```
(%o6) 2

```
(%i7)  F:addcol(E,[2,1,2])$
(%i8)  rank(F);
```
(%o8) 3

Luego para $a = 2$, el sistema es incompatible.

```
(%i9)  G:subst(3,a,D)$
```

```
(%i11) rank(G);
```
(%o11) $$2$$

```
(%i12) H:addcol(G,[3,1,2])$
(%i13) rank(H);
```
(%o13) $$2$$

Para $a = 3$ obtenemos un sistema compatible indeterminado.

Ejercicio 75: Estudia el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 4y + 4z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4y + z = 3 \end{array}\right\}.$$

Ejercicio 76: Estudia los siguientes sistemas con coeficientes en $\mathbb{R}$ en función de los parámetros a y b.

1)
$$\left.\begin{array}{c} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\},$$

2)
$$\left.\begin{array}{c} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{array}\right\},$$

3)
$$\left.\begin{array}{c} ax + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\},$$

4)
$$\left.\begin{array}{c} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \end{array}\right\}.$$

Maxima 48: El comando `linsolve` en máxima puede ser utilizado para resolver sistemas lineales de ecuaciones.

```
(%i1) linsolve([2*x+y+z=2,x-y-2*2=0],[x,y,z]);
```
(%o1) $$[x = -\frac{\%r1 - 6}{3}, y = -\frac{\%r1 + 6}{3}, z = \%r1]$$

Como vemos, las soluciones dependen de un parámetro, que aquí se denomina $\%r1$. El rango de la matriz de coeficientes es 2 como vemos a continuación, y es el máximo posible (sólo hay dos filas), por lo que coincide con el de la matriz ampliada. El sistema es compatible indeterminado.

```
(%i2) rank(matrix([2,1,1],[1,-1,-2]));
```
(%o2) $$2$$

Fórmula de Cramer. Un sistema es de Cramer si su matriz de coeficientes es cuadrada y regular. Si $AX = B$ es la expresión matricial de un sistema de Cramer, entonces el sistema es compatible determinado y su única solución es

$$|A|^{-1}(|M_1|, \ldots, |M_n|),$$

donde M_i es la matriz que se obtiene a partir de A cambiando la columna i-ésima por B.

Ejercicio 77: Prueba que el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$ es un sistema de Cramer, y encuentra sus soluciones usando la fórmula de Cramer.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{array}\right\}.$$

3. Ecuaciones cartesianas o implícitas de un subespacio vectorial

Sea U un subespacio vectorial de V. Sea $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de V, y $B_U = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ una base de U. Supongamos que

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + \cdots + a_{1n}\vec{v}_n, \\ &\vdots \\ \vec{u}_r &= a_{r1}\vec{v}_1 + \cdots + a_{rn}\vec{v}_n. \end{aligned}$$

Sea $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$ un vector de V. Recordemos que el vector $\vec{x} \in U$ si y sólo si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda r \in K$ tales que

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_r a_{rn} \end{array}\right\}.$$

Luego $\vec{x} \in U$ si y sólo si el sistema con incógnitas $\lambda_1, \ldots \lambda_r$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tiene solución. Y sabemos que equivale a rango $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$ = rango $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{rn} & x_n \end{pmatrix}$.

Esto ocurre cuando unos cuantos determinantes valen cero, proporcionándonos así una sistema de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{c} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{k1}x_1 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \end{array}\right\},$$

a las que llamaremos ecuaciones cartesianas de U respecto de la base B de V.

- Si k es el número de ecuaciones cartesianas independientes que describen a U, entonces $k + \dim(U) = \dim(V)$.

Ejercicio 78: Dada la base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$, calcula las ecuaciones cartesianas respecto de la base B del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1)\}$.

Ejercicio 79: Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial $\langle\{(1,2,3,1), (1,1,1,1), (3,5,7,3)\}\rangle \subseteq \mathbb{Q}^4$.

Ejercicio 80: Consideremos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, $E_1 = \langle\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}\rangle$ y $E_2 = \langle\{(1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\}\rangle$.

a) Calcula una base de $E_1 + E_2$.
b) Calcula las ecuaciones cartesianas de $E_1 + E_2$.
c) Calcula las ecuaciones cartesianas de $E_1 \cap E_2$.
d) Calcula una base de $E_1 \cap E_2$.

Ejercicio 81: Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x+y, x+z, 2x+y+z)$, calcula una base para su núcleo.

`Maxima 49:` Calculemos las ecuaciones cartesianas de $U = \langle\{(1,1,2),(1,-1,0)\}\rangle \subseteq \mathbb{Q}^3$. Sus ecuaciones paramétricas respecto de la base usual son

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda+\mu \\ y &= \lambda-\mu \\ z &= 2\lambda \end{aligned}\right\}.$$

La matriz ampliada de este sistema con incógnitas en los parámetros λ y μ es

```
(%i1) A:matrix([1,1,x],[1,-1,y],[2,0,z]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Como su rango debe ser dos, su determinante es cero.

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) $$-2z+2y+2x$$

Así la ecuación cartesiana de U es $x+y-z=0$.

Esta ecuación también la podemos encontrar haciendo operaciones elementales por filas en A. Primero extraemos la matriz de coeficientes. Para ello eliminamos la última columna de A.

```
(%i3) C:submatrix(A,3);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para guardar traza de la operaciones elementales que hacemos en C para obtener su forma triangular reducida, le añadimos al final la matriz identidad.

```
(%i4) M:addcol(C,ident(3));
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora triangularizamos y nos quedamos con las últimas columnas, que forman una matriz regular con las operaciones elementales para que C alcance su forma reducida for filas.

```
(%i5) triangularize(M);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) P:submatrix(%,1,2);
```

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicamos estas operaciones por filas a la matriz inicial y obtenemos en las últimas filas las ecuaciones (en esta caso sólo en la última, pues hay una).

```
(%i7) P.A;
```

(%o7)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & z \\ 0 & -2 & 2y-z \\ 0 & 0 & 2z-2y-2x \end{pmatrix}$$

Si vemos U dentro de $\mathbb{Z}_2^3$, al ser $(1,1,2)=(1,-1,0)=(1,1,0)$, tenemos que las ecuaciones paramétricas ahora son

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Así la matriz ampliada de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 0 & z \end{pmatrix},$$

por lo que una de las ecuaciones, $z=0$, ya la tenemos. Al ser la dimensión de U uno, necesitamos una ecuación más, que viene de imponer que el determinante de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$ es cero (el rango de la matriz ampliada es uno), obteniendo $x-y=0$.

Podemos también utilizar operaciones elementales por filas para llegar a la mismas ecuaciones. En este caso no vamos a utilizar `triangularize`, pues se ve claramente qué operación tenemos que hacer.

```
(%i5) A:matrix([1,x],[1,y],[0,z]);
```

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

```
(%i5) rowop(A,2,1,1);
```

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Obtenemos también que las ecuaciones de U son

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Maxima 50:

Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(1,2,3,1),(1,0,-1,1)\}$. Calculmemos sus ecuaciones cartesianas respecto de la base $B=\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$.

```
(%i1)  modulus:false$
```

```
(%i2) A:matrix([1,1,1,1],[1,2,3,1],[1,0,-1,1])$
(%i3) triangularize(A);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

{(1,0,-1,1),(0,2,4,0)} es una base de U. Calculamos ahora las coodenadas de estos vectores respecto de la base B.

```
(%i4) solve(x*[1,1,1,1]+y*[0,1,1,1]+z*[0,0,1,1]
      +t*[0,0,0,1]-[1,0,-1,1], [x,y,z,t]);
```

(%o4)
$$[[x = 1, y = -1, z = -1, t = 2]]$$

```
(%i5) solve(x*[1,1,1,1]+y*[0,1,1,1]+z*[0,0,1,1]
      +t*[0,0,0,1]-[0,2,4,0], [x,y,z,t]);
```

(%o5)
$$[[x = 0, y = 2, z = 2, t = -4]]$$

```
(%i6) J:matrix([1,-1,-1,2],[0,2,2,-4],[x,y,z,t]);
```

(%o6)
$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & -4\\ x & y & z & t\end{pmatrix}$$

Al exigir que la matriz J tenga rango 2 obtenemos que los siguientes determinantes deben de valer cero.

```
(%i7) determinant(matrix([1,-1,-1],[0,2,2],[x,y,z]));
```

(%o7)
$$2z - 2y$$

(esto lo podíamos haber obtenido con `determinant(submatrix(J,4));`)

```
(%i8) determinant(matrix([1,-1,2],[0,2,-4],[x,y,t]));
```

(%o8)
$$4y + 2t$$

Las ecuaciones cartesianas de U respecto de B son

$$\left.\begin{array}{r} z - y = 0 \\ y + t = 0 \end{array}\right\}.$$

Maxima 51:

Sean $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}_5^4 \mid x+y+z+t = 0,\ x+2t = 0\}$ y $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}_5^4 \mid 4y+4z+t = 0,\ x + 4y = 0\}$. Calculemos una base de la intersección.

```
(%i1) modulus:5$
(%i2) M:matrix([1,1,1,1],[1,0,0,2],[0,4,4,1],[1,4,0,0])$
(%i3) nullspace(M);
```

(%o3)
$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

Una base es de la intersección es $\{(3, 3, 3, 1)\}$.

Maxima 52:

Sea $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, $f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$. Calculemos una base de $N(f)$.

```
(%i1) modulus:false4
(%i2) N:matrix([1,1,0,0],[0,0,1,1],[1,1,1,1])$
(%i3) nullspace(N);
```

(%o3) $$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Por tanto una base de N(f) es $\{(-1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$.

Índice alfabético