Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

J. C. Rosales y P. A. García Sánchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Capítulo 4

Matrices con coeficientes en un cuerpo

1. Matrices

Sean $I = \{1, 2, \dots, m\}$ y $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Una matriz de orden $m \times n$ sobre un cuerpo K es una aplicación

$$A : I \times J \to K, \ (i, j) \mapsto a_{ij}.$$

Normalmente a la matriz A la representaremos de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y a veces simplemente escribiremos $A = (a_{ij})$, si queda claro dónde varían i y j. Diremos que A es una matriz con m filas y n columnas.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre K.

- $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ con la suma coordenada a coordenada tiene estructura de grupo abeliano, esto es, la suma es asociativa, tiene elemento neutro, toda matriz tiene inversa y es conmutativa.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 42: Calcula suma de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Entonces podemos definir el producto de A y B como $AB = C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$ con

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Ejercicio 43: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}$. Calcula AB.

Una matriz de orden $n \times n$ diremos que es una matriz cuadrada de orden n.

- $(\mathcal{M}_{n\times n}(K), +, \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 44: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $AB \neq BA$.

2. Determinantes

Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, definimos $|A|$, el determinante de A, recursivamente de la siguiente forma.

1) Para $n = 1$, $|(a_{11})| = a_{11}$ (el determinante de una matriz de orden 1×1 es su único coeficiente).
2) Supuesto que sabemos calcular el determinante de matrices de orden $n-1$, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{in}\alpha_{in},$$

donde $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ se conoce como el adjunto de la entrada a_{ij}, con $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ la matriz que se obtiene al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima de A. Esta fórmula se conoce como Desarrollo de Laplace por la fila i del determinante de A, y el resultado no depende de i. Es más, también se puede desarrollar por cualquier columna. Dado j el Desarrollo de Laplace por la columna j es

$$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj}.$$

Se puede comprobar fácilmente que

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Ejercicio 45: Calcula el determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.

Ejercicio 46: Calcula el determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5).$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la matriz traspuesta de A es

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(K),$$

esto es, la matriz que se obtiene a partir de A intercambiando filas por columnas.

Propiedades de los determinantes. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

1) $|A| = |A^t|$.
2) Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de A se obtiene una nueva matriz cuyo determinante es $-|A|$.
3) Si multiplicamos todos los elementos de una fila (o de una columna) de A por $\alpha \in K$, obtenemos una matriz con determinante $\alpha|A|$.
4) Si a una fila de A le sumamos otra fila de A multiplicada por un elemento de K, entonces la nueva matriz tiene el mismo determinante que A (lo mismo ocurre si hacemos esta operación con columnas).

5) Si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, entonces $|AB| = |A||B|$.

Ejercicio 47: Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5).$$

El elemento neutro del producto en $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es la matriz identidad, que es la matriz que tiene todas sus entradas cero salvo en la diagonal que tiene unos (cero es el elemento neutro de K para la suma, y uno el neutro para el producto). A dicha matriz la denotamos por I_n, o simplemente I cuando n queda claro en el contexto.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es regular si tiene inversa para el producto, esto es, si existe B tal que $AB = BA = I_n$. En dicho caso, a la matriz B se le denota por A^{-1}.

La matriz adjunta de A es la matriz formada por los adjuntos de las entradas de A, a saber,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1} & a_{m2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Entonces A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$. En ese caso

$$A^{-1} = |A|^{-1}\overline{A}^t.$$

Ejercicio 48: Calcula la inversa de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

`Maxima 26:` Vamos a ilustrar algunos ejemplos de operaciones con matrices en `maxima`.

```
(%i1) A:matrix([x,y],[z,t]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

```
(%i2) B:matrix([a,b],[c,d]);
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Hay que tener cuidado con la operación de producto, pues en `maxima` dicha operación se hace como en con la suma, entrada a entrada. Para efectuar el producto usamos el punto.

```
(%i3) A.B;
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} c\,y + a\,x & d\,y + b\,x \\ a\,z + c\,t & b\,z + d\,t \end{pmatrix}$$

```
(%i4) A*B;
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} a\,x & b\,y \\ c\,z & d\,t \end{pmatrix}$$

Lo mismo ocurre con la exponenciación.

(%i5) `A^2;`

(%o5) $$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ z^2 & t^2 \end{pmatrix}$$

(%i6) `A^^2;`

(%o6) $$\begin{pmatrix} y\,z + x^2 & x\,y + t\,y \\ x\,z + t\,z & y\,z + t^2 \end{pmatrix}$$

(%i7) `determinant(A);`

(%o7) $$t\,x - y\,z$$

(%i8) `determinant(A.B)=determinant(A)*determinant(B);`

(%o8) $$(c\,y + a\,x)\,(b\,z + d\,t) - (d\,y + b\,x)\,(a\,z + c\,t) = (a\,d - b\,c)\,(t\,x - y\,z)$$

(%i9) `expand(%);`

(%o9) $$-a\,d\,y\,z + b\,c\,y\,z + a\,d\,t\,x - b\,c\,t\,x = -a\,d\,y\,z + b\,c\,y\,z + a\,d\,t\,x - b\,c\,t\,x$$

(%i10) `is(%);`

(%o10) $$true$$

(%i11) `A^^-1;`

(%o11) $$\begin{pmatrix} -\frac{t}{y\,z - t\,x} & \frac{y}{y\,z - t\,x} \\ \frac{z}{y\,z - t\,x} & -\frac{x}{y\,z - t\,x} \end{pmatrix}$$

(%i12) `C:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);`

(%o12) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(%i13) `determinant(C);`

(%o13) $$0$$

Para calcular determinantes a veces es más eficiente usar las operaciones que hemos visto anteriormente. Así efectuando operaciones elementales por filas o columnas (intercambio o suma por un factor de otra) podemos llegar a una matriz triangular superior, esto es, una matriz cuyas entradas por debajo de la diagonal son todas cero. A este proceso se le conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

(%i14) `triangularize(C);`

(%o14) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de una matriz de esta forma es trivial, pues sólo se multiplican los valores de la diagonal.

`Maxima 27:` Trabajemos ahora módulo 5.

```
(%i1) modulus:5$
(%i2) G:matrix([7,20],[16,47])$
(%i3) H:rat(G);
```

(%o3)/R/

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i4) determinant(H);
```

(%o4)/R/

$$-1$$

```
(%i5) I:invert(H);
```

(%o5)/R/

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) H.I;
```

(%o6)/R/

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Índice alfabético