Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

J. C. Rosales y P. A. García Sánchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Capítulo 8

Combinatoria

La combinatoria es la técnica de saber cuántos elementos tiene un conjunto sin necesidad de contarlos uno a uno.

1. Principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos

Si A_1 y A_2 son dos conjuntos, entonces $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$.

Maxima 55: Vamos a determinar, cuantos números entre 1 y 100 son, bien divisibles por 2, bien divisibles por 3.

Sean A_1 y A_2 los números que son múltiplos de 2 y 3 respectivamente. A_1 tiene cincuenta elementos (desde $2 \cdot 1$ hasta $2 \cdot 50$), mientras que A_3 tiene 33 (desde $3 \cdot 1$ hasta $3 \cdot 33$). Por otra parte, $A_1 \cap A_2$ son los múltiplos de 6, luego tiene 16 elementos (desde $6 \cdot 1$ hasta $6 \cdot 16$). Por tanto

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 33 - 16 = 67$$

```
(%i1) a:setify(makelist(i,i,1,100))$
(%i2) a1:subset(a,lambda([x],is(mod(x,2)=0)));
```

(%o2) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100\}$

```
(%i3) a2:subset(a,lambda([x],is(mod(x,3)=0)));
```

(%o3) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$

```
(%i4) is(length(union(a1,a2))=length(a1)+length(a2)-length(intersection(a1,a2)));
```

(%o4) true

2. Principio de inclusión-exclusión general

Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos, entonces

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \# \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} + \cdots + (-1)^n \# \bigcap_{k=1}^{n} A_j.$$

Maxima 56: Vamos a ver cuantos números entre 1 y 111 son compuestos (lo que nos dará inmediatamente cuántos números primos hay menores que 111).

Dado que $\sqrt{111} < 11$, se tiene que si un número menor o igual que 111 es compuesto, tiene un divisor primo menor que 11. Por tanto, será múltiplo de 2, múltiplo de 3, múltiplo de 5 o múltiplo de 7.

```
(%i1) a:setify(makelist(i,i,1,111))$
```

(%i2) `A1:subset(a,lambda([x],is(mod(x,2)=0)))$ a1:length(A1);`
(%o3) 55

(%i4) `A2:subset(a,lambda([x],is(mod(x,3)=0)))$ a2:length(A2);`
(%o5) 37

(%i6) `A3:subset(a,lambda([x],is(mod(x,5)=0)))$ a3:length(A3);`
(%o7) 22

(%i8) `A4:subset(a,lambda([x],is(mod(x,7)=0)))$ a4:length(A4);`
(%o9) 15

(%i10) `a12:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*3)=0))));`
(%o10) 18

(%i11) `a13:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*5)=0))));`
(%o11) 11

Ahora vamos con las intersecciones dos a dos. Al cardinal de $A_i \cap A_j$ lo llamamos a_{ij}.

(%i12) `a14:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*7)=0))));`
(%o12) 7

(%i13) `a23:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,3*5)=0))));`
(%o13) 7

(%i14) `a24:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,3*7)=0))));`
(%o14) 5

(%i15) `a34:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,7*5)=0))));`
(%o15) 3

Luego calculamos los cardinales de las intersecciones de tres en tres.

(%i16) `a123:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*3*5)=0))));`
(%o16) 3

(%i17) `a124:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*3*7)=0))));`
(%o17) 2

(%i18) `a134:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*5*7)=0))));`
(%o18) 1

(%i19) `a234:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,3*7*5)=0))));`
(%o19) 1

Y por último la intersección de todos.

(%i20) `a1234:length(subset(a,lambda([x],is(mod(x,2*3*5*7)=0))));`
(%o20) 0

(%i21)
```
is(length(union(A1,A2,A3,A4))=
a1+a2+a3+a4-a12-a13-a14-a23-a24-a34+a123+a124+a134+a234-a1234 );
```
(%o21) true

Es decir, entre 1 y 111 hay 81 números compuestos, de donde deducimos que hay 29 números primos (el 1 no es ni primo ni compuesto).

```
(%i22) length(subset(a,primep));
(%o22) 29
```

3. Principio del complementario

Si $A \subseteq X$, entonces $\#(X \setminus A) = \#X - \#A$.

Ejercicio 88: ¿Cuántos números de de tres cifras no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

4. Principio del producto

Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos entonces $\#(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \#A_i$.

Ejercicio 89: Las placas de matrícula de los vehículos de cierto país constan de 4 letras (elegidas entre 25) seguidas de 3 dígitos (en base 10). ¿ Cuántas placas de matrícula distintas se pueden formar?

5. Principio de las cajas (o de Dirichlet)

Si se distribuyen m objetos en n cajas, entonces existe una caja que contiene al menos $\lceil m/n \rceil$ objetos, y otra caja contiene a lo sumo $\lfloor m/n \rfloor$ objetos.

Ejercicio 90: ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que debe haber en una asignatura Álgebra para poder asegurar que al menos seis alumnos van a obtener la misma calificación? (calificaciones enteras de 0 a 10).

6. Variaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos. Una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ diremos que es simple si $\#\{a_1, \ldots, a_n\} = n$. ¿Cuántas n-uplas simples podemos formar con los elementos de A?

- Si $m < n$, ninguna.
- Si $m \geq n$, $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$.

Este número también coincide con el número de aplicaciones inyectivas de un conjunto de n elementos en un conjunto de m elementos.

Maxima 57: En una carrera participan 35 personas. El ganador recibe una medalla de oro, el segundo clasificado una medalla de plata y el tercer clasificado una medalla de bronce.

El número de formas diferentes en que se pueden repartir las medallas corresponde al número de variaciones sin repetición de 35 elementos, tomados de 3 en 3. Por tanto es $35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270$.

Para usar las funciones de combinatoria tenemos que cargar el paquete `functs`.

```
(%i2) load(functs)$
(%i3) permutation(35,3);
(%o3) 39270
```

Ejercicio 91: ¿Cuántos números de 3 cifras distintas podemos formar con los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9?

Ejercicio 92: ¿De cuántas formas se pueden sentar 4 personas en un microbús de 15 plazas?

7. Variaciones con repetición

Sea A un conjunto con m elementos. ¿Cuántas n-uplas podemos formar con los elementos de A? La respuesta es

$$V^R_{m,n} = m^n,$$

que también corresponde con el número de aplicaciones que existen de un conjunto de n elementos a otro de m.

Maxima 58: Para hacer una quiniela, debemos elegir una lista de 14 elementos entre los elementos de un conjunto con 3 (1, X, 2). Son por tanto, variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14. El número total de posibles apuestas es

```
(%i1) 3^12;
(%o1) 531441
```

Ejercicio 93: ¿Cuántos números de 3 cifras podemos construir utilizando los dígitos 1 y 2?

Ejercicio 94: ¿Cuántos polinomios tiene $\mathbb{Z}_5[x]$ de grado menor o igual que 2? ¿Cuántos son mónicos?

8. Permutaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos. ¿Cuántas m-uplas simples podemos formar con los elementos de A? El resultado es

$$P_m = m!,$$

y corresponde con el número de aplicaciones biyectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de m elementos. Es un caso particular de variación simple tomando $m = n$.

Maxima 59: Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, hay seis permutaciones en X que se corresponden con las seis formas de ordenar los elementos de X.

```
(%i1) permutations([1,2,3]);
(%o1) [1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]
```

Ejercicio 95: ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar cinco libros en una estantería?

9. Permutaciones con repetición

Sea A un conjunto con r elementos, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ enteros positivos con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = m$. ¿Cuántas m-uplas podemos formar con los elementos de A de manera que una coordenada se repita α_1 veces, otra α_2 veces y así hasta otra que se repita α_r veces?

$$P_m^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!}.$$

Maxima 60: Por ejemplo, nos preguntamos de cuántas formas podemos ordenar las letras de la palabra *cara*.

```
(%i1) permutations([c,a,r,a]);
(%o1) {[a,a,c,r],[a,a,r,c],[a,c,a,r],[a,c,r,a],[a,r,a,c],[a,r,c,a],
[c,a,a,r],[c,a,r,a],[c,r,a,a],[r,a,a,c],[r,a,c,a],[r,c,a,a]}
(%i2) length(%);
(%o2) 12
```

Ejercicio 96: ¿Cuántos números de 16 cifras se pueden formar con 3 unos, 5 doses y 8 treses?

10. Combinaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos. ¿Cuántos subconjuntos de cardinal m tiene A?

- Si $n > m$, ninguno.
- En caso contrario tiene

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Maxima 61: El número de subconjuntos con 2 elementos del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ es

```
(%i1) binomial(5,2);
```
(%o1) 10

```
(%i2) subset(powerset({a,b,c,d,e}),lambda([x],is(length(x)=2)));
```
(%o2) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$

```
(%i3) length(%);
```
(%o3) 10

Maxima 62: Supongamos que un departamento está formado por 7 mujeres y 9 hombres, y se quiere formar una comisión con cinco miembros, de forma que haya al menos un hombre y una mujer en la comisión. Determinemos cuántas posibles comisiones pueden formarse con esas condiciones.

Para esto, vemos en primer lugar que pueden formarse

```
(%i1) binomial(16,5);
```
(%o1) 4368

posibles comisiones con 5 miembros.

De ellas,

```
(%i2) binomial(9,5);
```
(%o2) 126

no contienen ninguna mujer (están formadas únicamente por hombres), mientras que

```
(%i3) binomial(7,5);
```
(%o3) 21

no contienen ningún hombre. Por tanto, como el número que buscamos es el complentario de aqullas que no tienen ni hombres ni mujeres, y estos conjuntos son disjuntos, el número posible de comisiones es $4368 - (126 + 21) = 4221$.

Ejercicio 97: Se extraen 5 cartas de una baraja de 40 ¿Cuántas combinaciones pueden obtenerse?

Ejercicio 98: Cierto club deportivo tiene 27 miembros, 15 de ellos son mujeres y 12 hombres. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de cuatro personas con paridad de género?

11. Combinaciones con repetición

Supongamos que disponemos de bolas de m colores (un número ilimitado de ellas) ¿Cuántas cajas distintas de n bolas podemos formar? La respuesta es

$$C^R_{m,n} = \binom{m+n-1}{n},$$

y corresponde con el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + \cdots + x_m = n$.

Maxima 63: Vamos a determinar cuantas soluciones naturales tiene la ecuación $x+y+z+t = 13$. Para resolverlo, planteamos el problema de otra forma. Supongamos que tenemos cuatro tipos de bolas (rojas, negras, blancas y azules), y extraemos trece bolas. Cada extracción la podemos identificar con una solución de la ecuación anterior, donde x es el número de bolas rojas, y es el número de bolas negras, z es el número de bolas blancas y t es el número de bolas azules.

El número de posibles extracciones es el número de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 13 en 13. Su valor es

```
(%i1)  binomial(16,3);
(%o1)  560
```

Supongamos ahora que queremos resolver la misma ecuación, pero queremos que las variables tomen valores mayores o iguales que 1. En ese caso, llamamos $x' = x - 1$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1$, $t' = t - 1$, con lo que la ecuación se transforma en $x' + y' + z' + t' = 9$, y están permitidas todas las soluciones naturales. El número de soluciones es

```
(%i3)  binomial(9+4-1,4-1);
(%o3)  220
```

Por tanto, de las 560 soluciones de la ecuación $x + y + z + t = 13$ hay 476 $(560 - 84)$ en las que alguna de las variables toma el valor cero.

Maxima 64: Tenemos cuatro jugadores, y repartimos cinco cartas a cada uno de una baraja de 40 cartas. Vamos a calcular de cuantas formas distintas se pueden repartir. Para esto, consideramos las cartas como las bolas, a las que hay que distribuir en 5 cajas: 4 por cada uno de los jugadores, y una quinta por las 20 cartas que quedan sin repartir.

Se trata entonces de distribuir 40 objetos distinguibles en cinco cajas también distinguibles, de forma que en las cuatro primeras haya 5 objetos y en la última haya 20. El número de formas de hacerlo es

```
(%i1)  40!/(5!*5!*5!*5!*20!);
(%o1)  1617318175088527591680

(%i2)  multinomial(40,[5,5,5,20]);
(%o2)  1617318175088527591680
```

Ejercicio 99: En una heladería venden helados de 20 sabores distintos. ¿Cuántas compras distintas de 12 helados pueden efectuarse?

Ejercicio 100: ¿Cuantas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ si imponemos que $x_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$?

Ejercicio 101: Se lanzan tres dados simultáneamente. ¿Cuántas jugadas distintas podemos obtener?

Teorema del binomio de Newton. Sea A un anillo conmutativo, y $a, b \in A$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Maxima 65: El coeficiente de a^7b^3 en $(a+b)^{10}$ es $\binom{7}{3} = 35$.

```
(%i1)   expand((a+b)^7);
```

(%o1) $b^7 + 7\,a\,b^6 + 21\,a^2\,b^5 + 35\,a^3\,b^4 + 35\,a^4\,b^3 + 21\,a^5\,b^2 + 7\,a^6\,b + a^7$

Maxima 66: El número 3 se puede expresar de $\binom{3+3-1}{3-1} = 10$ formas diferentes como suma de 3 números naturales. Éstas corresponden con los exponentes de las variables en el desarrollo de $(x+y+z)^3$.

```
(%i1)   expand((x+y+z)^3);
```

(%o1) $z^3 + 3\,y\,z^2 + 3\,x\,z^2 + 3\,y^2\,z + 6\,x\,y\,z + 3\,x^2\,z + y^3 + 3\,x\,y^2 + 3\,x^2\,y + x^3$

Ejercicio 102: Sea p un primo positivo. Demuestra que en $\mathbb{Z}_p$, $(a+b)^p = a^p + b^p$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Encuentra un m y dos enteros a y b de forma que $(a+b)^m$ y $a^m + b^m$ no sean iguales en $\mathbb{Z}_m$.

Índice alfabético