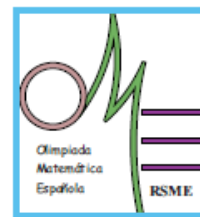




# 2ª Olimpiada Matemática de Andalucía

Granada, del 21 al 23 de febrero de 2020



## Problemas

1. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$nm = k(n + m)$$

donde  $n$  y  $m$  son números enteros y  $k$  es un número primo mayor o igual a 2.

2. Cuenta la leyenda que un velero pirata llegó a una remota isla perseguido por galeones españoles y, en ella, el capitán escondió el botín que llevaba a bordo, fruto de sus abordajes. Desembarcó, con sus secuaces, en una playa desierta donde había una palmera y una roca. Clavó en la playa su espada y, desde ella, caminó en línea recta hasta la palmera. Estando en ella giró  $90^\circ$  en sentido contrario de las agujas del reloj y anduvo (siempre en línea recta) la misma distancia anterior, en donde hincó una estaca. Volvió a la posición de la espada y caminó, también en línea recta, hasta la roca y, girando  $90^\circ$  en el sentido de las agujas del reloj, repitió la misma distancia, y del mismo modo, hasta un punto en donde clavó otra estaca. Buscó el punto medio entre las dos estacas y allí ordenó enterrar el tesoro. De inmediato mandó recoger la espada y las estacas para, así, proteger la situación exacta del tesoro. Volvió al barco con su tripulación y siguió con sus fechorías hasta que pasaron diez años. Entonces volvió a la isla y desenterró el tesoro. ¿Cómo consiguió localizar el tesoro con la ayuda, únicamente, de la situación de la palmera y de la roca, que aún permanecían allí?

3. Dado un triángulo  $\triangle OMA$ , en los lados  $OM$  y  $OA$  se construyen cuadrados (en el exterior del triángulo)  $OXYM$  y  $OAVU$ , respectivamente.

1. Prueba que el segmento  $XV$  mide el doble de la mediana trazada desde el vértice  $O$ .
2. Prueba que si la prolongación de la mediana corta al segmento  $XV$ , lo hace de forma perpendicular. (En realidad, las rectas que contienen a la mediana y al segmento  $XV$  son siempre perpendiculares.)

4. Se considera una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que verifica las propiedades

1.  $f(2n) = f(2n + 1) + 1$ ,
2.  $f(2n + 1) f(2(n + 1)) = 4n^2 + 6n$ ,
3.  $f(2020) = 2021$ .

Determina la expresión de  $f$ , esto es,  $f(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .