

Bloque B, para el viernes por la tarde.

Problema 1. Sean a , b , y c números reales. Prueba que si $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.

Solución:

Sean α , β , γ las raíces y supongamos $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + (-\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

Así pues, $a = -\alpha - \beta - \gamma$ y $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Ahora se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 - 3b &= (-\alpha - \beta - \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \\ &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \geq 0 \end{aligned}$$

Nota: El recíproco también es cierto en el sentido de que si $3b \leq a^2$, entonces existe algún número real c de forma que el polinomio tiene tres raíces reales. Se puede probar fácilmente usando derivadas, máximos y mínimos, etc.

Problema 2. Un cristalero dispone de una pieza de vidrio de forma triangular. Usando sus conocimientos de geometría, sabe que podría cortar de ella un círculo de radio r . Demuestra que, para cualquier número natural n , de la pieza triangular puede obtener n^2 círculos de radio $\frac{r}{n}$ (suponiendo que se puedan hacer siempre los cortes perfectos).

Solución:

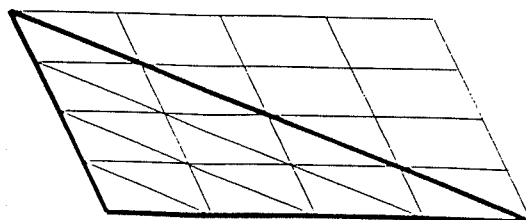
El círculo de mayor radio que se puede cortar de un triángulo viene determinado por la circunferencia inscrita. Del enunciado se deduce que el radio de la circunferencia inscrita del triángulo dado es mayor o igual que r .

Dividimos cada lado del triángulo en n partes iguales. Por cada uno de esos puntos trazamos las rectas paralelas a los otros dos lados. Se forman así n^2 triángulos iguales, semejantes al triángulo de partida y con razón de semejanza $\frac{1}{n}$. Obviamente, de cada uno de esos triangulitos podría cortarse

un círculo de radio $\frac{r}{n}$, puesto que el radio de su circunferencia inscrita es mayor o igual que ese valor.

La afirmación de que aparecen exactamente n^2 triangulitos se puede probar, por ejemplo, de la siguiente forma:

Se construye un paralelogramo con dos triángulos como el inicial, se divide cada lado en n partes iguales y se obtienen n^2 paralelogramos iguales mediante paralelas a los lados. Ahora, se divide cada uno de esos paralelogramos en dos triángulos iguales (y semejantes al inicial) mediante una diagonal. Véase el dibujo.



Problema 3. Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión?. Razona la respuesta.

Solución:

La respuesta es sí, pueden celebrar las cuatro reuniones de modo que al final cada persona haya estado sentada junto a otras dos diferentes cada vez. Para demostrarlo, consideramos las siguientes cuatro formas de ordenar los números del 1 al 9, que representan cuatro maneras de sentarse alrededor de la mesa comenzando en un lugar y siguiendo el giro de las agujas del reloj:

Primera reunión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Segunda reunión: 1, 3, 5, 7, 9, 4, 6, 2, 8

Tercera reunión: 1, 4, 7, 3, 8, 5, 2, 9, 6

Cuarta reunión: 1, 5, 9, 3, 6, 8, 4, 2, 7

Bloque C, para el sábado por la mañana.

Problema 1. Consideramos el conjunto $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ de los números naturales y la aplicación $f: N \rightarrow N$ que cumple las dos siguientes condiciones:

- a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in N$.
b) $f(f(n+1)) = \begin{cases} n-1, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n+3, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Determina el valor de $f(n)$ para cada $n \in N$ observando previamente que f es biyectiva y que, al no ser nunca $f(f(n)+1) = 2$, tiene que ser $f(1) = 2$.

Solución:

Por la condición a), es obvio que f es biyectiva. Y, como por la condición b) se observa que nunca es $f(f(n)+1) = 2$, forzosamente tendrá que ser 2 la imagen del único elemento que no es de la forma $f(n)+1$, o sea de 1: $f(1) = 2$. Y de nuevo por a), $f(2) = 1$.

Vamos a probar, por inducción sobre n , que

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Para $n = 1$ y para $n = 2$ ya está visto. Supongamos $n > 2$.

Por hipótesis de inducción, se tiene

$$f(n-1) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ n-2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y también

$$f(n-2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora,

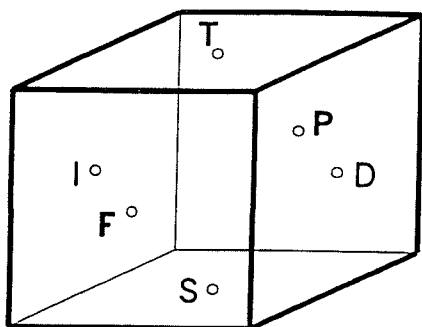
$$\begin{aligned} f(n) &= \begin{cases} f(f(n-2)+1), & \text{si } n \text{ es impar} \\ f(f(n-1)) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n-2+3 = n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 2. Consideramos los siguientes 27 puntos de un cubo: el centro (1), los centros de las caras (6), los vértices (8) y los centros de las aristas (12). Coloreamos cada uno de esos puntos de azul o de rojo. ¿Puede hacerse de modo que no haya tres puntos del mismo color alineados? Demuéstralo.

Solución:

La respuesta es no. Para demostrarlo, llamaremos a los puntos centrales de las caras de la siguiente forma: F-frontal, P-posterior, I-izquierda, D-derecha, T-tapa y S-suelo; en donde el nombre representa la situación respecto a un observador que mira el cubo desde un punto exterior situado frente a la cara frontal. El punto medio de cada arista lo denotaremos con las dos letras de los

centros de las dos caras a las que limita esa arista: FT, FI, FD, FS, IT, IP, IS, DT, DP, DS, PT, PS. Cada vértice lo denotamos con las tres letras de los centros de las tres caras que concurren en ese vértice: FTD, FTI, DTP, ITP, FSD, FSI, DSP, ISP. El centro del cubo lo denotamos C. Para indicar que un punto lo hemos coloreado de azul, respectivamente de rojo, escribiremos el nombre del punto seguido de (a), respectivamente (r).



Supondremos que no hay tres puntos alineados del mismo color y llegaremos a una contradicción. No hay problema en suponer que el centro es azul: C(a). (De manera análoga se razonaría si fuera rojo.) Eso obliga a que de cada dos caras opuestas al menos una tenga el centro rojo. En consecuencia, habrá tres caras con centro rojo y concurrentes en un vértice. Podemos suponer, por tanto, que tenemos F(r), T(r) y D(r). Ahora, distinguiamos dos posibilidades:

Caso 1: FTD(r). Lo cual implica ITP(a) y por tanto, alineando con el centro, FSD(r). De la misma forma, FTD(r) implica DSP(a) y por tanto FTI(r). Hemos llegado a la contradicción FSD(r), F(r), FTI(r).

Caso 2: FTD(a). Si FT(r), entonces PT(a) y FS(a); se tiene, por tanto, la contradicción FS(a), C(a), PT(a). Así pues, ha de ser FT(a). De la misma forma, DT(a). Ahora, FTD(a) y FT(a) implica FTI(r); análogamente, FTD(a) y DT(a) implica DTP(r). Y hemos llegado a la contradicción FTI(r), T(r), DTP(r).

Problema 3. Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad?. ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 999 escalones?.

Es fácil observar que el primer año va a moverse entre los escalones 1 y 36. Este, el 36, lo alcanza el día 31 de julio. El 31 de diciembre de ese año, llegará al escalón 3. En general, si un 31 de diciembre está en el escalón n , el año siguiente:

se mueve entre los escalones $n + 1$ y $n + 36$ y termina en el $n + 3$, si ese año siguiente no es bisiesto, o bien:

se mueve entre los escalones $n + 1$ y $n + 35$ y termina en el $n + 2$ si ese año siguiente es bisiesto.

Con unas cuentas sencillas, vemos que el 31 de diciembre de 2024 llegará al escalón 66, tras haber pasado el 31 de julio de ese mismo año por el escalón 99 como punto más elevado. A partir de ahí, se observa lo siguiente respecto al año 2025: el 31 de enero termina en el escalón 97, el 28 de febrero en el 69, y el 31 de marzo, por fin en el 100. Si la escalera hubiera tenido un peldaño menos, habría quedado en libertad 8 meses antes, el 31 de julio de 2024.

Http://www.ngr.es/local/olimpiada