27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Lleida, 8–11 de abril de 2003

OBTENCIÓN DE PROCESOS DE DIFUSIÓN NO HOMOGÉNEOS A PARTIR DE ESQUEMAS DISCRETOS

R. Gutiérrez[1], N. Rico[1], P. Román [1], D. Romero[1] y F. Torres[1]

[1]Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada, 18071 Granada, España
E-mail: rgjaimez@ugr.es, nrico@ugr.es, proman@ugr.es,
deromero@ugr.es, fdeasis@ugr.es.

RESUMEN

En este artículo se extiende el método de obtención de un proceso de difusión homogéneo cómo límite de un recorrido aleatorio cuando los saltos y los intervalos de tiempo entre saltos tienden a cero, al caso de procesos de difusión no homogéneos. En este caso se parte de esquemas discretos más generales en los que las probabilidades de transición dependen del instante de tiempo y del estado de partida. Se aplica dicho método a la obtención del proceso de difusión no homogéneo tratado por Gutiérrez et al. (2003).

Palabras y frases clave: Procesos de difusión no homogéneos, recorridos aleatorios.
Clasificación AMS: 60G07.

1. Introducción

La idea de obtener un proceso de difusión como límite de un recorrido aleatorio no es nueva. Por ejemplo, en Cox y Miller (1965) o Ricciardi (1977) se muestra como derivar ecuaciones de difusión como límites de recorridos aleatorios, para lo cual se parte de un recorrido aleatorio simple X_n definido por la ecuación

$$\begin{aligned} &X_{n+1} = X_n + Z_n \ ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &X_0 = 0, \end{aligned}$$

donde las variables Z_n son independientes e idénticamente distribuidas, tomando los valores 1 y -1 con probabilidades p y $q = 1 - p$ respectivamente $(0 < p < 1)$, extendiéndose posteriormente al caso en que los intervalos de tiempo entre saltos sean de amplitud τ y los desplazamientos en sentido positivo o negativo sean de amplitud δ, esto es

$$\begin{aligned}&X_{(n+1)\tau} = X_{n\tau} + Z_{n\tau} \ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &X_0 = 0,\end{aligned}$$

con $Z_{n\tau}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que

$$\begin{aligned}&P[Z_n = \delta] = p \\ &P[Z_n = -\delta] = q = 1 - p \ ; \quad \delta > 0.\end{aligned}$$

Se puede probar que las ecuaciones que regulan sus probabilidades de transición convergen, cuando $n \to \infty$, $\delta \to 0$ y $\tau = 0$, de modo que $n\tau = t$, a las ecuaciones de difusión para el proceso Wiener con media infinitesimal μ y varianza infinitesimal σ^2.
Este caso se refiere a un recorrido aleatorio simple cuyas probabilidades de paso son independientes del espacio de estados, asegurando esto que las ecuaciones de la difusión límite tengan media y varianza infinitesimales constantes.
En general, se pueden obtener ecuaciones de difusión cuyos coeficientes dependan de la variable de estado sin más que considerar recorridos aleatorios caracterizados por pasos dependientes del estado,

$$\begin{aligned}&P[Z_{n\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] = \theta(k\delta) \\ &P[Z_{n\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] = \phi(k\delta) \\ &P[Z_{n\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] = 1 - \theta(k\delta) - \phi(k\delta).\end{aligned}$$

De esta forma, partiendo de este recorrido aleatorio se obtiene, cuando $\delta \to 0$ y $\tau \to 0$, un proceso de difusión $X(t)$ con momentos infinitesimales que verifican

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{A_2(x)}{2\delta^2}\tau + \frac{A_1(x)}{2\delta}\tau \\ \phi(x) &= \frac{A_2(x)}{2\delta^2}\tau - \frac{A_1(x)}{2\delta}\tau.\end{aligned}$$

En este trabajo se propone una generalización de este método al caso de procesos de difusión no homogéneos. Para ello el punto de partida será un esquema discreto en lugar de un recorrido aleatorio debido a que las probabilidades de transición del esquema discreto no van a depender sólamente del estado sino también del tiempo.
Para concluir se aplica el método propuesto para la obtención del proceso de difusión no homogéneo tratado por Gutiérrez et al. (2003).

2. Extensión del método

Como se ha comentado en la sección anterior, siguiendo el mismo esquema planteado y con el objeto de obtener procesos de difusión no homogéneos, se parte de un esquema discreto donde las probabilidades de paso dependen, no sólo del estado, sino también del tiempo. Así pues se considera el modelo discreto

$$\begin{array}{l} X_{(n+1)\tau} = X_{n\tau} + Z_{n\tau} \ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ X_0 = 0 \end{array} \tag{1}$$

donde $Z_{n\tau}$ son variables aleatorias independientes verificando

$$\begin{aligned} &P[Z_{n\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] = \theta(k\delta, n\tau) \\ &P[Z_{n\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] = \phi(k\delta, n\tau) \\ &P[Z_{n\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] = 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau). \end{aligned}$$

Debe destacarse que este modelo no corresponde a un recorrido aleatorio puesto que las variables $Z_{n\tau}$ no están idénticamente distribuidas.
Notando

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P[X_{(n+m)\tau} = k\delta | X_{m\tau} = j\delta],$$

se tiene

$$\begin{aligned} P_{j,k}^{(m,n)} = {} & P_{j,k-1}^{(m,n-1)} \theta((k-1)\delta, (n+m-1)\tau) + P_{j,k+1}^{(m,n-1)} \phi((k+1)\delta, (n+m-1)\tau) \\ & + P_{j,k}^{(m,n-1)} \left[1 - \theta(k\delta, (n+m-1)\tau) - \phi(k\delta, (n+m-1)\tau)\right]. \end{aligned}$$

Sea $f(x, t|y, s)\delta$ la probabilidad de que el proceso tome un valor en el intervalo $(x - \delta/2, x + \delta/2)$ en el instante de tiempo t si parte del estado y en el instante de tiempo s. Entonces, a tenor de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} & f(k\delta, (n+m)\tau | j\delta, m\tau)\delta = \\ & \ \theta((k-1)\delta, (n+m-1)\tau) f((k-1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta \\ & \ \ + \phi((k+1)\delta, (n+m-1)\tau) f((k+1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta \\ & \ \ + \left[1 - \theta(k\delta, (n+m-1)\tau) - \phi(k\delta, (n+m-1)\tau)\right] f(k\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Tomando $x = k\delta$, $t = (m+n)\tau$, $y = j\delta$, $s = m\tau$ y sustituyéndolo en (2) se tiene

$$\begin{aligned} f(x, t|y, s) = {} & \theta(x - \delta, t - \tau) f(x - \delta, t - \tau | y, s) + \phi(x + \delta, t - \tau) \\ & \times f(x + \delta, t - \tau | y, s) + (1 - \theta(x, t - \tau) - \phi(x, t - \tau)) \\ & \times f(x, t - \tau | y, s). \end{aligned} \tag{3}$$

Sea $X(t)$ el proceso límite obtenido a partir de $X_{n\tau}$ al tomar límites cuando $\tau \to 0$ y $\delta \to 0$, y

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} E[X(t+\tau) - X(t) | X(t) = x] \\ A_2(x, t) &= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} E[(X(t+\tau) - X(t))^2 | X(t) = x] \end{aligned}$$

sus momentos infinitesimales. Dado que

$$\frac{1}{\tau}\,E[X_{(n+1)\tau}-X_{n\tau}|X_{n\tau}=x]=\frac{1}{\tau}\,E[Z_{(n+1)\tau}|X_{n\tau}=x]=\frac{\delta}{\tau}\,[\theta(x,n\tau)-\phi(x,n\tau)]$$
$$\frac{1}{\tau}\,E[(X_{(n+1)\tau}-X_{n\tau})^2|X_{n\tau}=x]=\frac{1}{\tau}\,E[Z^2_{(n+1)\tau}|X_{n\tau}=x]=\frac{\delta^2}{\tau}\,[\theta(x,n\tau)+\phi(x,n\tau)]$$

habrá que exigir que en el límite, cuando $\tau\to 0$ y $\delta\to 0$ ($n\tau=t$), dichas expresiones coincidan con $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$

$$A_1(x,t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\delta}{\tau}\,[\theta(x,n\tau)-\phi(x,n\tau)]$$
$$A_2(x,t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\delta^2}{\tau}\,[\theta(x,n\tau)+\phi(x,n\tau)]\ .$$

Tal condición se verifica si se toma

$$\begin{aligned}\theta(x,n\tau)&=\frac{A_2(x,n\tau)}{2\delta^2}\tau+\frac{A_1(x,n\tau)}{2\delta}\tau\\ \phi(x,n\tau)&=\frac{A_2(x,n\tau)}{2\delta^2}\tau-\frac{A_1(x,n\tau)}{2\delta}\tau\ .\end{aligned}\tag{4}$$

A continuación veamos que, a partir de (3) se obtiene una ecuación en derivadas parciales de la que $f(x,t|y,s)$ es solución.

Comencemos desarrollando por Taylor en x y t cada uno de los sumandos del lado derecho de (3)

- $\theta(x-\delta,t-\tau)f(x-\delta,t-\tau|y,s)=$
$$=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^n\delta^i\tau^j}{i!j!}\left[\sum_{k=0}^{i}\sum_{m=0}^{j}\binom{i}{k}\binom{j}{m}\frac{\partial^{k+m}f(x,t|y,s)}{\partial x^k\partial t^m}\frac{\partial^{n-k-m}\theta(x,t)}{\partial x^{i-k}\partial t^{j-m}}\right]$$
- $\phi(x+\delta,t-\tau)f(x+\delta,t-\tau|y,s)$
$$=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j\delta^i\tau^j}{i!j!}\left[\sum_{k=0}^{i}\sum_{m=0}^{j}\binom{i}{k}\binom{j}{m}\frac{\partial^{k+m}f(x,t|y,s)}{\partial x^k\partial t^m}\,\frac{\partial^{n-k-m}\phi(x,t)}{\partial x^{i-k}\partial t^{j-m}}\right]$$
- $f(x,t-\tau|y,s)=\sum_{j}\frac{(-1)^j\tau^j}{j}\,\frac{\partial^j f(x,t|y,s)}{\partial t^j}$
- $\theta(x,t-\tau)f(x,t-\tau|y,s)=$
$$=\sum_{j}\frac{(-1)^j\tau^j}{j!}\left[\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\frac{\partial^m f(x,t|y,s)}{\partial t^m}\,\frac{\partial^{j-m}\theta(x,t)}{\partial t^{j-m}}\right]$$
- $\phi(x,t-\tau)f(x,t-\tau|y,s)=$
$$=\sum_{j}\frac{(-1)^j\tau^j}{j!}\left[\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\frac{\partial^m f(x,t|y,s)}{\partial t^m}\,\frac{\partial^{j-m}\phi(x,t)}{\partial t^{j-m}}\right].$$

Sustituyendo en (3) se obtiene

$$\tau\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial t^2} - \delta\frac{\partial}{\partial x}\left[(\theta(x,t)-\phi(x,t))f(x,t|y,s)\right]$$
$$+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(\theta(x,t)+\phi(x,t))f(x,t|y,s)\right] + \delta\tau\left[f(x,t|y,s)\left(\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x\partial t}\right)\right.$$
$$+\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial x\partial t}(\theta(x,t)-\phi(x,t))\right]+\ldots$$

Por último, dividiendo por τ, tomando límite cuando $\tau\to 0$ y $\delta\to 0$ y teniendo en cuenta (4) se obtiene

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x,t)f(x,t|y,s)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_2(x,t)f(x,t|y,s)\right],$$

que es la ecuación adelantada o de Fokker-Planck asociada a un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ que dependen del espacio de estados y del instante t, esto es, un proceso de difusión no homogéneo.
Si se desea obtener la ecuación atrasada o de Kolmogorov del proceso límite, se debe seguir un desarrollo análogo al anterior partiendo de

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P_{j+1,k}^{(m+1,n-1)}\theta(j\delta,m\tau)+P_{j-1,k}^{(m+1,n-1)}\phi(j\delta,m\tau)+P_{j,k}^{(m+1,n-1)}$$
$$\times\left[1-\theta(j\delta,m\tau)-\phi(j\delta,m\tau)\right],$$

obteniéndose

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s}+\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial y}A_1(y,s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2}A_2(y,s)=0\ .$$

3. Aplicación

Consideremos el proceso de difusión no homogéneo tratado por Gutiérrez et al. (2003), que viene determinado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x,t) = m(t)x-\beta(t)x\ln x$$
$$A_2(x,t) = \sigma^2x^2 \qquad \sigma>0,$$

con $m(t)$y $\beta(t)$ funciones continuas y positivas. Este proceso puede ser obtenido mediante el proceso descrito anteriormente tomando

$$\theta(x,t) = \left[\frac{\sigma^2x^2}{2\delta^2}+\frac{m(t)x-\beta(t)x\ln x}{2\delta}\right]\tau$$
$$\phi(x,t) = \left[\frac{\sigma^2x^2}{2\delta^2}-\frac{m(t)x-\beta(t)x\ln x}{2\delta}\right]\tau$$

es decir, basta partir del modelo (1) con

$$P[Z_{n\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] = \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} + \frac{(m(n\tau) - \beta(n\tau)\ln(k\delta))\ k}{2} \right] \tau$$
$$P[Z_{n\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] = \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} - \frac{(m(n\tau) - \beta(n\tau)\ln(k\delta))\ k}{2} \right] \tau$$
$$P[Z_{n\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] = 1 - \sigma^2 k^2 \tau.$$

Nótese que han de cumplirse adicionalmente las hipótesis

$$|m(n\tau) - \beta(n\tau)\ln(k\delta)| \leq j\sigma^2, \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$
$$\sigma^2 j^2 < \frac{1}{\tau},$$

para que θ y ϕ estén sean positivas y verifiquen $\theta(k\delta, n\tau) + \phi(k\delta, n\tau) \leq 1$.

4. Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Proyecto de Investigación BFM 2002-03633.

Referencias

Cox, D. R. y Miller, H. D. (1965). The theory of stochastic processes. Wiley.

R. Gutiérrez, N. Rico, P. Román, D. Romero y F. Torres (2003). Obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de modelos de crecimiento. *Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.*

Ricciardi, L. M. (1977). Diffusion processes and related topics in Biology. Springer-Verlag.