27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Lleida, 8–11 de abril de 2003

OBTENCIÓN DE UN PROCESO DE DIFUSIÓN NO HOMOGÉNEO A PARTIR DE MODELOS DE CRECIMIENTO

R. Gutiérrez[1], N. Rico[1], P. Román[1], D. Romero[1], F. Torres[1]

[1]Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada, 18071 Granada, España
E-mail: rgjaimez@ugr.es, nrico@ugr.es, proman@ugr.es,
deromero@ugr.es, fdeasis@ugr.es.

RESUMEN

En este artículo se propone la obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de modelos de crecimiento aleatorios con fecundidad diferencial por unidad de tiempo dependiente del tiempo. El proceso de difusión obtenido es la versión no homogénea del proceso propuesto por Capocelli y Ricciardi (1974) para el estudio de la ley de crecimiento logística y contiene como caso particular al proceso lognormal con factores exógenos.

Palabras y frases clave: Procesos de difusión no homogéneos, modelos de crecimiento.
Clasificación AMS: 60G07

1. Introducción

Los procesos de difusión se han empleado con frecuencia en diversos campos de aplicación para la modelización y estudio de variables que evolucionan en el tiempo. Entre este tipo de procesos se puede destacar el proceso logarítmico normal, asociado al modelo de crecimiento malthusiano y que presenta una tendencia de tipo exponencial. Este modelo resulta ser una buena aproximación para describir situaciones tales como el crecimiento de bacterias en un ambiente sin restricciones, en el que cada individuo tiene la misma probabilidad de morir o de reproducirse en cada instante de tiempo.
Sin embargo, en numerosas ocasiones, existe un límite natural para el número de individuos que pueden sobrevivir en un cierto ambiente, en cuyo caso el modelo propuesto no es válido. En tales situaciones es necesario recurrir a modelos de crecimiento asociados a curvas acotadas como, por ejemplo, la curva logística. Capocelli

y Ricciardi (1974) propusieron, en principio, dos modelos estocásticos distintos asociados a la curva logística, pero el hecho de no conocerse solución explícita para las ecuaciones de difusión de dichos procesos, los motivó a proponer un nuevo proceso estocástico de crecimiento cuyo interés reside en que, por una parte, el proceso retiene las principales características de los dos procesos asociados al crecimiento logístico, ya que tiene asociado un modelo determinístico de crecimiento muy similar y, por otro lado, puede ser resuelto explícitamente. Este proceso viene determinado por los momentos infinitesimales

$$\begin{array}{rcl} A_1(x) &=& mx - \beta x \ln(x); \quad m \in \mathbb{R}, \beta > 0 \\ A_2(x) &=& \sigma^2 x^2; \quad \sigma > 0. \end{array}$$

Nótese que el proceso de difusión lognormal se obtiene a partir del proceso propuesto cuando $\beta = 0$.

Por otra parte, en numerosas ocasiones la tendencia observada de un proceso se desvía ligeramente de la tendencia teórica esperada del mismo, por lo que se hace preciso corregir estas desviaciones a la hora de modelizar las observaciones mediante un proceso de difusión. Surge así la necesidad de considerar una versión no homogénea del proceso incluyendo, en su media infinitesimal, influencias externas al proceso, variables exógenas, que controlen estas desviaciones de la tendencia y cuya evolución en el tiempo es conocida. En ocasiones, estas variables externas al proceso se pueden considerar como variables controlables por el investigador de forma que, según el proceso se desarrolla, se podrá influir en su comportamiento en la medida en que se pueda influir en las variables exógenas.

En concreto, para modelizar el caso de crecimiento exponencial pero con desviaciones, surge el proceso lognormal con factores exógenos, estudiado por Tintner y Sengupta (1972).

Es interesante, pues, el estudio de procesos asociados a la curva de crecimiento logística que incluyan en su media infinitesimal factores exógenos y en concreto, la consideración del proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$\begin{array}{rcl} A_1(x) &=& m(t)x - \beta(t) x \ln(x); \quad m, \beta \text{ continuas } (\beta \text{ positiva}) \\ A_2(x) &=& \sigma^2 x^2; \quad \sigma > 0. \end{array}$$

Dicho proceso es la versión no homogénea del propuesto por Capocelli y Ricciardi (1974), pudiéndose obtener a partir de él ($\beta(t) = 0$) el proceso lognormal con factores exógenos.

En este artículo estudiamos la obtención de dicho proceso como límite de modelos de crecimiento aleatorios con fecundidad diferencial por unidad de tiempo dependiente del tiempo.

2. Planteamiento de los modelos de crecimiento

Consideremos un modelo estocástico de crecimiento de poblaciones del tipo

$$\begin{aligned} Y_{(n+1)\tau} &= W_{n\tau} Y_{n\tau}; \quad n = 0, 1, \ldots \\ Y_0 &= x_0 \end{aligned}$$

en el que $Y_{n\tau}$ representa el tamaño de la población en la n-ésima generación, τ el intervalo de tiempo entre sucesivas generaciones, valor que se hará tender a cero posteriormente, y $W_{n\tau}$ la fecundidad en el instante de tiempo $n\tau$, que se modelizará, para $n = 1, 2, \ldots$, mediante una sucesión de variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas (dado que el proceso límite resultante es no homogéneo) de forma que la fecundidad diferencial por unidad de tiempo es de la forma

$$\frac{1}{\tau} \frac{Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau}}{Y_{n\tau}} = \alpha(n\tau) - \beta(n\tau) \ln(Y_{n\tau}). \tag{1}$$

La idea es que, partiendo del modelo malthusiano, en el que la fecundidad diferencial por unidad de tiempo se considera constante, se generaliza al caso de que la fecundidad sea igual a una función continua dependiente del tiempo, dando lugar al proceso lognormal con factores exógenos. El proceso de difusión propuesto por Capocelli y Ricciardi (1974) se obtendrá considerando la fecundidad diferencial por unidad de tiempo una función lineal del logaritmo de la densidad y la extensión al caso no homogéneo es la que aquí se plantea.
Dicho modelo se puede escribir como

$$\begin{aligned} Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} &= \alpha(n\tau)\tau Y_{n\tau} - \beta(n\tau)\tau Y_{n\tau} \ln(Y_{n\tau}); \quad n = 0, 1, \ldots \\ Y_0 &= x_0 \end{aligned}$$

al que nos referiremos en lo siguiente como **Modelo I**.
A partir de (1), tomando límites cuando $n \to \infty$ y $\tau \to 0$, bajo la condición $n\tau = t$ constante, se obtiene la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \alpha(t)X(t) - \beta(t)X(t) \ln(X(t)) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$X(t) = \exp\left(\ln(x_0) e^{-B(t)} + e^{-B(t)} \int_0^t \alpha(v) e^{B(v)} dv \right) \tag{2}$$

donde

$$B(t) = \int_0^t \beta(u) du.$$

Discretizando (2) se obtiene el que llamaremos **Modelo II**

$$\frac{X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}}{X_{n\tau}} = \left[X_{n\tau}^{\exp(B(n\tau)-B((n+1)\tau))-1} \exp\left(e^{-B((n+1)\tau)} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \alpha(v) e^{B(v)} dv \right) - 1 \right].$$

Ahora bien, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lambda_n \in (n\tau, (n+1)\tau)$ tal que

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \alpha(v) e^{B(v)} = \alpha(\lambda_n) e^{B(\lambda_n)} \tau \quad , \tag{3}$$

con lo que el Modelo II se puede escribir como

$$\frac{X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}}{X_{n\tau}} = \left[X_{n\tau}^{\exp(B(n\tau)-B((n+1)\tau))-1} \exp\left(e^{-B((n+1)\tau)} \alpha(\lambda_n) e^{B(\lambda_n)} \tau \right) - 1 \right].$$

Probaremos que, a partir de estos dos modelos (**Modelo I** y **Modelo II**), introduciendo ambiente aleatorio, se obtienen en el límite dos procesos de difusión diferentes con una relación entre sus momentos infinitesimales, pero referidos al mismo modelo de crecimiento y que se unifican en el proceso de difusión no homogéneo propuesto. La introducción de ambiente aleatorio se basa en este caso en la consideración de la función α aleatoria. Para ello se toman dos sucesiones de variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas, $\{Z_{n\tau}\}$ con media $\alpha(n\tau)\tau$ para el modelo I y $\{Z^*_{n\tau}\}$, con media $\alpha(\lambda_n)\tau$ para el modelo II. (Notemos que, en el límite, serán equivalentes ya que $\lambda_n \in (n\tau, (n+1)\tau)$ es el valor que verifica, para cada $n \in \mathbb{N}$ (3) y cuando $n \to \infty$ y $\tau \to 0$ bajo la condición $n\tau = t$ entonces $\lambda_n \to t$).

3. Modelo I con ambiente aleatorio

Para introducir ambiente aleatorio en este modelo consideramos una sucesión de variables aleatorias independientes $\{Z_{n\tau}\}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \\ P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma}. \end{aligned}$$

cuyos momentos no centrados son

$$\begin{aligned} E[Z_{n\tau}] &= \alpha(n\tau)\tau \\ E[Z_{n\tau}^2] &= \sigma^2\tau \\ E[Z_{n\tau}^{2+p}] &= o(\tau);\ \forall p > 0. \end{aligned}$$

Al sustituir en el **Modelo I** se obtiene

$$Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} = Z_{n\tau} Y_{n\tau} - \beta(n\tau)\tau Y_{n\tau} \ln(Y_{n\tau}); \quad n = 1, 2, \ldots$$

Los momentos de los incrementos del proceso $Y_{n\tau}$, tras una generación, por unidad de tiempo, condicionados a $Y_{n\tau} = x$ son

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}E[Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau}|Y_{n\tau} = x] &= \alpha(n\tau)x - \beta(n\tau)x\ln(x) \\
\frac{1}{\tau}E[(Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau})^2|Y_{n\tau} = x] &= x^2\sigma^2 + (\beta(n\tau))^2\tau x^2(\ln(x))^2 - \\
&\quad -2\beta(n\tau)\tau x^2\ln(x)\alpha(n\tau) \\
\frac{1}{\tau}E[(Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau})^{2+p}|Y_{n\tau} = x] &= \frac{o(\tau)}{\tau}; \quad p > 0
\end{aligned}$$

de forma que, cuando $n \to \infty$ y $\tau \to 0$ con la condición de que $n\tau = t$, $Y_{n\tau}$ converge a un proceso de difusión no homogéneo $Y(t)$ con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned}
A_1(x,t) &= \alpha(t)x - \beta(t)x\ln(x) \\
A_2(x,t) &= \sigma^2x^2.
\end{aligned}$$

4. Modelo II con ambiente aleatorio

Para introducir ambiente aleatorio en este modelo consideramos una sucesión de variables aleatorias independientes, $\{Z^*_{n\tau}\}$, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
P[Z^*_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \\
P[Z^*_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}
\end{aligned}$$

cuyos momentos no centrados son

$$\begin{aligned}
E[Z^*_{n\tau}] &= \alpha(\lambda_n)\tau \\
E[Z^{*\,2}_{n\tau}] &= \sigma^2\tau \\
E[Z^{*\,2+p}_{n\tau}] &= o(\tau); \quad p > 0.
\end{aligned}$$

La expresión del **Modelo II** con ambiente aleatorio es

$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = X_{n\tau}\left[X_{n\tau}^{(e^{B(n\tau)-B((n+1)\tau)}-1)}\exp\left(e^{-B((n+1)\tau)}Z^*_{n\tau}e^{B(\lambda_n)}\right) - 1\right].$$

Para el cálculo de los momentos de los incrementos del proceso tras una generación, por unidad de tiempo, condicionados a que $X_{n\tau} = x$, se definen las siguientes variables aleatorias

$$\xi_{n\tau} = X_{n\tau}^{(e^{B(n\tau)-B((n+1)\tau)}-1)}\exp\left(e^{-B((n+1)\tau)}Z^*_{n\tau}e^{B(\lambda_n)}\right)|X_{n\tau} = x$$

Se tiene

- $P[\xi_{n\tau} = x^{(e^{B(n\tau)-B((n+1)\tau)}-1)} \exp\left(e^{-B((n+1)\tau)}\sigma\sqrt{\tau}e^{B(\lambda_n)}\right)] =$
  $= P[Z^*_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}$
- $P[\xi_{n\tau} = x^{(e^{B(n\tau)-B((n+1)\tau)}-1)} \exp\left(-e^{-B((n+1)\tau)}\sigma\sqrt{\tau}e^{B(\lambda_n)}\right)] =$
  $= P[Z^*_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}$

con lo que

$$E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^k | X_{n\tau} = x] = x^k E[(\xi_{n\tau} - 1)^k] = x^k \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} E[\xi^l_{n\tau} - 1]$$

Calculemos

$$\begin{aligned} E[\xi^l_{n\tau}] &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}\right) x^{l\left(\exp\left(-\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds\right)-1\right)} \times \\ &\times \exp\left(l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}\right) \times \\ &\times x^{l\left(\exp\left(-\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds\right)-1\right)} \exp\left(-l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right) = \\ &= x^{l\left(\exp\left(-\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds\right)-1\right)} \left(\cosh\left(l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{\sigma} \operatorname{senh}\left(l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right)\right) \end{aligned}$$

con $n\tau < \lambda_n < (n+1)\tau$, esto es, $\lambda_n = \tau(n + k_n)$, $k_n \in (0,1)$, y teniendo en cuenta

- $l\sigma\sqrt{\tau}\exp\left(-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds\right) = l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\beta(\theta_n)((n+1)\tau-\lambda_n)} = l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\beta(\theta_n)\tau(1-k_n)} =$
  $= l\sigma\sqrt{\tau}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{1}{m!}\beta(\theta_n)^m\tau^m(1-k_n)^m$
  con $\theta_n \in (\lambda_n, (n+1)\tau)$.

- $x^{l\left[\exp\left(-\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds\right)-1\right]} = e^{l(e^{-\beta(\psi_n)\tau}-1)\ln(x)} = e^{l(-\beta(\psi_n)\tau+o(\tau))\ln(x)} =$
  $= 1 - l\beta(\psi_n)\tau\ln(x) + o(\tau)$
  con $\psi_n \in (n\tau, (n+1)\tau)$.

y

$$\begin{aligned}
\cosh\left(l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right) &= 1 + \frac{l^2\sigma^2\tau}{2} + o(\tau)\\
\operatorname{senh}\left(l\sigma\sqrt{\tau}e^{-\int_{\lambda_n}^{(n+1)\tau}\beta(s)ds}\right) &= l\sigma\sqrt{(\tau)} + o(\tau)
\end{aligned}$$

se tiene

$$E[\xi_{n\tau}^l] = 1 + l\tau\left(\frac{l\sigma^2}{2} + \alpha(\lambda_n) - \beta(\psi_n)\ln(x)\right) - l^2\tau^2\beta(\psi_n)\ln(x)\left(\frac{l\sigma^2}{2} + \alpha(\lambda_n) + o(\tau)\right).$$

De aquí

$$E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^m | X_{n\tau} = x] = x^m \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l} \times$$

$$\times \quad \left(l\tau\left(\frac{l\sigma^2}{2} + \alpha(\lambda_n) - \beta(\psi_n)\ln(x)\right) - l^2\tau^2\beta(\psi_n)\ln(x)\left(\frac{l\sigma^2}{2} + \alpha(\lambda_n) + o(\tau)\right)\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0\\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau}E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}|X_{n\tau} = x] = x\left(\frac{\sigma^2}{2} + \alpha(t) - \beta(t)\ln(x)\right)\\
&\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0\\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2|X_{n\tau} = x] = x^2\sigma^2\\
&\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0\\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^k|X_{n\tau} = x] = 0; \qquad k > 2.
\end{aligned}$$

Es decir, cuando $n \to \infty$ y $\tau \to 0$, con la condición de que $n\tau = t$, $X_{n\tau}$ converge a un proceso de difusión no homogéneo $X(t)$ con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned}
B_1(x,t) &= \left(\alpha(t) + \frac{\sigma^2}{2}\right)x - \beta(t)x\ln(x)\\
B_2(x,t) &= \sigma^2 x^2.
\end{aligned}$$

Así, los procesos de difusión obtenidos como límite de los dos modelos de crecimiento planteados se pueden unificar en el proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x,t) &= m(t)x - \beta(t)x\ln(x) \\ A_2(x,t) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

donde

$$m(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{para el Modelo I} \\ \alpha(t) + \dfrac{\sigma^2}{2} & \text{para el Modelo II} \end{cases}$$

5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Proyecto de Investigación BFM 2002-03633.

Referencias

Capocelli, R. M. y Ricciardi, L. M. (1974). Growth with regulation in random environment. *Kybernetik* 15, 147–157.
Tintner, G. y Sengupta, J. K. (1972). Stochastics Economics. Academic Press.