

Tema 4

Probabilidad

❑ **Fenómeno aleatorio: es aquel cuyos resultados son impredecibles.**

❑ **Ejemplos:**

- ❑ Lanzamiento de una moneda: Resultados posibles: cara, cruz.
- ❑ Selección al azar de un alumno entre los 30 de una clase: Resultados posibles uno cualquiera de los 30.
- ❑ La imprecisión de los resultados nos lleva a plantearnos la *medición de la incertidumbre* ligada a estos resultados, evaluándola numéricamente.
- ❑ Esto nos lleva a la probabilidad.

❑ **Conceptos básicos**

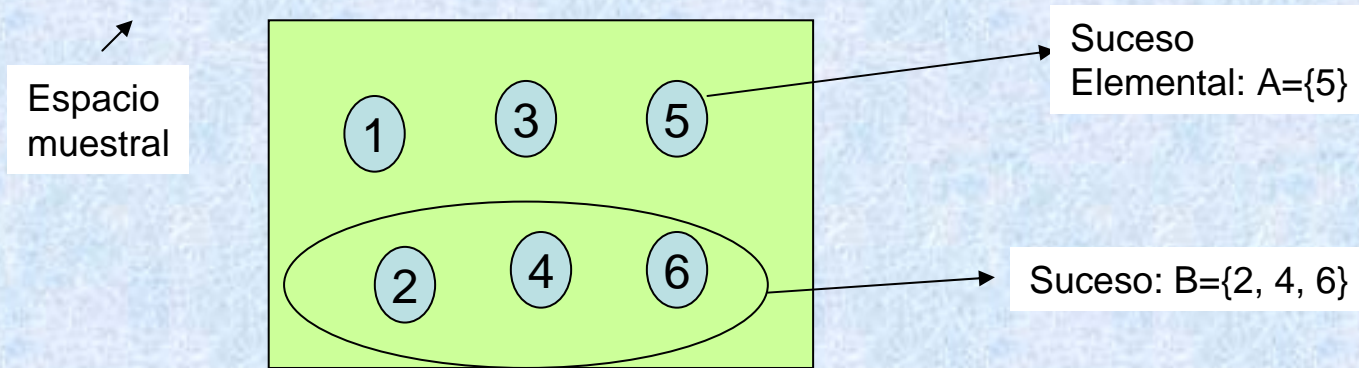
- ❑ Supongamos que se realiza un experimento aleatorio
 - ❑ Se llama **suceso elemental** a cada uno de los resultados posibles.
 - ❑ Se llama **Espacio muestral** al conjunto formado por todos los resultados posibles
 - ❑ Se llama **suceso** al compuesto por uno o más sucesos elementales
 - ❑ Se llama **suceso seguro**, que notaremos con E, al formado por todos los resultados posibles
 - ❑ Se llama **suceso imposible**, que notaremos con ϕ , al que no contiene ninguno de resultados posibles

Tema 4: Probabilidad

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Lanzamiento de un dado

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



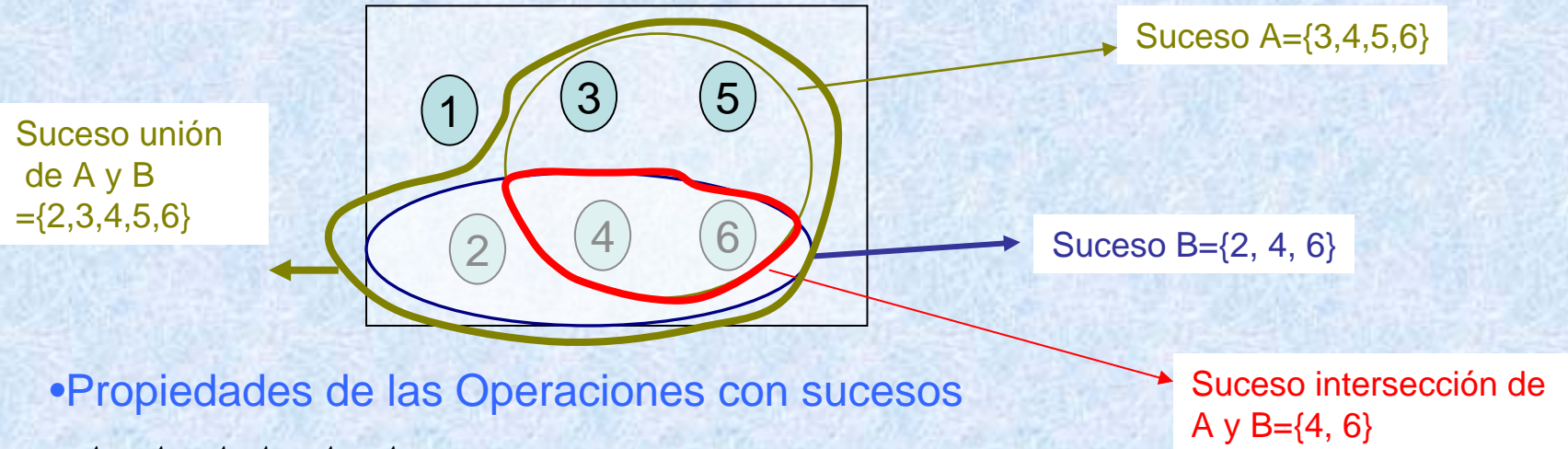
• Operaciones con sucesos

- **Unión de dos sucesos** A y B es un nuevo suceso, $A \cup B$, constituido por los sucesos elementales de A y los de B . Se realiza cuando tiene lugar cualquiera de los sucesos elementales que lo forma.
- **Intersección de dos sucesos** A y B es un nuevo suceso, $A \cap B$, constituido por los sucesos elementales que están a la vez en A y en B . Se realiza, cuando se realiza A y B .
- **Contrario de un suceso A** : Está formado por todos los sucesos elementales de E que no están en A . Se nota con \bar{A} .
- Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles** si su intersección es el suceso imposible.

Tema 4: Probabilidad

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Lanzamiento de un dado



•Propiedades de las Operaciones con sucesos

$$A \cup A = A; A \cap A = A$$

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\overline{\overline{E}} = E; \overline{\phi} = E$$

$$A \cup \overline{A} = E; A \cap \overline{A} = \phi$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Tema 4: Probabilidad

❑ **Álgebra de sucesos**

- ❑ El conjunto de todos los sucesos está dotado de una estructura denominada álgebra de sucesos.

- ❑ Un álgebra de sucesos es una clase, F , formada por subconjuntos de E denominados sucesos del espacio muestral que verifica:
 - ❑ Si un suceso pertenece a F , también pertenece su complementario o contrario.
 - ❑ Si una serie de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ pertenece a F , también pertenece la unión.
 - ❑ El suceso imposible también pertenece a F

- ❑ Por tanto, las propiedades de unión, intersección y complementación de sucesos de F da lugar a sucesos que pertenecen a F .

Tema 4: Probabilidad

❑ Concepto de probabilidad

- ❑ Dado un experimento y su espacio muestral asociado, E , una aplicación que asocia a cada suceso un número real

$$P: F \longrightarrow R$$

$$A \longrightarrow P(A)$$

es una probabilidad si verifica los siguientes axiomas:

- ❑ 1) Para cualquier suceso A , su probabilidad $P(A)$ es mayor o igual a cero
- ❑ 2) La probabilidad del suceso seguro, E , es uno: $P(E)=1$
- ❑ 3) Dados dos sucesos incompatibles A y B se verifica que la probabilidad de la unión es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- ❑ Toda aplicación que cumpla esos axiomas es una probabilidad definida sobre el álgebra de sucesos F . Se denomina espacio de probabilidad a la terna (E, F, P) .

Tema 4: Probabilidad

- ❑ **Concepto clásico o de Laplace de probabilidad**
 - ❑ Nos permite evaluar numéricamente las posibilidades de ocurrencia de los sucesos
 - ❑ Se asume que todos los resultados posibles ligados al experimento aleatorio tienen la misma oportunidad de aparecer.
 - ❑ Dado un suceso A se determina su probabilidad como el cociente

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables al suceso A}}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}}$$

- ❑ **Concepto frecuentista de probabilidad**
 - ❑ Nos permite evaluar numéricamente las posibilidades de ocurrencia de los sucesos
 - ❑ Se asume que el experimento aleatorio puede realizarse un número grande de veces.
 - ❑ Dado un suceso A se determina su probabilidad como la frecuencia relativa con que aparece o tiene lugar.

Tema 4: Probabilidad

❑ Propiedades derivadas de los axiomas de la probabilidad

- ❑ La probabilidad del suceso contrario es igual a 1 menos la probabilidad del suceso

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- ❑ La probabilidad del suceso imposible es cero

$$P(\phi) = 0$$

- ❑ La probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ❑ Si el suceso A está incluido en el B, la probabilidad de A es menor o igual a la de B

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

- ❑ La probabilidad del cualquier suceso es menor o igual a 1

$$P(A) \leq 1$$

Tema 4: Probabilidad

□ Probabilidad condicionada

- Dado un suceso B con probabilidad no nula, la probabilidad de que ocurra A, supuesto que ha ocurrido B, se denomina probabilidad condicionada de A dado B. Se determina como el cociente entre la probabilidad de la intersección y la del suceso condicionado:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- De modo similar se define la probabilidad del suceso condicionado B dado A, supuesto que A no es el suceso imposible:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Observa que estas igualdades nos permiten expresar la probabilidad del suceso intersección mediante:

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B)$$

□ Sucesos independientes

- Dos sucesos A y B se dice que son independientes si la realización de uno de ellos no afecta a la realización del otro. Es decir:
- $P(A/B)=P(A)$, o de modo equivalente, $P(B/A)=P(B)$
- O bien, también de modo equivalente, si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Tema 4: Probabilidad

□ Ejemplos

En una Facultad el 25% de los alumnos suspendió matemáticas, el 15% química y el 10% las dos. Se selecciona un estudiante al azar.

- Si suspendió química, ¿cuál es la probabilidad de que suspendiera matemáticas?
 - Si suspendió matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que suspendiera química?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que haya suspendido matemáticas o química?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no suspenda química?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no suspenda ninguna de las dos?
 - ¿Son independientes los dos sucesos?
-

$$P(M) = 0,25; P(Q) = 0,15; P(M \cap Q) = 0,1$$

a)

$$P(M / Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0,1}{0,15} = 0,667$$

b)

$$P(Q / M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$$

Tema 4: Probabilidad

□ Ejemplos

$$P(M) = 0,25; P(Q) = 0,15; P(M \cap Q) = 0,1$$

c)

$$P(M \cup Q) = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0,25 + 0,15 - 0,1 = 0,3$$

d)

$$P(\bar{Q}) = 1 - P(Q) = 1 - 0,15 = 0,85$$

e)

$$P(\bar{M} \cap \bar{Q}) = P(\overline{M \cup Q}) = 1 - P(M \cup Q) = 1 - 0,3 = 0,7$$

f)

$$0,1 = P(M \cap Q) \neq P(M)P(Q) = 0,25 \cdot 0,15 = 0,0375$$

No son independientes

Tema 4: Probabilidad

❑ Ejemplo

- ❑ La tabla siguiente muestra la clasificación de un grupo de trabajadores de una empresa según sector de producción en que trabaja y número de bajas registradas durante un año.

	<i>sector producción</i>		
<i>Días de BAJA</i>	Sector A	Sector B	Sector C
0-10	100	120	50
10-20	150	100	60
más de 20	98	130	80

Seleccionado un trabajador al azar, determina:

- Probabilidad de que esté de baja más de 20 días
 - Probabilidad de que pertenezca al sector B
 - Probabilidad de que esté de baja más de 20 días y pertenezca al sector B
 - Probabilidad de que esté de baja más de 20 días o que pertenezca al sector B
 - Dado que pertenece al sector B, ¿qué probabilidad hay de que esté de baja más de 20 días?
 - Son independientes los sucesos estar de baja más de 20 días y pertenecer al sector B?
 - Probabilidad de no estar de baja más de 20 días
 - Probabilidad de no estar de baja más de 20 días y no pertenecer al sector B
-

□ Ejemplo (Continuación)

a) Probabilidad de que esté de baja más de 20 días

$$P(M 20) = \frac{308}{888} = 0,3468$$

b) Probabilidad de que esté en el sector B

$$P(B) = \frac{350}{888} = 0,3941$$

c) Probabilidad de que esté de baja más de 20 días y pertenezca al sector B

$$P(M 20 \cap B) = \frac{130}{888} = 0,1464$$

d) Probabilidad de que esté de baja más de 20 días o pertenezca al sector B

$$P(M 20 \cup B) = P(M 20) + P(B) - P(M 20 \cap B) = 0,3468 + 0,3941 - 0,1464 = 0,5945$$

e) Dado que pertenece al sector B, ¿qué probabilidad hay de que esté de baja más de 20 días?

$$P(M 20 / B) = \frac{P(M 20 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1464}{0,3941} = 0,3714$$

f) Son independientes los sucesos estar de baja más de 20 días y pertenecer al sector B?

No, porque no se verifica la igualdad $P(M 20 \cap B) = P(M 20) \cdot P(B)$

g) Probabilidad de no estar de baja más de 20 días

$$P(\overline{M 20}) = 1 - P(M 20) = 1 - 0,3468 = 0,6532$$

h) Probabilidad de no estar de baja más de 20 días y no pertenecer al sector B

$$P(\overline{M 20} \cap \overline{B}) = P(\overline{M 20 \cup B}) = 1 - P(M 20 \cup B) = 1 - 0,5945$$

	sector producción			
Días de BAJA	Sector A	Sector B	Sector C	total
0-10	100	120	50	270
10-20	150	100	60	310
más de 20	98	130	80	308
Total	348	350	190	888

Tema 4: Probabilidad

Teorema de la Probabilidad Total

- Dado un conjunto de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n que verifica
 - Su unión es el suceso seguro

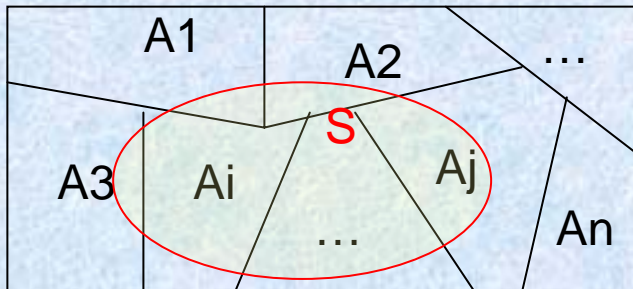
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$$

- Para cualesquiera sucesos A_i, A_j , su intersección es el suceso imposible

$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i, j$$

- En estas condiciones, dado un suceso cualquiera, S , se verifica

$$P(S) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(S / A_i)$$



Tema 4: Probabilidad

❑ Teorema de Bayes

- ❑ Dado un conjunto de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n que verifica
 - ❑ Su unión es el suceso seguro

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$$

- ❑ Para cualesquiera sucesos A_i, A_j , su intersección es el suceso imposible

$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i, j$$

- ❑ En estas condiciones, dado un suceso cualquiera, S , se verifica

$$P(A_i / S) = \frac{P(A_i)P(S / A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(S / A_j)}$$

Ejemplo 1:

3 oficinas O1, O2 y O3 de una Compañía Aseguradora tienen respectivamente un total de asegurados igual a 1200, 2300 y 750. Los porcentajes de reclamaciones por parte de sus clientes son respectivamente del 2%, 1,8% y 3%.

- Si se selecciona al azar un asegurado, ¿cuál es la probabilidad de que reclame?
- Dada una reclamación ¿qué probabilidad hay de que proceda de la oficina O2?

Tema 4: Probabilidad

1._ Estamos en las condiciones del teorema total. Cada asegurado procede de una oficina.

$$P(O1) = \frac{1200}{1200 + 2300 + 750} = 0,282 \quad P(O2) = \frac{2300}{1200 + 2300 + 750} = 0,541 \quad P(O3) = \frac{750}{1200 + 2300 + 750} = 0,176$$

Las probabilidades de reclamaciones, dadas las oficinas son

$$P(R/O1) = 0,02; \quad P(R/O2) = 0,018; \quad P(R/O3) = 0,03$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(R) = \sum_{i=1}^3 P(Oi)P(R/Oi) = 0,282 \cdot 0,02 + 0,541 \cdot 0,018 + 0,176 \cdot 0,03 = 0,0207$$

2._ Estamos en las condiciones del teorema Bayes.

$$P(O2/R) = \frac{P(O2)P(R/O2)}{\sum_{j=1}^3 P(Oj)P(R/Oj)} = \frac{P(O2)P(R/O2)}{P(R)} = \frac{0,541 \cdot 0,018}{0,0207} = 0,4686$$

Tema 4: Probabilidad

□ Ejemplo 2

Dos máquinas M1 y M2 producen el 70% y 30%, respectivamente del total de artículos de la producción. El 10% de los artículos producidos por M1 y 15% de los producidos por M2 son defectuosos.

Se selecciona al azar un artículo y resulta ser defectuoso.

¿Qué probabilidad hay de que proceda de M2?

$$P(M1) = 0,7; \quad P(M2) = 0,3$$

$$P(D / M1) = 0,1; \quad P(D / M2) = 0,15$$

$$P(M2 / D) = \frac{P(M2)P(D / M2)}{\sum_{j=1}^2 P(Mj)P(D / Mj)} = \frac{0,3 \cdot 0,15}{0,7 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,15} = \frac{0,045}{0,115} = 0,391$$