# TEMA 3: Inspección Estadística por Variables


1 Planes de muestreo por variables

2 Inspección en cadena

3 Inspección por muestreo continuo

4 Planes de muestreo por lotes salteados

5 Consideración de errores en la inspección por muestreo

6 Diseño económico de planes de muestreo


## 1. Planes de muestreo por variables

Los planes de muestreo por variables especifican el número de artículos que hay que inspeccionar y el criterio para juzgar los lotes a partir de mediciones de características númericas del producto, cuya calidad hay que controlar. Estos planes se basan normalmente en la media y la desviación típica muestral. Cuando se conoce la distribución de la característica estudiada, se pueden diseñar planes de muestreo por variables que tengan riesgos especificados de aceptar y de rechazar lotes de una calidad dada. El poder discriminatorio de estos planes es superior al de los planes de muestreo por atributos, aunque el costo de obtención de las mediciones es superior. Pero el conjunto resulta más económico y esto los hace especialmente útiles en pruebas destructivas. Proporcionan más información que el muestreo por atributos sobre el proceso de producción y sobre el lote. Son especialmente interesantes cuando el NCA es muy bajo, puesto que los planes de muestreo por atributos requieren tamaños muy grandes. La principal dificultad para su aplicación es que se requiere un conocimiento previo de la distribución de probabilidad de la característica de la calidad estudiada. Se puede rechazar un lote aunque la muestra que se inspecciona no tenga ningún artículo defectuoso. Se distinguen dos tipos de planes de muestreo por variables:

(i) Planes de muestreo por variables para el control de valores de la variable de interés

(ii) Planes de muestreo por variables para el control de un parámetro de la distribución.

En los planes (i) se determina un límite inferior de especificación (LIE), o bien un límite superior de especificación (LSE). En algunos casos, se utilizan ambos para determinar los valores aceptables del parámetro.

Por simplicidad, nos referiremos al caso en que la distribución poblacional de la característica estudiada es normal con parámetros $\mu$ y $\sigma$. Entonces, la media muestral, basada en una muestra de tamaño $n$, se distribuye según una normal con parámetros $\mu$ y $\sigma/(n)^{1/2}$. Se consideran entonces los estadísticos

$$\overline{Z}_{LIE} = \frac{\overline{x} - LIE}{\sigma} \quad \text{y} \quad \overline{Z}_{LIE}\frac{LSE - \overline{x}}{\sigma},$$

referidos respectivamente al control de los valores bajos y altos de la característica estudiada. Dichos estadísticos poseen distribuciones normales con medias definidas en términos de la media poblacional y el límite de especificación superior o inferior y con desviación típica $1/(n)^{1/2}$. A partir de sus distribuciones y de la especificación de un valor crítico de la proporción de defectuosos que no debe excederse, se determina una distancia crítica $K$ para el $\overline{Z}_{LIE}$ de forma que, si

$$Z_{LIE} \geq K$$

se aceptará el lote y en caso contrario se rechazará el lote. De forma similar se procede para el $LSE$.

En los planes (ii) se controla el parámetro $p$ que define la fracción de defectuosos. Dicho parámetro se estima mediante el área que queda bajo la curva a la izquierda del LIE, o bien a la derecha del LSE. Para un valor crítico $M$ determinado a partir de la distribución del estimador de $p$, se procede de la siguiente forma: Si

$$\hat{p} \leq M$$

se acepta el lote y en caso contrario se rechaza.

# 2. Inspección en cadena

Se aplica en situaciones en las que las pruebas son destructivas y costosas y, por tanto, los tamaños muestrales son pequeños y el criterio de aceptación es nulo. Permite suavizar la velocidad de caída de la CO. Los pasos a seguir son los siguientes:

(i) Se elige una muestra de tamaño $n$ y se observa el número de artículos defectuosos.

(ii) Si la muestra no tiene artículos defectuosos se acepta el lote.

(iii) Si se observan dos o más artículos defectuosos se rechaza el lote.

(iv) Si se observa un artículo defectuoso, se acepta el lote cuando los $i$ lotes precedentes se hallan libres de defectos. Normalmente $i$ suele estar entre tres y cinco.

Este tipo de muestreo permite aceptar un rango más amplio de lotes con fracción de defectuosos próxima a cero.

La probabilidad de aceptación, que define la ordenada de la CO, se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$P_a = P(0, n) + P(1, n)[P(0, n)]^i,$$

donde

$$P(0, n) = (1 - p)^n$$

indica la probabilidad de observar cero defectos en una muestra de tamaño $n$ y

$$P(1, n) = np(1 - p)^{n-1}$$

la probabilidad de observar un defecto en una muestra de tamaño $n$, siendo $p$ la fracción de defectuosos del lote. El muestreo en cadena se aplica especialmente cuando se dan las siguientes condiciones:

- El lote forma parte de un flujo continuo de lotes de un proceso en el que existe una producción repetitiva elaborada bajo las mismas condiciones y en el cual los lotes se presentan para su aceptación en el orden de producción.
- Se supone que los lotes son esencialmente de la misma calidad.
- Se debe disponer de un buen registro de la calidad por parte del proveedor.

# 3. Inspección por muestreo continuo

Se aplica en procesos de producción de productos para los que la conformación de lotes de unidades no se realiza habitualmente. En este caso, existen diferentes procedimientos para inspeccionar las unidades:

- Acumular la producción en puntos dados del proceso de montaje.
- Considerar segmentos de la producción.

El primer procedimiento requiere la creación de un espacio adicional y el resultado puede ser en algunos casos no efectivo. En el segundo procedimiento la detección de unidades defectuosas puede obligar a devolver productos de la cadena que estaban en segmentos anteriores.

Los planes de muestreo continuo consisten en alternar la inspección al 100 % con la inspección por muestreo. Generalemente, se comienza con la inspección al 100 %, y se pasará a una inspección por muestreo cuando un número determinado $i$ de unidades se encuentren libres de defectos. El regreso a la inspección al 100 % se producirá tras observar un número determinado de unidades defectuosas.

Se suelen distinguir los siguientes planes de muestreo continuo:

- Planes CPS-1: Se comienza con una inspección al 100 %, se pasa a una inspección por muestreo con fracción de muestreo $f$ cuando se observan $i$ unidades no defectuosas. El retorno a la inspección al 100 % se produce cuando se observa una unidad defectuosa. La selección de artículos en la inspección por muestreo se suele realizar mediante generación de números pseudoaleatorios entre 0 y $1/f$. Los artículos defectuosos se revisan. Por tanto, en la aplicación de esta inspección con rectificación se combinarán diferentes valores de $f$ e $i$ para conseguir diferentes LCMS. En este tipo de muestreo son de interés la siguientes cantidades:

- El número medio de unidades inspeccionadas en una inspección al 100 %, para $p$ la fracción de defectuosos y $q = 1 - p$ :
$$u_{\text{INSP}} = \frac{1 - q^i}{pq^i}.$$
- El número medio de unidades inspeccionadas en la inspección por muestreo antes de que se produzca un error:
$$v_{\text{MUEST}} = \frac{1}{fp}.$$
- El número medio de unidades producidas e inspeccionadas:
$$FPI = \frac{u_{\text{INSP}} + f v_{\text{MUEST}}}{u_{\text{INSP}} + v_{\text{MUEST}}}.$$
- La fracción promedio de unidades producidas que pasan por el procedimiento de muestreo:
$$\frac{v_{\text{MUEST}}}{u_{\text{INSP}} + v_{\text{MUEST}}}.$$

- Panes CPS-2: En este tipo de planes se pasa de la inspección por muestreo a la inspección al 100 % cuando se observan dos unidades defectuosas separadas por $k$ unidades (normalmente $k = i$, siendo $i$ el número de unidades libres de defectos que determina el paso de la inspección al 100 % a la inspección por muestreo).

- Panes CPS-3: En este tipo de muestreo, se vuelve a la inspección al 100 % cuando se observa una unidad defectuosa y en las cuatro unidades siguientes se observa un nuevo defecto. El paso de la inspección al 100 % a la inspección por muestreo se produce, al igual que en los casos anteriores, cuando $i$ unidades se hallan libres de defectos.

- Inspección a varios niveles: Consiste en alternar la inspección al 100 % con la inspección por muestreo con diferentes fracciones de muestreo, dependiendo de la calidad de los lotes. Específicamente, se comienza con una inspección al 100 % y posteriormente se pasa a una inspección por muestreo con fracción $f$, cuando $i$ artículos se encuentran libres de defectos. Si de nuevo $i$ artículos se encuentran libres de defectos, entonces se continúa con una inspección por muestreo con fracción $f^2$. En caso contrario, se vuelve a la inspección al 100 %. En general el procedimiento se plantearía como sigue: Para una etapa en la que se inspecciona por muestreo con fracción $f^l$, $l \in \mathbb{N}$ (interpretando $l^0$ como la inspección al 100 %).

- Si $i$ artículos se encuentran libres de defectos se pasa a una inspección por muestreo con fracción $f^{l+1}$.
- En caso contrario se aplica una inspección por muestreo con fracción de muestreo $f^{l-1}$.

# 4. Planes de muestreo por lotes salteados

Consisten en la aplicación de un muestreo continuo a los lotes. Es decir, se inspecciona un fracción de lotes cuando ha habido un número de lotes determinados que son aceptados. Se distinguen esencialmente dos variedades:

- Planes SKSP-1: Son planes que requieren una sola determinación o único análisis para aceptar o rechazar.
- Planes SKSP-2: Cada lote se evalúa según un plan particular de inspección de lotes por atributos. Consiste en los siguientes pasos:
  - Se comienza con una inspección por muestreo de los lotes siguiendo un plan de muestreo de referencia.
  - Cuando $i$ lotes han sido aceptados bajo dicho plan de referencia, se pasa a inspeccionar una fracción $f$ de lotes
  - Cuando se rechaza un lote con la inspección salteada se vueve a la inspección normal.

  En este tipo de planes la probabilidad de aceptación, que define la ordenada de la CO, frente a la fracción de defectuosos $p$ del lote se calcula como sigue:

  $$P_a = \frac{fp + (1-f)p^i}{f + (1-f)p^i}.$$

  *Propiedades del SKSP-2.*

  Si $f_2 < f_1$, entonces $P_a(f_1, i) \leq P_a(f_2, i)$, siendo $i$ el número de aprobación y $f_j$, $j = 1, 2$, las fracciones de muestreo de los lotes.

  Si $i < j$, entonces $P_a(f, j) \leq P_a(f, i)$, siendo $i$ y $j$ valores de aprobación y $f$ la fracción de muestreo de los lotes.

  La fracción media $F$ de muestreo de los lotes viene dada por

  $$F = \frac{f}{(1-f)p^i + f}.$$

  La aplicación de este tipo de planes es aconsejable cuando se ha alcanzado una cierta estabilidad en el nivel de calidad de la producción.

# 5. Consideración de errores en la inspección por muestreo

En las secciones anteriores no se ha contemplado la posibilidad de que las operaciones de inspección estén sujetas a errores. Sin embargo, dichos errores existen y deben ser contemplados en el diseño del plan de muestreo.

Se distinguen dos tipos de errores:

- El error de tipo I, $E_1$, que consiste en clasificar como defectuoso un artículo aceptable.
- El error de tipo II, $E_2$, que consiste en clasificar como aceptable un artículo defectuoso.

Se tiene entonces, denotando por $A$ el evento de que haya un artículo defectuoso y por $B$ el evento de clasificar como defectuoso un artículo, la siguiente identidad:

$$P(B) = P(A)P(\overline{E}_2) + P(\overline{A})P(E_1).$$

Para definir la CO asociada, se consideran las siguientes cantidades:

- $p = P(A)$, la verdadera fracción de defectuosos;
- $p_e$, la fracción de defectuosos aparente;
- $e_1 = P(E_1)$, la probabilidad de que se produzca un error de tipo I, y
- $e_2 = P(E_2)$ la probabilidad de que se produzca un error de tipo II.

La fracción de defectuosos aparente viene dada por

$$p_e = p(1 - e_2) + (1 - p)e_1.$$

La CO, cuando se producen errores en la inspección, se define mediante la ecuación

$$P_a(e) = \sum_{d=0}^{c} \frac{n!}{d!(n-d)!} p_e^d (1 - p_e)^{n-d}.$$

*Influencia de la presencia de errores en las curvas de CMS e ITM*

(i) Si no hay errores,

$$CMS = \frac{(N - n)pP_a}{N}.$$

(ii) Si se reemplazan los artículos defectuosos y hay error en la inspección de los artículos reemplazados, se tiene entonces

$$CMS = \frac{npe_2 + p(N - n)(1 - p_e)P_a(e) + p(N - n)(1 - P_a(e))e_2}{N(1 - p_e)}.$$

Para la curva de ITM se tiene

$$ITM = n + (1 - P_a)(N - n)$$

cuando no se contemplan errores en la inspección. Si se reemplazan los artículos defectuosos y el proceso de reemplazo está sujeto a los errores de inspección se obtiene

$$ITM = \frac{n + (1 - P_a(e))(N - n)}{1 - p_e}.$$

Finalmente, si existen errores de inspección pero no se reemplazan los artículos defectuosos, se tiene

$$ITM = n + (1 - P_a(e))(N - n).$$

La CO obtenida bajo una inspección con errores difiere de la CO real. Para determinar esta última se debe establecer previamente la CO con errores CO(e) basada en un NCA(e) y un PDTL(e) con errores. Dichos valores vienen dados por

$$\begin{aligned} NCA(e) &= NCA(1 - e_2) + (1 - NCA)e_1 \\ PDTL(e) &= PDTL(1 - e_2) + (1 - PDTL)e_1. \end{aligned}$$

El punto donde CO y CO(e) se intersecan viene dado por

$$p^* = p_e = \frac{e_1}{e_1 + e_2}.$$

Para $p < p^*$ se tiene $P_a(e) < P_a$ y para $p > p^*$ se tiene $Pa(e) > P_a$.

Cuando se da $E_1$ la CMS disminuye y la curva decrece lentamente. Por el contrario, cuando se da $E_2$ la CMS aumenta y la curva decrece rápidamente. Por tanto, en una inspección con erores el LCMS no es significativo. En relación con la ITM se tiene que cuando se da $E_1$ aumenta la ITM y cuando se da $E_2$ disminuye la ITM.

# 6. Diseño económico de planes de muestreo

En este tema y en el anterior se han estudiado criterios estadísticos para el diseño de planes de muestreo. Sin embargo, es frecuente el uso de criterios de tipo económico, contemplándose en el diseño, por ejemplo, costes de inspección, costes asociados al error de tipo I, costes asociados al error de tipo II, etc. Normalmente se adopta un enfoque bayesiano para el diseño de este tipo de planes. Se especifica entonces una distribución a priori para los artículos defectuosos. Tras la inspección por muestreo se combina la distribución a priori con la información proporcionada por el muestreo para concluir una distribución a posteriori.

Sea $N$ (tamaño del lote) finito. Según se vio en el tema anterior, la probablidad de aceptación viene dada por la distribución hipergeométrica,

$$P_a(\theta) = \sum_{d=0}^{c} \frac{\frac{(N\theta)!}{d!(N\theta-d)!}\frac{(N-N\theta)!}{(n-d)!(N-N\theta-(n-d))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}.$$

La fracción de defectuosos del lote $\theta$ presenta dos fuentes de variabilidad: La variabilidad de la calidad media del proceso y la variabilidad de $\theta$ en torno a $p$. Se considera normalmente una distribución a priori de $p$, $f(p)$, que modeliza la variación de $p$. Las distribuciones a priori más usuales para $p$ son: La distribución Beta, la distribución Binomial y la distribución Normal Generalizada. Se suelen utilizar preferentemente distribuciones continuas.

Dada una distribución a priori y un conjunto de costos o pérdidas asociados al plan de muestreo, se eligen los parámetros del plan que minimizan los costos totales. La formulación lineal de la función de costos lleva asociada la siguiente pérdida esperada $L$:

$$L = an + (N-n)\left\{\int_0^{pr} (prp)\left[1 - P_a(p)\right] f(p)dp + \int_{pr}^{1} (p - pr)P_a(p)f(p)dp\right\},$$

donde $pr$ es un valor de la fracción de muestreo para el que son iguales los costos de aceptar y rechazar, $f(p)$ es la distribución a priori de $p$, $P_a(p)$ es la probabilidad de aceptación asociada a $p$ y $a$ es una constante proporcional al costo variable del muestreo y a la probabilidad de aceptar. La minimización de $L$ respecto a $n, a$ y $c$ (criterio de aceptación-rechazo del plan) definirá el plan de muestreo óptimo. Uno de los objetivos de este enfoque es el estudio de diferentes modelos de distribuciones a priori en combinación con modelos lineales de costos, así como la incorporación de errores de muestreo para el diseño económico.