Tema 3
Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Departamento de Matemática Aplicada. Cálculo Numérico

E.T.S.I. Informática

Indice

Introducción

El objetivo de este tema es la **resolución de un sistema de** n **ecuaciones lineales** con n incógnitas:

Introducción

El objetivo de este tema es la **resolución de un sistema de n ecuaciones lineales** con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\}$$

Introducción

El objetivo de este tema es la **resolución de un sistema de** n **ecuaciones lineales** con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\}$$

donde son conocidos la **matriz de coeficientes**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y se puede resolver por dos tipos de métodos:

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y se puede resolver por dos tipos de métodos:

- **Métodos directos**:

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y se puede resolver por dos tipos de métodos:

- **Métodos directos**:son métodos que, en un número finito de operacions, obtienen la solución exacta.

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y se puede resolver por dos tipos de métodos:

- **Métodos directos**:son métodos que, en un número finito de operacions, obtienen la solución exacta.
- **Métodos iterativos**:

Introducción

y el **vector de términos independientes**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación matricial, el sistema de ecuaciones lineales se escribe:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y se puede resolver por dos tipos de métodos:

- **Métodos directos**:son métodos que, en un número finito de operacions, obtienen la solución exacta.
- **Métodos iterativos**:son métodos que generan una sucesión de aproximaciones $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ que converge a la solución del sistema: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Introducción

Recordemos que el Método de Cramer para la resolución de un sistema de n con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ consiste en calcular las incógnitas mediante la fórmula

Introducción

Recordemos que el Método de Cramer para la resolución de un sistema de n con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ consiste en calcular las incógnitas mediante la fórmula

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Introducción

Recordemos que el Método de Cramer para la resolución de un sistema de n con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ consiste en calcular las incógnitas mediante la fórmula

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

siendo $\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes y $\mathbf{A}_i$ la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima de la matriz de coeficientes por le vector de términos independientes.

Introducción

Recordemos que el Método de Cramer para la resolución de un sistema de n con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ consiste en calcular las incógnitas mediante la fórmula

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

siendo $\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes y $\mathbf{A}_i$ la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima de la matriz de coeficientes por le vector de términos independientes.

Teniendo en cuenta que el **coste de un proceso de cálculo** se puede estimar mediante el número total de operaciones aritméticas necesarias, entonces el coste de un determinante de orden n es $n!n - 1$ y, por tanto, el coste del Método de Cramer es $(n+1)n! - 1$.

Introducción

A continuación aparece una tabla con el tiempo estimado para resolver con el método de Cramer un sistema de orden n, para distintos valores de n, con una máquina que realice unas 10^6 operaciones por segundo:

Introducción

A continuación aparece una tabla con el tiempo estimado para resolver con el método de Cramer un sistema de orden n, para distintos valores de n, con una máquina que realice unas 10^6 operaciones por segundo:

Algunos costes del método de Cramer

n	Coste del Método de Cramer	Tiempo (10^6 oper/s)
5	≈ 3600	3,6 milisegundos
10	$\approx 4 \times 10^8$	6 minutos 39 segundos
20	$\approx 1{,}02 \times 10^{21}$	32,4 millones de años

Introducción

Por último, recordemos algunas definiciones sobre matrices

Introducción

Por último, recordemos algunas definiciones sobre matrices

$\mathbf{A}_{n\times n} = (a_{ij})$ se dice	si verifica
Ortogonal	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$
Simétrica	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
Diagonal	si $i \neq j$ entonces $a_{ij} = 0$
Tridiagonal	si $\lvert i-j\rvert > 1$ entonces $a_{ij} = 0$
Triangular superior	si $i > j$ entonces $a_{ij} = 0$
Hessenberg superior	si $i > j+1$ entonces $a_{ij} = 0$
(Semi)Definida positiva	$\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}(\geq) > 0,\ \forall\, \mathbf{x} \neq 0$
(Estrictamente)Diagonalmente dominante	$\sum_{i\neq j} \lvert a_{ij}\rvert (<) \lvert a_{ii}\rvert,\ \forall\, i$

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{U} \neq 0$) en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n \times n}$ es triangular superior.

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única $(\det \mathbf{U} \neq 0)$ en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n\times n}$ es triangular superior.

Entonces las componentes de la solución se pueden calular mediante el **método de sustitución regresiva**, es decir, se despeja la última incógnita de la última ecuación,

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{U} \neq 0$) en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n\times n}$ es triangular superior.

Entonces las componentes de la solución se pueden calular mediante el **método de sustitución regresiva**, es decir, se despeja la última incógnita de la última ecuación, se sustituye en la penúltima ecuación;

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{U} \neq 0$) en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n\times n}$ es triangular superior.

Entonces las componentes de la solución se pueden calular mediante el **método de sustitución regresiva**, es decir, se despeja la última incógnita de la última ecuación, se sustituye en la penúltima ecuación; después se despeja de esta ecuación la penúltima incóngnita

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{U} \neq 0$) en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n\times n}$ es triangular superior.

Entonces las componentes de la solución se pueden calular mediante el **método de sustitución regresiva**, es decir, se despeja la última incógnita de la última ecuación, se sustituye en la penúltima ecuación; después se despeja de esta ecuación la penúltima incóngnita y se repite el proceso hacia arriba hasta calcular el valor de la primera incógnita.

Resolución de Sistemas Triangulares

Sea $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ un sistema de3 ecuaciones lineales con solución única $(\det \mathbf{U} \neq 0)$ en el que la matriz de coeficientes $\mathbf{U}_{n\times n}$ es triangular superior.

Entonces las componentes de la solución se pueden calular mediante el **método de sustitución regresiva**, es decir, se despeja la última incógnita de la última ecuación, se sustituye en la penúltima ecuación; después se despeja de esta ecuación la penúltima incóngnita y se repite el proceso hacia arriba hasta calcular el valor de la primera incógnita.

Algoritmo del Método de Sustitución Regresiva

:

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \qquad i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de sustitución regresiva se tiene:

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de sustitución regresiva se tiene:

$$x_4 = \frac{6}{2} = 3,$$

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de sustitución regresiva se tiene:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{6}{2} = 3, \\ x_3 &= \frac{-3 - x_4}{4} = -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de sustitución regresiva se tiene:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{6}{2} = 3, \\ x_3 &= \frac{-3 - x_4}{4} = -\frac{3}{2}, \\ x_2 &= \frac{5x_3 + 3x_4}{3} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Resolución de Sistemas Triangulares

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de sustitución regresiva se tiene:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{6}{2} = 3, \\ x_3 &= \frac{-3 - x_4}{4} = -\frac{3}{2}, \\ x_2 &= \frac{5x_3 + 3x_4}{3} = \frac{1}{2}, \\ x_1 &= \frac{-5 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4}{3} = -7. \end{aligned}$$

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

1ª etapa: Transformar $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ en ceros.

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

1ª etapa: Transformar $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ en ceros.

2ª etapa: Transformar $a_{32}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ en ceros.

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

1ª etapa: Transformar $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ en ceros.

2ª etapa: Transformar $a_{32}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ en ceros.

3ª etapa: Transformar $a_{43}^{(3)}, \ldots, a_{n3}^{(3)}$ en ceros

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

1ª etapa: Transformar $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ en ceros.

2ª etapa: Transformar $a_{32}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ en ceros.

3ª etapa: Transformar $a_{43}^{(3)}, \ldots, a_{n3}^{(3)}$ en ceros

$\vdots$

Triangulación por el Método de Gauss

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y otro equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ que sea triangular superior.

El método se realiza por etapas:

1ª etapa: Transformar $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ en ceros.

2ª etapa: Transformar $a_{32}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ en ceros.

3ª etapa: Transformar $a_{43}^{(3)}, \ldots, a_{n3}^{(3)}$ en ceros

$\vdots$

etapa n-1: Transformar $a_{n,n-1}^{(n-1)}$ en cero.

Triangulación por el Método de Gauss

Las transformaciones en cero de cada etapa se relizarán mediante **operaciones elementales**:

Triangulación por el Método de Gauss

Las transformaciones en cero de cada etapa se relizarán mediante **operaciones elementales**: para transformar $a_{ik}^{(k)}$ en cero usado como **pivote** $a_{kk}^{(k)}$, se multiplica la ecuación número k por $-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ y se le suma la ecuación número i.

Triangulación por el Método de Gauss

Las transformaciones en cero de cada etapa se relizarán mediante **operaciones elementales**: para transformar $a_{ik}^{(k)}$ en cero usado como **pivote** $a_{kk}^{(k)}$, se multiplica la ecuación número k por $-\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ y se le suma la ecuación número i.

Para evitar pivotes nulos se permite permutar las ecuaciones desde la número k hasta la n.

Triangulación por el Método de Gauss

Las transformaciones en cero de cada etapa se relizarán mediante **operaciones elementales**: para transformar $a_{ik}^{(k)}$ en cero usado como **pivote** $a_{kk}^{(k)}$, se multiplica la ecuación número k por $-\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ y se le suma la ecuación número i.

Para evitar pivotes nulos se permite permutar las ecuaciones desde la número k hasta la n.

Ejemplo: A continuación resolvemos por el método de Gauss el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

Triangulación por el Método de Gauss

Las transformaciones en cero de cada etapa se relizarán mediante **operaciones elementales**: para transformar $a_{ik}^{(k)}$ en cero usado como **pivote** $a_{kk}^{(k)}$, se multiplica la ecuación número k por $-\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ y se le suma la ecuación número i.

Para evitar pivotes nulos se permite permutar las ecuaciones desde la número k hasta la n.

Ejemplo: A continuación resolvemos por el método de Gauss el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulación por el Método de Gauss

1ª etapa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Triangulación por el Método de Gauss

1ª etapa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

2ª etapa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 3 & \frac{13}{3} \end{array}\right)$$

Triangulación por el Método de Gauss

3ª etapa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{2} & 3 & -\dfrac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & -\dfrac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{11}{2} & -\dfrac{43}{18} \end{array}\right)$$

Triangulación por el Método de Gauss

3ª etapa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{43}{18} \end{array}\right)$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -\frac{14}{33} \\ -\frac{4}{33} \\ \frac{23}{33} \\ \frac{86}{33} \end{pmatrix}$$

Triangulación por el Método de Gauss

El coste del método de Gauss (fase de triangulación) es

Triangulación por el Método de Gauss

El coste del método de Gauss (fase de triangulación) es

$$\boxed{c(Gauss_n) = \frac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6} = O\left(\frac{2n^3}{3}\right).}$$

Triangulación por el Método de Gauss

El coste del método de Gauss (fase de triangulación) es

$$\boxed{c(Gauss_n) = \frac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6} = O\left(\frac{2n^3}{3}\right).}$$

Faltaría añadirle el coste de la sustitución regresiva.

Triangulación por el Método de Gauss

El coste del método de Gauss (fase de triangulación) es

$$\boxed{c(Gauss_n) = \frac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6} = O\left(\frac{2n^3}{3}\right).}$$

Faltaría añadirle el coste de la sustitución regresiva.

En la siguiente tabla se calculan algunos costes y tiempos de triangulación con el método de Gauss en una máquina que realice 10^6 operaciones por segundo.

Triangulación por el Método de Gauss

El coste del método de Gauss (fase de triangulación) es

$$\boxed{c(Gauss_n) = \frac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6} = O\left(\frac{2n^3}{3}\right).}$$

Faltaría añadirle el coste de la sustitución regresiva.

En la siguiente tabla se calculan algunos costes y tiempos de triangulación con el método de Gauss en una máquina que realice 10^6 operaciones por segundo.

Algunos costes con el método de Gauss

n	Coste del Método de Gauss	Tiempo (10^6 oper/s)
5	90	90 microsegundos
10	705	0,7 milisegundos
20	5510	5,5 milisegundos
100	671550	0,67 segundos
1000	667 millones	11 minutos

Variante de Gauss-Jordan

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en un sistema equivalente $\mathbf{Dx} = \mathbf{c}$, con $\mathbf{D}$ una matriz diagonal.

Variante de Gauss-Jordan

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en un sistema equivalente $\mathbf{Dx} = \mathbf{c}$, con $\mathbf{D}$ una matriz diagonal.

En cada etapa k se deben hacer cero las posiciones $a_{1k}^{(k)}, \ldots, a_{k-1,k}^{(k)}, a_{k+1,k}^{(k)}, \ldots, a_{nk}^{(k)}$, donde $k = 1, \ldots, n$ (n etapas).

Variante de Gauss-Jordan

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en un sistema equivalente $\mathbf{Dx} = \mathbf{c}$, con $\mathbf{D}$ una matriz diagonal.

En cada etapa k se deben hacer cero las posiciones $a_{1k}^{(k)}, \ldots, a_{k-1,k}^{(k)}, a_{k+1,k}^{(k)}, \ldots, a_{nk}^{(k)}$, donde $k = 1, \ldots, n$ (n etapas).

El coste del método de Gauss-Jordan es $n^3 + n^2 - 2n$, a falta de añadir n divisiones para calcular las incógnitas.

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- Discusión general de sistemas de ecuaciones lineales.

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- Discusión general de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolución simultánea de sistemas de ecuaciones lineales.

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- Discusión general de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolución simultánea de sistemas de ecuaciones lineales.
- Cálculo eficiente de determinantes.

Comentarios al método de Gauss

Aplicaciones del método de Gauss

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($\det \mathbf{A} \neq 0$).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- Discusión general de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolución simultánea de sistemas de ecuaciones lineales.
- Cálculo eficiente de determinantes.
- Cálculo eficiente de inversas.

Comentarios al método de Gauss

Inconvenientes del método de Gauss

Comentarios al método de Gauss

Inconvenientes del método de Gauss

- No adecuado para sistemas muy grandes (dispersos).

Comentarios al método de Gauss

Inconvenientes del método de Gauss

- No adecuado para sistemas muy grandes (dispersos).
- Inestable.

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

cuya solución exacta es $\begin{pmatrix} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990\ldots \end{pmatrix}$.

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

cuya solución exacta es $\begin{pmatrix} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990\ldots \end{pmatrix}$.

Si aplicamos el método de Gauss con una máquina que admite solo 3 decimales se tiene la siguiente triangulación:

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

cuya solución exacta es $\begin{pmatrix} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990\ldots \end{pmatrix}$.

Si aplicamos el método de Gauss con una máquina que admite solo 3 decimales se tiene la siguiente triangulación:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 0 & -10000 & -10000 \end{array}\right)$$

Inestabilidad del Método de Gauss y Estrategia de Pivote

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

cuya solución exacta es $\begin{pmatrix} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990\ldots \end{pmatrix}$.

Si aplicamos el método de Gauss con una máquina que admite solo 3 decimales se tiene la siguiente triangulación:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 0 & -10000 & -10000 \end{array}\right)$$

y se obtiene como solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pivote parcial

Pivote Parcial

Se busca la ecuación $i > k$ tal que $|a_{ik}| = \max_{k \leq r \leq n} |a_{rk}|$ y se permuta con la ecuación k.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{exacta} \left(\begin{array}{r} 1{,}00010... \\ 0{,}99990 \end{array} \right)$$

Pivote parcial

Pivote Parcial

Se busca la ecuación $i > k$ tal que $|a_{ik}| = \max_{k \leq r \leq n} |a_{rk}|$ y se permuta con la ecuación k.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{exacta} \left(\begin{array}{c} 1{,}00010... \\ 0{,}99990 \end{array}\right)$$

Efectuando un cambio de fila

Pivote parcial

Pivote Parcial

Se busca la ecuación $i > k$ tal que $|a_{ik}| = \max_{k \leq r \leq n} |a_{rk}|$ y se permuta con la ecuación k.

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{exacta} \left(\begin{array}{r} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990 \end{array}\right)$$

Efectuando un cambio de fila

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0{,}0001 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{p.p.} \left(\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}\right).$$

Pivote parcial

Pivote Parcial

Se busca la ecuación $i > k$ tal que $|a_{ik}| = \max_{k \leq r \leq n} |a_{rk}|$ y se permuta con la ecuación k.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{exacta} \left(\begin{array}{c} 1{,}00010\ldots \\ 0{,}99990 \end{array} \right)$$

Efectuando un cambio de fila

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0{,}0001 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{p.p.} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right).$$

Pero

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \end{array} \right) \xrightarrow{p.p.} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right).$$

Pivote parcial

Pivote parcial con escalado

Igual que el pivote parcial, reescalando las ecuaciones antes del pivotaje para que

$$\max |a_{ij}^{(1)}| = \max |a_{2j}^{(2)}| = \cdots = \max |a_{nj}^{(n)}|.$$

Pivote Total

Pivote Total

Se toma (i, j) tal que

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{\substack{k \leq r \leq n \\ k \leq s \leq n}} |a_{rs}^{(k)}|,$$

y se permutan las ecuaciones i y k, y las incógnitas j y k.

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right)$$

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right),$$

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si se produce una pequeña variación en los términos independientes (datos) se produce una gran modificación en la solución (resultados):

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si se produce una pequeña variación en los términos independientes (datos) se produce una gran modificación en la solución (resultados):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32{,}1 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 22{,}9 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33{,}1 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 30{,}9 \end{array}\right)$$

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si se produce una pequeña variación en los términos independientes (datos) se produce una gran modificación en la solución (resultados):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32{,}1 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 22{,}9 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33{,}1 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 30{,}9 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ -12{,}6 \\ 4{,}5 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para entender el concepto de condicionamiento, consideremos el siguiente ejemplo de R.S. Wilson:Se trata del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada y solución exacta son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si se produce una pequeña variación en los términos independientes (datos) se produce una gran modificación en la solución (resultados):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32{,}1 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 22{,}9 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33{,}1 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 30{,}9 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacta} \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ -12{,}6 \\ 4{,}5 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Esto indica que el método de resolución de sistemas de ecuaciones empleado (Gauss) están mal condicionado.

Factorización LU

Resolución de un sistema factorizado en LU

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior (low) y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior (upper), entonces el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede resover en dos fases:

Factorización LU

Resolución de un sistema factorizado en LU

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior (low) y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior (upper), entonces el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede resover en dos fases:

a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$,

Factorización LU

Resolución de un sistema factorizado en LU

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior (low) y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior (upper), entonces el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede resover en dos fases:

a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$,

b) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$,

Factorización LU

Resolución de un sistema factorizado en LU

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior (low) y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior (upper), entonces el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede resover en dos fases:

a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$,

b) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$,

con un coste de $2n^2$ operaciones.

Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

Factorización LU

Resolución de un sistema factorizado en LU

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior (low) y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior (upper), entonces el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede resover en dos fases:

a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$,

b) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$,

con un coste de $2n^2$ operaciones.

Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ -17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Factorización LU

...

Aplicando el algoritmo de resolución de un sistema factorizado en LU, obtenemos

Factorización LU

...

Aplicando el algoritmo de resolución de un sistema factorizado en LU, obtenemos

- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -17 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right)$$

Factorización LU

...

Aplicando el algoritmo de resolución de un sistema factorizado en LU, obtenemos

- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -17 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Factorización LU

...

Aplicando el algoritmo de resolución de un sistema factorizado en LU, obtenemos

- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -17 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{y} = \left(\begin{array}{r} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right).$$
- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Factorización LU

...

Aplicando el algoritmo de resolución de un sistema factorizado en LU, obtenemos

- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -17 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Factorización LU

Algoritmo del la Factorización LU

Para $k = 1, \ldots, n$,

Factorización LU

Algoritmo del la Factorización LU

Para $k = 1, \ldots, n$,

$$\ell_{kk} u_{kk} \quad = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk};$$

Factorización LU

Algoritmo del la Factorización LU

Para $k = 1, \dots, n,$

$$\begin{aligned} \ell_{kk} u_{kk} &= a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk}; \\ \ell_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, \quad i = k+1, \dots, n; \end{aligned}$$

Factorización LU

Algoritmo del la Factorización LU

Para $k = 1, \ldots, n$,

$$
\begin{aligned}
\ell_{kk} u_{kk} &= a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk}; \\
\ell_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n; \\
u_{kj} &= \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rj}}{\ell_{kk}}, \quad j = k+1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Factorización LU

Coste general de la factorización: $\dfrac{4n^3+2n}{6} = O(\dfrac{2n^3}{3})$, (a falta de añadir n^2+n^2).

Factorización LU

Coste general de la factorización: $\dfrac{4n^3+2n}{6} = O(\dfrac{2n^3}{3})$, (a falta de añadir n^2+n^2).

Algunas variantes:

Factorización LU

Coste general de la factorización: $\dfrac{4n^3+2n}{6} = O(\dfrac{2n^3}{3})$, (a falta de añadir n^2+n^2).

Algunas variantes:

- **Variante de Doolittle**: **L** tiene diagonal de 1.

Factorización LU

Coste general de la factorización: $\dfrac{4n^3+2n}{6} = O(\dfrac{2n^3}{3})$, (a falta de añadir n^2+n^2).

Algunas variantes:

- **Variante de Doolittle**: **L** tiene diagonal de 1.
- **Variante de Crout**: **U** tiene diagonal de 1.

Factorización LU

Factorización LU para matrices tridiagonales

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es tridiagonal ($a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$), entonces **L** y **U** también lo son y, para $k = 1, \ldots, n$,

Factorización LU

Factorización **LU** para matrices tridiagonales

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es tridiagonal ($a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$), entonces $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ también lo son y, para $k = 1, \ldots, n$,

$$\ell_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \ell_{k,k-1} u_{k-1,k};$$

Factorización LU

Factorización **LU** para matrices tridiagonales

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es tridiagonal ($a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$), entonces $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ también lo son y, para $k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\ell_{kk} u_{kk} &= a_{kk} - \ell_{k,k-1} u_{k-1,k}; \\
\ell_{k+1,k} &= \frac{a_{k+1,k}}{u_{kk}}; \\
u_{k,k+1} &= \frac{a_{k,k+1}}{\ell_{kk}}.
\end{aligned}$$

Coste: $4n - 3$ para factorizar y $2(3n-2)$ para resolver.

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva.

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t.$$

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t.$$

Método de Cholesky

Para $k = 1, \ldots, n$,

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t.$$

Método de Cholesky

Para $k = 1, \ldots, n$,

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{k,r}^2};$$

Método de Cholesky

Se trata de un método de descomposición LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t.$$

Método de Cholesky

Para $k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\ell_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{k,r}^2}; \\
\ell_{i,k} &= \frac{a_{i,k} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir}\ell_{kr}}{\ell_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Método de Cholesky

Coste: $O(\frac{n^3}{3})$.

Método de Cholesky

Coste: $O(\frac{n^3}{3})$.

Propiedades

Método de Cholesky

Coste: $O(\frac{n^3}{3})$.

Propiedades

- Sirve para saber si una matriz simétrica es definida postiva

Método de Cholesky

Coste: $O(\frac{n^3}{3})$.

Propiedades

- Sirve para saber si una matriz simétrica es definida postiva
- Es estable.

Métodos iterativos usuales

Consisten en descomponer la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$, $\mathbf{L}$ es triangular inferior con $\ell_{ij} = -a_{ij}$, para $i > j$, y $\mathbf{U}$ es triangular superior, con $u_{ij} = -a_{ij}$, para $i < j$.

Métodos iterativos usuales

Consisten en descomponer la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$, $\mathbf{L}$ es triangular inferior con $\ell_{ij} = -a_{ij}$, para $i > j$, y $\mathbf{U}$ es triangular superior, con $u_{ij} = -a_{ij}$, para $i < j$.

Suponemos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ son invertibles.

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método iterativo

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método iterativo

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{B}_J\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}_J,$$

Método de Jacobi

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método iterativo

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{B}_J\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}_J,$$

siendo

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Método de Jacobi

$$\mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Método de Jacobi

$$\mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el valor de cada incógnita en cada paso del método m es

Método de Jacobi

$$\mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el valor de cada incógnita en cada paso del método m es

$$x_i^{(m+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Método de Gauss-Seidel

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

Método de Gauss-Seidel

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{b}.$$

Método de Gauss-Seidel

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Método de Gauss-Seidel

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método interativo

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{Ux}^{(m)} + \mathbf{b},$$

Método de Gauss-Seidel

De $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se tiene que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{b}.$$

Luego

$$\mathbf{x} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método interativo

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{Ux}^{(m)} + \mathbf{b},$$

que se trata de un sistema triangular inferior en cada paso, que se resuelve por sustitución progresiva.

Método de Gauss-Seidel

Por tanto, el valor de cada incógnita en cada paso del método m es

Método de Gauss-Seidel

Por tanto, el valor de cada incógnita en cada paso del método m es

$$x_i^{(m+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Método de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$, se considera la descomposición de la matriz de coeficientes en la forma:

Método de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$, se considera la descomposición de la matriz de coeficientes en la forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

Método de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$, se considera la descomposición de la matriz de coeficientes en la forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

y, por tanto,

Método de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$, se considera la descomposición de la matriz de coeficientes en la forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})\mathbf{x} = ((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U})\mathbf{x} + \omega\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método interativo:

Método de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$, se considera la descomposición de la matriz de coeficientes en la forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})\mathbf{x} = ((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U})\mathbf{x} + \omega\mathbf{b}.$$

Teniendo en cuenta la anterior igualdad se deduce el siguiente método interativo:

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})\mathbf{x}^{(m+1)} = ((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U})\mathbf{x}^{(m)} + \omega\mathbf{b}.$$

Método de relajación

Por tanto, el valor de la incógnita i-ésima en cada paso m es

Método de relajación

Por tanto, el valor de la incógnita i-ésima en cada paso m es

$$x_i^{(m+1)} = \omega \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}} + (1-\omega) x_i^{(m)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Método de relajación

Por tanto, el valor de la incógnita i-ésima en cada paso m es

$$x_i^{(m+1)} = \omega \frac{b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}} + (1-\omega) x_i^{(m)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se pueden demostrar los sisguientes resultados de convergencia:

Método de relajación

Por tanto, el valor de la incógnita i-ésima en cada paso m es

$$x_i^{(m+1)} = \omega \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}} + (1-\omega) x_i^{(m)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se pueden demostrar los sisguientes resultados de convergencia:

Teorema

Si $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonalmente dominante entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

Método de relajación

Por tanto, el valor de la incógnita i-ésima en cada paso m es

$$x_i^{(m+1)} = \omega \frac{b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{(m)}}{a_{ii}} + (1-\omega) x_i^{(m)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se pueden demostrar los sisguientes resultados de convergencia:

Teorema

Si $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonalmente dominante entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

Teorema

Si el método de relajación converge entonces $\omega \in [0, 2]$.