Tema 2
Resolución de Ecuaciones No Lineales

Departamento de Matemática Aplicada. Cálculo Numérico

E.T.S.I. Informática

Indice

Introducción

Problema: Oscilación amortiguada de una estructura

Introducción

Problema: Oscilación amortiguada de una estructura

Supongamos que la oscilación de una estructura, dotada de un sistema de amortiguación, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la función

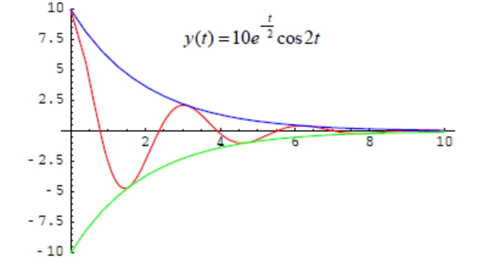
$$y(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t.$$

Introducción

Problema: Oscilación amortiguada de una estructura

Supongamos que la oscilación de una estructura, dotada de un sistema de amortiguación, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la función

$$y(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t.$$

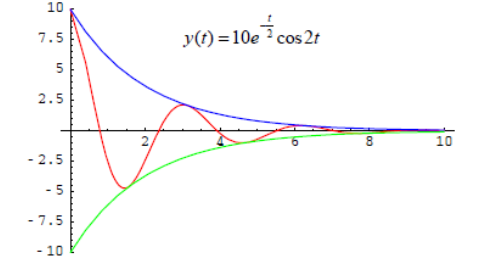


Introducción

Problema: Oscilación amortiguada de una estructura

Supongamos que la oscilación de una estructura, dotada de un sistema de amortiguación, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la función

$$y(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t.$$



Introducción

...

Se trata de resolver la ecuación

$$10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t = 4.$$

de incógnita t.

Introducción

...

Se trata de resolver la ecuación

$$10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t = 4.$$

de incógnita t. Este problema es imposible de resolver por medios analíticos sencillos.

Introducción

...

Se trata de resolver la ecuación

$$10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t = 4.$$

de incógnita t. Este problema es imposible de resolver por medios analíticos sencillos.

En general, sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideraremos la **ecuación en una variable**

$$f(x) = 0.$$

Introducción

...

Se trata de resolver la ecuación

$$10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t = 4.$$

de incógnita t. Este problema es imposible de resolver por medios analíticos sencillos.

En general, sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideraremos la **ecuación en una variable**

$$f(x) = 0.$$

Definición 1

El número $s \in \Omega$ se dice una **solución de la ecuación** *si se verifica que $f(s) = 0$, es decir, si s es una raíz de la función f.*

Algoritmo del método de Bisección

El método de Bisección para la resoluci0́on de la ecuación $f(x) = 0$ se basa en el Teorema de Bolzano que nos asegura la existencia de, al menos, una raíz de una función $f(x)$ en un cierto intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones.

Algoritmo del método de Bisección

El método de Bisección para la resoluci0́on de la ecuación $f(x) = 0$ se basa en el Teorema de Bolzano que nos asegura la existencia de, al menos, una raíz de una función $f(x)$ en un cierto intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$.

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

1. $a_0 = a, \; b_0 = b$

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

1. $a_0 = a,\ b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a,b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x)=0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

1. $a_0 = a, \; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:
   - $m_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$

Algoritmo del método de Bisección

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots$, hacer:
    - $m_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$
    - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$

Algoritmo del método de Bisección

Ejemplo

Resolver mediante al algoritmo de bisección la ecuación

$$e^x - x = 0$$

en $[0, 1]$.

Algoritmo del método de Bisección

Ejemplo

Resolver mediante al algoritmo de bisección la ecuación

$$e^x - x = 0$$

en $[0, 1]$.

n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	m_n	$\operatorname{sgn} f(m_n)$
0	0	1	0.5	+
1	0.5	1	0.75	−
2	0.5	0.75	0.625	−
3	0.5	0.625	0.5625	+
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	0.566407	0.570313	0.568360	−
9	0.566407	0.568360	0.567384	−
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Análisis del Método de Bisección

Cálculo previo del número de interaciones

Análisis del Método de Bisección

Cálculo previo del número de interaciones

Recordemos que

Análisis del Método de Bisección

Cálculo previo del número de interaciones

Recordemos que

Se define el **error absoluto** de una aproximación s' respecto del valor exacto s como

$$e = |s' - s|.$$

Análisis del Método de Bisección

Cálculo previo del número de interaciones

Recordemos que

> Se define el **error absoluto** de una aproximación s' respecto del valor exacto s como
> $$e = |s' - s|.$$

Para garantizar que el error del Método de Bisección sea menor o igual que un cierto valor de tolerancia ε se aplica el siguiente resultado.

Análisis del Método de Bisección

Teorema1 (Error absoluto máximo del Método de Bisección)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$ *y* $f(s) = 0$*, para algún* $s \in (a, b)$*.*

Análisis del Método de Bisección

Teorema1 (Error absoluto máximo del Método de Bisección)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$ *y* $f(s) = 0$*, para algún* $s \in (a, b)$*.*

Sea $\{m_n\}_{n=0,1,...}$ *la sucesión de aproximaciones de* s *obtenidas mediante el Método de Bisección y* $e_n = |s - m_n|$*, para* $n = 0, 1, \ldots$*.*

Entonces

Análisis del Método de Bisección

Teorema1 (Error absoluto máximo del Método de Bisección)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$ *y* $f(s) = 0$, *para algún* $s \in (a, b)$.

Sea $\{m_n\}_{n=0,1,\ldots}$ *la sucesión de aproximaciones de* s *obtenidas mediante el Método de Bisección y* $e_n = |s - m_n|$, *para* $n = 0, 1, \ldots$.

Entonces

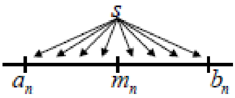
$$\boxed{e_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.}$$

Análisis del Método de Bisección

Esquema de Demostración

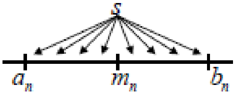
Análisis del Método de Bisección

Esquema de Demostración



Análisis del Método de Bisección

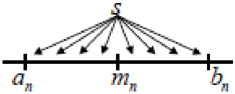
Esquema de Demostración



$$
\begin{aligned}
e_n = \quad & |m_n - s| \leq m_n - a_n = b_n - m_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \\
& \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots = \\
& \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).
\end{aligned}
$$

Análisis del Método de Bisección

Esquema de Demostración



$$
\begin{aligned}
e_n = \quad & |m_n - s| \leq m_n - a_n = b_n - m_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \\
& \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots = \\
& \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).
\end{aligned}
$$

Luego

$$e_n \leq \frac{b.a}{2^{n+1}}.$$

Análisis del Método de Bisección

Por tanto, para garantizar que $e_n < \varepsilon$, se debe verificar que

$$\boxed{n \geq \frac{log\dfrac{b-a}{\varepsilon}}{log 2} - 1.}$$

Análisis del Método de Bisección

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Análisis del Método de Bisección

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Se trata de resolver la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Análisis del Método de Bisección

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Se trata de resolver la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t - 4 = 0.$$

Supongamos que deseamos que $e_n \leq \varepsilon = 10^{-3}$.

Análisis del Método de Bisección

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Se trata de resolver la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t - 4 = 0.$$

Supongamos que deseamos que $e_n \leq \varepsilon = 10^{-3}$.

Como $f(0) = 6 > 0$ y $f(1) = -6.524 < 0$ entonces podemos tomar $[a, b] = [0, 1]$.

Análisis del Método de Bisección

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Se trata de resolver la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Supongamos que deseamos que $e_n \leq \varepsilon = 10^{-3}$.

Como $f(0) = 6 > 0$ y $f(1) = -6.524 < 0$ entonces podemos tomar $[a, b] = [0, 1]$.

El número de iteraciones que debemos realizar para asegurar la tolerancia de error considerada es:

$$n \geq \frac{log\,\dfrac{1}{10^{-3}}}{log 2} - 1 \approx 8.966,$$

Análisis del Método de Bisección

...

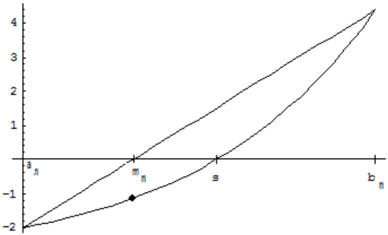
n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	m_n	$\operatorname{sgn} f(m_n)$
0	0	1	0.5	+
1	0.5	1	0.75	−
2	0.5	0.75	0.625	−
3	0.5	0.625	0.5625	−
4	0.5	0.5625	0.5313	−
5	0.5	0.5313	0.5157	−
6	0.5	0.5157	0.5079	+
7	0.5079	0.5157	0.5118	+
8	0.5118	0.5157	0.5138	−
9	0.5118	0.5138	$\boxed{0.5128}$	

Método de Regula-Falsi

Se trata de realizar un **refinamiento** del Método de de Bisección, eligiendo la aproxiamción m a distancias de a y b proporcionales a $f(a)$ y $f(b)$.

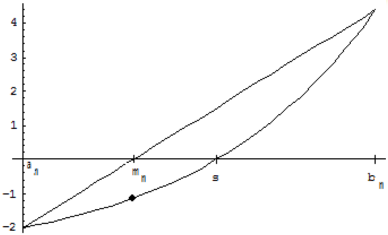
Método de Regula-Falsi

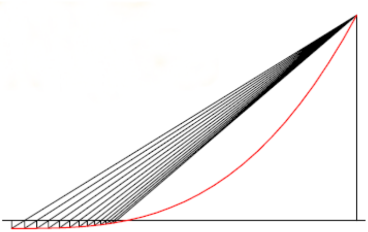
Se trata de realizar un **refinamiento** del Método de de Bisección, eligiendo la aproxiamción m a distancias de a y b proporcionales a $f(a)$ y $f(b)$.



Método de Regula-Falsi

Se trata de realizar un **refinamiento** del Método de de Bisección, eligiendo la aproxiamción m a distancias de a y b proporcionales a $f(a)$ y $f(b)$.





Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Se verifica que:

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Se verifica que:

- m_n converge más rápidamente a s que en el Método de Bisección.

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Se verifica que:

- m_n converge más rápidamente a s que en el Método de Bisección.
- Un extremo es fijo.

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Se verifica que:

- m_n converge más rápidamente a s que en el Método de Bisección.
- Un extremo es fijo.
- La amplitud de los intervalos no tiene a cero.

Método de Regula-Falsi

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$

Se verifica que:

- m_n converge más rápidamente a s que en el Método de Bisección.
- Un extremo es fijo.
- La amplitud de los intervalos no tiene a cero.
- No admite acotación del error.

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a,\ b_0 = b$

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a, \; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a,\ b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a, \; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
   - Si $f(a_n) f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$.

Método de Regula-Falsi

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a, \; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots$, hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
   - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$.

Método de la secante

Se trata de un método iterativo en el que, en cada paso, se calcula una aproximación de la solución en lugar de un intervalo que la contiene.

Método de la secante

Se trata de un método iterativo en el que, en cada paso, se calcula una aproximación de la solución en lugar de un intervalo que la contiene.

Se parte de $x_0 = a$ y $x_1 = b$ y se calcula, iterativamente para cada $n \geq 1$, la intersección de la secante que une los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1})$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisa, obteniéndose la abscisa

Método de la secante

Se trata de un método iterativo en el que, en cada paso, se calcula una aproximación de la solución en lugar de un intervalo que la contiene.

Se parte de $x_0 = a$ y $x_1 = b$ y se calcula, iterativamente para cada $n \geq 1$, la intersección de la secante que une los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1})$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisa, obteniéndose la abscisa

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.}$$

Método de la secante

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Método de la secante

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Algoritmo del Método de la Secante

Método de la secante

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Algoritmo del Método de la Secante

1. $x_0 = a$, $x_1 = b$

Método de la secante

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Algoritmo del Método de la Secante

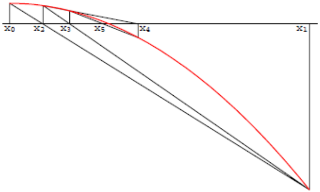
1. $x_0 = a$, $x_1 = b$
2. Para $n = 1, 2 \ldots$, hacer $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Método de la secante

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Algoritmo del Método de la Secante

1. $x_0 = a$, $x_1 = b$
2. Para $n = 1, 2 \ldots$, hacer $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$



Método de la secante

Ejemplo

Calculemos mediante 5 pasos del método de la secante una aproximacin de la solución del problema de la oscilación amortiguada de una estructura:

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Método de la secante

Ejemplo

Calculemos mediante 5 pasos del método de la secante una aproximacin de la solución del problema de la oscilación amortiguada de una estructura:

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t - 4 = 0.$$

Tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtiene la siguiente sucesión de aproximaciones:

Método de la secante

Ejemplo

Calculemos mediante 5 pasos del método de la secante una aproximacin de la solución del problema de la oscilación amortiguada de una estructura:

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t - 4 = 0.$$

Tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtiene la siguiente sucesión de aproximaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.479078 \\ x_3 &= 0.517905 \\ x_4 &= 0.513640 \\ x_5 &= 0.513652, \end{aligned}$$

Método de la secante

Ejemplo

Calculemos mediante 5 pasos del método de la secante una aproximacin de la solución del problema de la oscilación amortiguada de una estructura:

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtiene la siguiente sucesión de aproximaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.479078 \\ x_3 &= 0.517905 \\ x_4 &= 0.513640 \\ x_5 &= 0.513652, \end{aligned}$$

con lo cual podemos afirmar que una aproximación con cuatro decimales exactas de la solución es 0.5126.

Método de Newton-Raphson

Se trata de llevar el límite el método de la secante y, por tanto, en cada iteración n, considerar la recta tangente a $f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$ y tomar como siguiente aproximación x_{n+1} la intersección de dicha tangente con el eje de abscisas.

Método de Newton-Raphson

Se trata de llevar el límite el método de la secante y, por tanto, en cada iteración n, considerar la recta tangente a $f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$ y tomar como siguiente aproximación x_{n+1} la intersección de dicha tangente con el eje de abscisas.

Por tanto, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

se tiene que

Método de Newton-Raphson

Se trata de llevar el límite el método de la secante y, por tanto, en cada iteración n, considerar la recta tangente a $f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$ y tomar como siguiente aproximación x_{n+1} la intersección de dicha tangente con el eje de abscisas.

Por tanto, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

se tiene que

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$

Método de Newton-Raphson

Luego el algoritmo del Método de Newton-Raphson es

Método de Newton-Raphson

Luego el algoritmo del Método de Newton-Raphson es

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

1. Dado x_0

Método de Newton-Raphson

Luego el algoritmo del Método de Newton-Raphson es

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

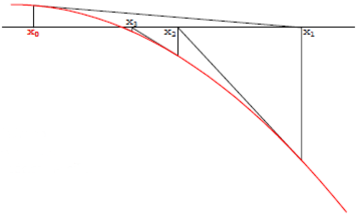
1. Dado x_0
2. Para $n = 1, 2 \ldots,$ hacer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Método de Newton-Raphson

Luego el algoritmo del Método de Newton-Raphson es

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

1. Dado x_0
2. Para $n = 1, 2 \ldots,$ hacer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$
- Elegir x_0 puede ser delicado

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$
- Elegir x_0 puede ser delicado
- La acotación del error es complicada

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$
- Elegir x_0 puede ser delicado
- La acotación del error es complicada
- El criterio de parada más usual es la repetición de cifras.

Método de Newton-Raphson

Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$
- Elegir x_0 puede ser delicado
- La acotación del error es complicada
- El criterio de parada más usual es la repetición de cifras.

Método de Newton-Raphson

Ejemplos

A continuación presentamos la solución aproximada de algunas ecuaciones con el método:

Método de Newton-Raphson

Ejemplos

A continuación presentamos la solución aproximada de algunas ecuaciones con el método:

Ecuación	$x^2-5=0$	$\frac{1}{x}-7=0$	$\frac{4}{x^2+1}-3=0$
Iteración $x_{n+1}=$	$\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$	$2x_n-7x_n^2$	$\frac{1+6x^2-3x^4}{8x}$
Resultados	$x_0=2.5$ $x_1=2.250000000$ $x_2=2.236111111$ $x_3=2.236067978$ $x_4=2.236067977$	$x_0=0.1$ $x_1=0.1300000000$ $x_2=0.1417000000$ $x_3=0.1428477700$ $x_4=0.1428571422$ $x_5=0.1428571429$	$x_0=2.18$ $x_1=-2.192747550$ $x_2=2.252073680$ $x_3=-2.538745859$ $x_4=4.182754570$ $x_5=-24.27521722$ $x_6=5346182113$ $x_7=-5.7301\times10^{10}$

Método de Newton-Raphson

¿Qué ha ocurrido en el tercer caso?

Método de Newton-Raphson

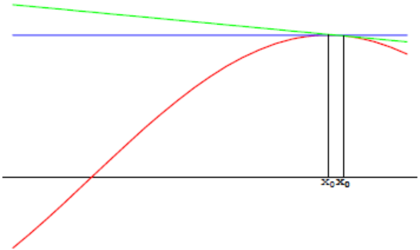
¿Qué ha ocurrido en el tercer caso?

Obviamente se ha presentado un caso de divergencia:

Método de Newton-Raphson

¿Qué ha ocurrido en el tercer caso?

Obviamente se ha presentado un caso de divergencia:

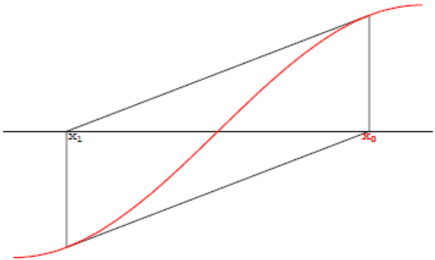


Método de Newton-Raphson

También se podría haber presentado un caso de oscilación como el siguiendo gráfico indica:

Método de Newton-Raphson

También se podría haber presentado un caso de oscilación como el siguiendo gráfico indica:



Métodos Iterativos

Se trata de transformar la ecuación $f(x) = 0$ (cálculo de una raíz de la función $f(x)$) en una ecuación del tipo $x = g(x)$ (cálculo de un punto fijo de la función $g(x)$) de forma que sean equivalentes, es decir, tengan la misma solución.

Métodos Iterativos

Se trata de transformar la ecuación $f(x) = 0$ (cálculo de una raíz de la función $f(x)$) en una ecuación del tipo $x = g(x)$ (cálculo de un punto fijo de la función $g(x)$) de forma que sean equivalentes, es decir, tengan la misma solución.

Ejemplo (Método de Newton-Raphson)

Si $f(x)$ es una función de clase C^1 y s una raíz ($f(s) = 0$) tal que $f'(s) \neq 0$, entonces, resolver $f(x) = 0$ es un problema equivalente a calcular un punto fijo de la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ya que $f(s) = 0$ si y sólo si $g(s) = s$, como se puede comprobar fácilmente.

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Teorema del punto fijo

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando:

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Teorema del punto fijo

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando:

- $g([a, b]) \subseteq (a, b)$,

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Teorema del punto fijo

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable verificando:*

- $g([a, b]) \subseteq (a, b)$,
- $\max_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1.$

Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$.El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Teorema del punto fijo

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando:

- $g([a, b]) \subseteq (a, b)$,
- $\max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

Entonces existe un único $s \in [a, b]$ tal que $g(s) = s$ y, además, para todo $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_n\}$ generada por la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a s.

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$.

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$,

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s, t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t - s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s, t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t - s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Sea ahora $\{x_n\}$ la sucesión generada a partir de $x_0 \in [a, b]$ mediante la iteración $x_{n+1} = g(x_n$, para $m \geq 0$, y sea $L = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s, t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t - s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Sea ahora $\{x_n\}$ la sucesión generada a partir de $x_0 \in [a, b]$ mediante la iteración $x_{n+1} = g(x_n,$ para $m \geq 0$, y sea $L = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$.

Se verifica entonces que

Algoritmo de los métodos iterativos

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que, por el Teorema de Bolzano, existe $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s, t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t - s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Sea ahora $\{x_n\}$ la sucesión generada a partir de $x_0 \in [a, b]$ mediante la iteración $x_{n+1} = g(x_n$, para $m \geq 0$, y sea $L = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$.

Se verifica entonces que

$$\begin{aligned} e_n &= |x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(x)| e_{n-1} \\ &\leq L e_{n-1} \leq L^2 e_{n-2} \leq \cdots \leq L^n e_0. \end{aligned}$$

Algoritmo de los métodos iterativos

Algoritmo de un Método Iterativo

Algoritmo de los métodos iterativos

Algoritmo de un Método Iterativo

1. Dado $x_0 \in [a, b]$

Algoritmo de los métodos iterativos

Algoritmo de un Método Iterativo

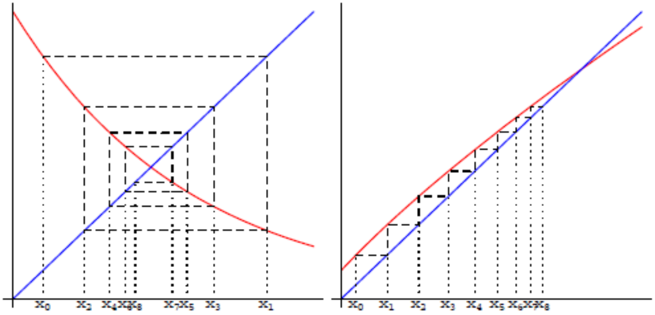
1. Dado $x_0 \in [a, b]$
2. Para $n = 1, 2 \ldots,$ hacer $x_{n+1} = g(x_n)$

Interpretación gráfica de los métodos iterativos

Según sea $g(x)$ y se elija x_0, los métodos iterativos pueden ser convergentes o divergentes y, en ambos casos pueden variar en forma espiral o en escalera, como se indican en los siguientes gráficos.

Interpretación gráfica de los métodos iterativos

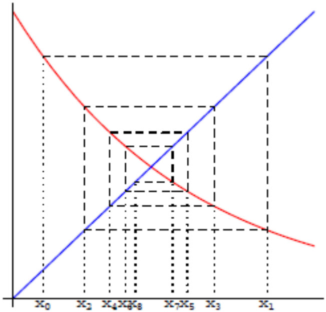
Según sea $g(x)$ y se elija x_0, los métodos iterativos pueden ser convergentes o divergentes y, en ambos casos pueden variar en forma espiral o en escalera, como se indican en los siguientes gráficos.



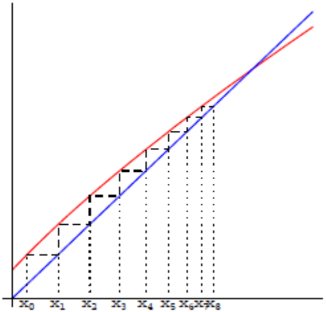
Convergencia oscilante o en espiral   Convergencia monótona o en escalera

Interpretación gráfica de los métodos iterativos

Según sea $g(x)$ y se elija x_0, los métodos iterativos pueden ser convergentes o divergentes y, en ambos casos pueden variar en forma espiral o en escalera, como se indican en los siguientes gráficos.



Convergencia oscilante o en espiral



Convergencia monótona o en escalera

Convergencia de los métodos iterativos

Definición 2

Se define el **orden de convergencia** *de una sucesión* $\{x_n\}$ *hacia un valor* s *como aquel número real* $p \geq 1$ *tal que*

Convergencia de los métodos iterativos

Definición 2

Se define el **orden de convergencia** *de una sucesión* $\{x_n\}$ *hacia un valor* s *como aquel número real* $p \geq 1$ *tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{m+1}}{e_n^p} = \lambda \neq 0, \infty.$$

Convergencia de los métodos iterativos

Definición 2

Se define el **orden de convergencia** *de una sucesión* $\{x_n\}$ *hacia un valor* s *como aquel número real* $p \geq 1$ *tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{m+1}}{e_n^p} = \lambda \neq 0, \infty.$$

Se deduce que si $\{x_n\} \to s$ *con orden de convergencia* $p \leq 1$ *entonces*

Convergencia de los métodos iterativos

Definición 2

Se define el **orden de convergencia** *de una sucesión* $\{x_n\}$ *hacia un valor* s *como aquel número real* $p \geq 1$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{m+1}}{e_n^p} = \lambda \neq 0, \infty.$$

Se deduce que si $\{x_n\} \to s$ *con orden de convergencia* $p \leq 1$ *entonces*

$$d_{n+1} \approx \lambda e_n^p, \quad n \to +\infty.$$

Convergencia de los métodos iterativos

Algunos órdenes de convergencia de los métodos estudiados son los siguientes:

Convergencia de los métodos iterativos

Algunos órdenes de convergencia de los métodos estudiados son los siguientes:

Método	Orden
Bisección	1 (lineal)
Secante	$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ (superlineal)
Newton-Raphson	2 (cuadrático)

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Local

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *en un entorno del punto fijo* s.

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Local

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *en un entorno del punto fijo* s. *Si* $|g'(s)| < 1$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que en el intervalo* $[s - \delta, s + \delta]$ *se dan las condiciones del teorema del punto fijo.*

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Local

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en un entorno del punto fijo s. Si $|g'(s)| < 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que en el intervalo $[s - \delta, s + \delta]$ se dan las condiciones del teorema del punto fijo.

Demostración Basta tomar L tal que $|g'(s)| < L < 1$ y $\delta > 0$ tal que $|g'(x)| \leq L$, para todo $x \in [s - \delta, s + \delta]$. $\square$

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Cuadrática

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *en un entorno del punto fijo* s*.*

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Cuadrática

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *en un entorno del punto fijo* s*. Si* $|g'(s) = 0$*, entonces la convergencia* $\{x_n\} \to s$ *es al menos cuadrática.*

Demostración Teniendo en cuenta

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Cuadrática

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno del punto fijo s. Si $|g'(s) = 0$, entonces la convergencia $\{x_n\} \to s$ es al menos cuadrática.

Demostración Teniendo en cuentaque

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| \\ &= |g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(c_n)(x_n - s)^2| \\ & 0 + \frac{1}{2}g''(c_n)e_n^2; \end{aligned}$$

Convergencia de los métodos iterativos

Teorema de Convergencia Cuadrática

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno del punto fijo s. Si $|g'(s) = 0$, entonces la convergencia $\{x_n\} \to s$ es al menos cuadrática.

Demostración Teniendo en cuentaque

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| \\ &= |g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(c_n)(x_n - s)^2| \\ & 0 + \frac{1}{2}g''(c_n)e_n^2; \end{aligned}$$

concluimos que

$$\lim \frac{e_{n+1}}{} = \lim \frac{1}{}|g''(c_n)| = \frac{1}{}|g''(s)| \neq \infty.$$

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia LOCAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno de s tal que $f(s) = 0$ y $f'(s) \neq 0$.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia LOCAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno de s tal que $f(s) = 0$ y $f'(s) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x_0 \in [s - \delta, s + \delta]$, la sucesión del método de Newton-Raphson converge a s.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia LOCAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno de s tal que $f(s) = 0$ y $f'(s) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x_0 \in [s - \delta, s + \delta]$, la sucesión del método de Newton-Raphson converge a s.

Además, si f es de clase $C^3[a, b]$, la convergencia es al menos cuadrática.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a, b]$ *verificando*

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a,b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0$,

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a, b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$, *para* $x \in [a, b]$,

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a,b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$, *para* $x \in [a,b]$,
3. $f''(x)f''(y) \geq 0$, *para todo* $x, y \in [a,b]$,

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a,b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$, *para* $x \in [a,b]$,
3. $f''(x)f''(y) \geq 0$, *para todo* $x, y \in [a,b]$,
4. $\max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} \leq b - a.$

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a,b]$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$, *para* $x \in [a,b]$,
3. $f''(x)f''(y) \geq 0$, *para todo* $x, y \in [a,b]$,
4. $\max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} \leq b - a.$

Entonces existe un único $s \in [a,b]$ *tal que* $f(s) = 0$ *y, para todo* $x_0 \in [a,b]$, *la sucesión del método de Newton-Raphson converge a* s.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a,b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0,$
2. $f'(x) \neq 0,$ *para* $x \in [a,b],$
3. $f''(x)f''(y) \geq 0,$ *para todo* $x, y \in [a,b],$
4. $\max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} \leq b - a.$

Entonces existe un único $s \in [a,b]$ *tal que* $f(s) = 0$ *y, para todo* $x_0 \in [a,b]$*, la sucesión del método de Newton-Raphson converge a* s*.*

Además, si $f \in C^3[a,b]$ *la convergencia es al menos cuadrática*

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Demostración Por [1.], aplicando el Teorema de Bolzeno, existe al menos una raíz s para $f(x)$; y por [2.], aplicando el Teorema de Rolle, la raíz s es única.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Demostración Por [1.], aplicando el Teorema de Bolzeno, existe al menos una raíz s para $f(x)$; y por [2.], aplicando el Teorema de Rolle, la raíz s es única.

Asimismo, por [2.] y [3.], f' y f'' conserva su signo en [a,b].

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Demostración Por [1.], aplicando el Teorema de Bolzeno, existe al menos una raíz s para $f(x)$; y por [2.], aplicando el Teorema de Rolle, la raíz s es única.

Asimismo, por [2.] y [3.], f' y f'' conserva su signo en [a,b].

Supongamos que $f'(x) > 0$ y $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$ (en el resto de los casos se razona análogamente).

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Demostración Por [1.], aplicando el Teorema de Bolzeno, existe al menos una raíz s para $f(x)$; y por [2.], aplicando el Teorema de Rolle, la raíz s es única.

Asimismo, por [2.] y [3.], f' y f'' conserva su signo en [a,b].

Supongamos que $f'(x) > 0$ y $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$ (en el resto de los casos se razona análogamente).

Tomando $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ se tiene que $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f''(x))^2}$, y por ser $f(x)$ creciente, se verifica que $g(x)$ es decreciente en $[a, s]$ y creciente en $[s, a]$.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Entonces

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Entonces

- si $x \in [a, s]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(a) = b$ por [4.], luego $g(x) \in [s, b]$;
- si $x \in [s, b]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(b) = b$ po definición de g, luego $g(x) \in [s, b]$.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Entonces

- si $x \in [a, s]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(a) = b$ por [4.], luego $g(x) \in [s, b]$;
- si $x \in [s, b]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(b) = b$ po definición de g, luego $g(x) \in [s, b]$.

Por tanto, para todo $x_0 \in [a, b]$, la sucesión del método de Newton-Raphson $\{x_n\} \subset [s, b]$.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

Entonces

- si $x \in [a, s]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(a) = b$ por [4.], luego $g(x) \in [s, b]$;
- si $x \in [s, b]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(b) = b$ po definición de g, luego $g(x) \in [s, b]$.

Por tanto, para todo $x_0 \in [a, b]$, la sucesión del método de Newton-Raphson $\{x_n\} \subset [s, b]$.

Además $x_{n+`1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$, luego la sucesión es estrictamente creciente y acotada.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

En consecuencia tiene límite, es decir, existe $s' \in [s, b]$ tal que $\lim_{n \to +\infty} = s'$.

Convergencia global del método de Newton-Raphson

En consecuencia tiene límite, es decir, existe $s' \in [s, b]$ tal que $\lim_{n \to +\infty} = s'$.

Finalmente, tomando límite en $x_{n+1} = g(x_n)$, se llega a que $s' = g(s')$ y, por la unicidad del punto fijo s, concluimos que $s = s'$, es decir, $\lim_{n \to +\infty} x_n = s$. $\square$

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$.
Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$. Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0.$

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$.
Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0$.
2. $f'(x) = 2x > 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$. Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0$.
2. $f'(x) = 2x > 0$, para todo $x \in [a, b]$.
3. $f''(x) = 2 \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$.
Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0$.
2. $f'(x) = 2x > 0$, para todo $x \in [a, b]$.
3. $f''(x) = 2 \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.
4. $\dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \dfrac{b^2 - c}{2b} \leq \dfrac{b^2 - a^2}{2b} = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2b} \leq b - a$, luego se verifica esta hipótesis.

Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$. Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0$.
2. $f'(x) = 2x > 0$, para todo $x \in [a, b]$.
3. $f''(x) = 2 \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.
4. $\dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \dfrac{b^2 - c}{2b} \leq \dfrac{b^2 - a^2}{2b} = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2b} \leq b - a$, luego se verifica esta hipótesis.

En conclusión, el método de Newton-Raphson aplicado a $f(x) = x^2 - c$ en un intervalo $0 < a < b$, con $a^2 < c < b^2$, converge a la raíz positiva

Método de Aitken

Teorema de aceleración de Aitken

Sea $x_n \longrightarrow s$ al menos linealmente. Se define

$$\widehat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

Entonces $\widehat{x}_n \longrightarrow s$ más rápidamente en el sentido

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{e}_n}{e_n} = 0,$$

siendo $\widehat{e}_n = \widehat{x}_n - s$ y $e_n = x_n - s$.

Método de Aitken

Demostración Supongamos que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = k_n$ con $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} k_n = \lambda$ y $|\lambda| < 1$.

Entonces

Método de Aitken

Demostración Supongamos que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = k_n$ con $\lim_{n\to+\infty} k_n = \lambda$ y $|\lambda| < 1$. Entonces

$$\widehat{e}_n = \widehat{x}_n - s = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} - s =$$
$$x_n - s - \frac{((x_{n+1}-s)-(x_n-s))^2}{(x_{n+2}-s)-2(x_{n+1}-s)+(x_n-s)} = e_n - \frac{(e_{n+1}-e_n)^2}{e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n} =$$
$$e_n - \frac{e_n^2(k_n-1)^2}{e_n(k_{n+1}k_n-2k_n+1)} = e_n\frac{k_n(k_{n+1}-k_n)}{k_{n+1}k_n-2k_n+1},$$

Método de Aitken

Demostración Supongamos que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = k_n$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = \lambda$ y $|\lambda| < 1$. Entonces

$$\widehat{e}_n = \widehat{x}_n - s = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} - s =$$
$$x_n - s - \frac{((x_{n+1}-s)-(x_n-s))^2}{(x_{n+2}-s)-2(x_{n+1}-s)+(x_n-s)} = e_n - \frac{(e_{n+1}-e_n)^2}{e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n} =$$
$$e_n - \frac{e_n^2(k_n-1)^2}{e_n(k_{n+1}k_n-2k_n+1)} = e_n\frac{k_n(k_{n+1}-k_n)}{k_{n+1}k_n-2k_n+1},$$

luego $\dfrac{\widehat{e}_n}{e_n} \to 0$. $\square$

Método de Steffensen

Dado x_0, consideremos el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$. Sean x_1 y x_2 las dos primeras aproximaciones.

Definimos

$$x_0'' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0},$$

Método de Steffensen

Dado x_0, consideremos el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$. Sean x_1 y x_2 las dos primeras aproximaciones.

Definimos

$$x_0'' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0},$$

Y, en general, para cada $n >= 0$, se define

$$\begin{aligned}
x_0^{(n+1)} &= x_n'' \\
x_1^{(n+1)} &= g(x_0^{(n+1)}), \\
x_2^{(n+1)} &= g(x_1^{(n+1)}), \\
x_{n+1}'' &= x_0^{(n+1)} - \frac{(x_1^{(n+1)} - x_0^{(n+1)})^2}{x_2^{(n+1)} - 2x_1^{(n+1)} + x_0^{(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Método de Steffensen

Entonces $\{x_n''\} \rightarrow s$ más rápidamente que los anteriores métodos. El método así definido se denomina **método de Steffensen**.

Método de Steffensen

Entonces $\{x''_n\} \to s$ más rápidamente que los anteriores métodos. El método así definido se denomina **método de Steffensen**.

Ejemplo La siguiente tabla muestra las sucesiones de aproximaciones obtenidas mediante el método de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$, el método de aceleración de Aitken y el de superaceleración de Steffensen.

Método de Steffensen

En concreto se considera $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ y $x_0 = 0.5$ (que tiene convergencia lineal):

Normal	Aitken	Steffensen
0.5		
0.606530660		
0.545239212	0.567623876	0.567623876
0.579703095	0.567298989	
0.560064628	0.567193142	
0.571172149	0.567159364	0.567143314
0.564862947	0.567148453	
0.568438048	0.567144952	
0.566409453	0.567143825	$\boxed{0.567143290}$