Tema 1
Preliminares

Índice

1 Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- Finito-dimensionales
  - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
  - Interpolación y Aproximación
  - Cálculo de valores y vectores propios
- Infinito-dimensionales
  - Derivación numérica.
  - Integración numérica.
  - Resolución numérica de E.D.O. y E.D.P.

Objetivo:

Obtener la solución, exacta o con aceptable aproximación, con el menor esfuerzo/tiempo posible.

Ejemplo1: Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2,\\
x_1 &= 2.25,\\
x_2 &= 2.236111111,\\
x_3 &= 2.236067978,\\
x_4 &= 2.236067977.
\end{aligned}
$$

El valor exacto de $\sqrt{5}$ es 2.2360679774997896964..

Prerrequisitos de la materia:

- Álgebra lineal: espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, valores propios.
- Cálculo infinitesimal e integral en una y dos variables.

2 Teoremas básicos

Teorema de Bolzano *Sea* $f \in C[a,b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio *Sea* $f \in C[a,b]$ *y* L *un real comprendido entre* $f(a)$ *y* $f(b)$. *Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f(c) = L$.

Teorema de Rolle *Sea* $f \in C^1[a,b]$ *tal que* $f(a) = f(b)$. *Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio *Sea* $f \in C^1[a,b]$. *Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema del valor medio del calculo integral *Sea* $f \in C[a,b]$ *entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Segundo Teorema del valor medio del calculo integral *Sean* $f, g \in C[a,b]$ *tal que* $g(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$. *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Teorema de Taylor (formula de Taylor) *Sean* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *y* $x_0 \in [a,b]$ *fijo. Entonces para todo* $x \in [a,b]$ *existe* $c = c(x)$ *comprendido entre* x_0 *y* x, *tal que* $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, *donde*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Suma de series geometricas *Si* $r < 1$ *entonces* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \frac{c}{1-r}$, *siendo divergente en caso contrario.*

3 Errores

3.1 Fuentes usuales de error

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**: aproximación de un proceso matemático infinito por uno finito.
- **Redondeo**: las máquinas tienen una precisión limitada.

3.2 Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}
1563_{10} = \; & 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\
= \; & 1 \times 2^{1}0 + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
= \; & 11000011011_2.
\end{aligned}$$

Algoritmo de conversión decimal-binario

Invértase el orden de la sucesión de restos de dividir por 2 reiteradamente.

Números no enteros

$$1563.25_{10} = 11000011011.01_2$$
$$0.7_{10} = 0.1\overline{0110}_2 \quad \text{(periódico en binario).}$$

Otras bases usuales: 8, 16.

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1 d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,
- $0.d_1 d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \beta^{-i}, \; d_i \in \mathbb{N}, \; 0 \leq d_i < \beta$ (mantisa).

Normalización: $d_1 > 0$.

β, n y Ω son características de la máquina.

La **precisión** depende de n y de β.

Ejemplo 2

Sea una máquina con $\beta = 2$, $n = 4$, $e \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Los números representables serían:

	exponentes							
mantisa	$e=-3$	$e=-2$	$e=-1$	$e=0$	$e=1$	$e=2$	$e=3$	$e=4$
0.1000_2	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
0.1001_2	0.0703125	0.140625	0.28125	0.5625	1.125	2.25	4.5	9
0.1010_2	0.078125	0.15625	0.3125	0.625	1.25	2.5	5	10
0.1011_2	0.0859375	···	···	···	···	···	5.5	11
0.1100_2	···	···	···	···	···	···	···	12
0.1101_2	···	···	···	···	···	···	···	13
0.1110_2	···	···	···	···	···	···	···	14
0.1111_2	0.1171875	0.234375	0.46875	0.9375	1.875	3.75	7.5	15

3.3 Tipos de errores

Definición 1 *Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.*

Se define el ***error absoluto*** *de tal representación como*

$$\boxed{e_a = |x - x^*|}$$

y el ***error relativo*** *como*

$$\boxed{e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|}.}$$

El error relativo es más intuitivo y da mejor idea de la precisión.

Definición 2 *Métodos de representación/operación:*

- *El* ***error de truncatura*** *aparece cuando se prescinde de las cifras de la mantisa a partir de una dada:*

$$\boxed{(0.d_1 \ldots d_n d_{n+1} \ldots)^* = 0.d_1 \ldots d_n.}$$

- *El* ***error de redondeo*** *aparece cuando se corta la sucesión de decimales de la mantisa mediante el redondeo de la última cifra:*

$$\boxed{(0.d_1 \ldots d_n d_{n+1} \ldots)^* = \begin{cases} 0.d_1 \ldots d_n & si \quad d_{n+1} < \dfrac{\beta}{2}, \\ 0.d_1 \ldots d_n + \beta^{-n} & si \quad d_{n+1} \geq \dfrac{\beta}{2}. \end{cases}}$$

Propiedad 1 *El error relativo de repretación está acotado*

- *por truncatura: por β^{-n+1},*
- *por redondeo: por $\dfrac{\beta^{-n+1}}{2}$.*

Ejemplo 3

Con $\beta = 10$ y $n = 5$,

- $\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^* = 0.31415$ mediante truncatura, con error < 0.0001,
- $\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^* = 0.31416$ mediante redondeo, con error < 0.0005.

Definición 3 *Si d es el mayor entero para el cual*

$$\boxed{\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}}$$

se dice que x^* aproxima a x con d ***dígitos significativos****.*

Ejemplos

1. $\beta = 10$, $x = 3.141592$, $x^* = 3.14$,
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000507 < \frac{10^{-2}}{2}$$
luego x^* aproxima a x con 3 dígitos significativos.

2. $\beta = 10$, $x = 10^6$, $x^* = 999996$,
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$
luego x^* aproxima a x con 6 dígitos significativos.

3. $\beta = 10$, $x = 0.000012$, $x^* = 0.000009$,
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.25 < \frac{10^{-0}}{2}$$
luego x^* aproxima a x con 1 dígito significativo.

Definición 4 *Si d es el mayor entero para el cual $|x - x^*| < \dfrac{\beta^{-d}}{2}$ se dice que x^* aproxima a x con d decimales.*

¿Con cuántos decimales se realizan las aproximaciones de los ejemplos anteriores?

4 Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

$$a^2 - b^2 \approx 1002000 - 1000000 = 2000,$$

con error $\dfrac{2001 - 2000}{20001} \approx 5 \times 10^{-4}$.

Pero

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = a + b = 2001,$$

con error 0.

Luego procesos matemáticos equivalentes pueden no ser computacionalmente equivalentes.

Si $a = 1$, $b = 10^8$ y $c = -10^8$, entonces

- $a + (b + c) = 1$,
- $(a + b) + c = 0$.

Por otro lado $a + b = b$, luego ¿es $a = 0$?.

Ejercicio

Se desea obtener $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ con n muy grande (miles de millones). ¿Cuál es la mejor forma de ordenar los calculos?

1. Si los a_i son todos del mismo signo y magnitudes parecidas,
2. Si los a_i son todos del mismo signo y magnitudes muy diversas,
3. Si los a_i son de cualquier signo y magnitudes parecidas,
4. Si los a_i son de cualquier signo y magnitudes muy diversas?

Advertencia

Las operaciones de sumar (absoluta), multiplicar y dividir introducen error relativo de magnitud igual al de representacion, pero la resta (absoluta) puede introducir un error relativo gigantesco.

5 Condicionamiento y Estabilidad

Definición 5 *Un proceso está* ***bien condicionado*** *si pequeñas variaciones en sus datos de entrada provocan pequeñas variaciones en la solución, y mal condicionado si las mismas condiciones provocan grandes variaciones en la solución.*

Un proceso de cálculo es ***estable*** *si los errores de representación y redondeo introducidos tanto a la entrada como durante las operaciones intermedias no provocan perturbación importante en los resultados; e* ***inestable*** *en caso contrario.*

Sólo si se tiene un problema bien condicionado y se resuelve con un proceso estable se puede tener garantía de precisión en el resultado.

Por ejemplo, es fácil demostrar por inducción que la sucesión de valores $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\geq 0}$ puede generarse indistintamente a partir de los siguientes algoritmos:

(I) $s_0 = 1$, $s_n = \frac{1}{2}s_{n-1}$, $n \geq 1$.

(II) $s_0 = 1$, $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_n = \frac{23}{2}s_{n-1} - \frac{11}{2}s_{n-2}$, $n \geq 2$.

Sin embargo, con el segundo (operando con 6 cifras de precisión) el decimosexto término es $s_{15} = -113$, frente al valor $\frac{1}{2^{15}} \simeq 0.00031$.

Análogamente, la sucesión $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n\geq 0}$ puede generarse a partir del algoritmo

$$s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{3}, s_n = \frac{10}{3}s_{n-1} - s_{n-2},$$

$n \geq 2$, que también es inestable.

6 Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.

- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.

- Para procesos iterativos de aproximaciones sucesivas, se detendrá el proceso cuando se repitan:

  - Tantas cifras como la precisión requerida, si el proceso tiene asegurada una convergencia rápida (velocidad superior a la lineal, que ya se verá).
  - Tantas cifras como la precisión requerida MAS DOS, si el proceso converge lentamente (velocidad lineal).

- Ojo a las funciones trigonomtricas: hay que poner siempre la calculadora en modo radianes.