

Tema 1

Preliminares

Departamento de Matemática Aplicada. Cálculo Numérico

E.T.S.I. Informática

Índice

- 1 Introducción
- 2 Teoremas básicos
- 3 Errores
 - Fuentes usuales de error
 - Representación de números
 - Tipos de errores
- 4 Propagación del error
- 5 Condicionamiento y Estabilidad
- 6 Normas de computación para el curso

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- Finito-dimensionales

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios
- **Infinito-dimensionales**

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios
- **Infinito-dimensionales**
 - Derivación numérica.

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios
- **Infinito-dimensionales**
 - Derivación numérica.
 - Integración numérica.

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios
- **Infinito-dimensionales**
 - Derivación numérica.
 - Integración numérica.
 - Resolución numérica de E.D.O. y E.D.P.

Introducción

Cálculo numérico (Análisis Numérico, Métodos Numéricos):

- Nace con el hombre, pero se desarrolla junto con las máquinas de cálculo.
- Estudia métodos numéricos para resolver problemas matemáticos de las ciencias, técnicas e ingeniería.

Problemas que aborda:

- **Finito-dimensionales**
 - Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
 - Interpolación y Aproximación
 - Cálculo de valores y vectores propios
- **Infinito-dimensionales**
 - Derivación numérica.
 - Integración numérica.
 - Resolución numérica de E.D.O. y E.D.P.

Introducción

Objetivo

Introducción

Objetivo

Obtener la solución, exacta o con aceptable aproximación, con el menor esfuerzo/tiempo posible.

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = 2.25,$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = 2.25,$$

$$x_2 = 2.236111111,$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = 2.25,$$

$$x_2 = 2.236111111,$$

$$x_3 = 2.236067978,$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = 2.25,$$

$$x_2 = 2.236111111,$$

$$x_3 = 2.236067978,$$

$$x_4 = 2.236067977.$$

Introducción

Ejemplo1

Método numérico (método iterativo) para calcular $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Aplicación: (con 10 cifras)

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = 2.25,$$

$$x_2 = 2.236111111,$$

$$x_3 = 2.236067978,$$

$$x_4 = 2.236067977.$$

El valor exacto de $\sqrt{5}$ es 2.2360679774997896964..

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- [Algebra lineal](#):

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales, base,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales, base, dimensión,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal:** espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices, sistemas de ecuaciones lineales,

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal**: espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, valores propios.

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal:** espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, valores propios.
- **Cálculo infinitesimal e integral en una y dos variables**

Introducción

Prerrequisitos de la materia:

- **Algebra lineal:** espacios vectoriales, base, dimensión, dependencia lineal, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, valores propios.
- **Cálculo infinitesimal e integral en una y dos variables**

Teoremas básicos

Teorema de Bolzano

Sea $f \in C[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teoremas básicos

Teorema de Bolzano

Sea $f \in C[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio

Sea $f \in C[a, b]$ y L un real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.
Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L$.

Teoremas básicos

Teorema de Rolle

Sea $f \in C^1[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Teoremas básicos

Teorema de Rolle

Sea $f \in C^1[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio

Sea $f \in C^1[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teoremas básicos

Primer Teorema del valor medio del calculo integral

Sea $f \in C[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teoremas básicos

Primer Teorema del valor medio del calculo integral

Sea $f \in C[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Segundo Teorema del valor medio del calculo integral

Sean $f, g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.
Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Teoremas básicos

Teorema de Taylor (formula de Taylor)

Sean $f \in C^{n+1}[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ fijo. Entonces para todo $x \in [a, b]$ existe $c = c(x)$ comprendido entre x_0 y x , tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Teoremas básicos

Teorema de Taylor (formula de Taylor)

Sean $f \in C^{n+1}[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ fijo. Entonces para todo $x \in [a, b]$ existe $c = c(x)$ comprendido entre x_0 y x , tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Suma de series geometricas

Si $r < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \frac{c}{1-r}$, siendo divergente en caso contrario.

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización:**

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**:

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias,

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**:

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**:

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**: aproximación de un proceso matemático infinito por uno finito.

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**: aproximación de un proceso matemático infinito por uno finito.
- **Redondeo**:

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**: aproximación de un proceso matemático infinito por uno finito.
- **Redondeo**: las máquinas tienen una precisión limitada.

Fuentes usuales de error en la resolución de problemas matemáticos

- **Idealización**: rozamientos, vientos, atracciones, gravedad, relatividad, efectos "despreciables".
- **Experimental-incertidumbre**: lectura aparatos, interferencias, estimaciones estadísticas.
- **Humano**: equivocaciones aritméticas o de propagación.
- **Discretización**: aproximación de un proceso matemático infinito por uno finito.
- **Redondeo**: las máquinas tienen una precisión limitada.

Representación de números

Números en notación binaria

$$1563_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned} 1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \end{aligned}$$

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 11000011011_2.\end{aligned}$$

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 11000011011_2.\end{aligned}$$

Algoritmo de conversión decimal-binario

Invértase el orden de la sucesión de restos de dividir por 2 reiteradamente.

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 11000011011_2.\end{aligned}$$

Algoritmo de conversión decimal-binario

Invértase el orden de la sucesión de restos de dividir por 2 reiteradamente.

Números no enteros

$$1563.25_{10} = 11000011011.01_2$$

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 11000011011_2.\end{aligned}$$

Algoritmo de conversión decimal-binario

Invértase el orden de la sucesión de restos de dividir por 2 reiteradamente.

Números no enteros

$$\begin{aligned}1563.25_{10} &= 11000011011.01_2 \\ 0.7_{10} &= 0.\overline{10110}_2 \quad (\text{periódico en binario}).\end{aligned}$$

Representación de números

Números en notación binaria

$$\begin{aligned}
 1563_{10} &= 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\
 &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 11000011011_2.
 \end{aligned}$$

Algoritmo de conversión decimal-binario

Invértase el orden de la sucesión de restos de dividir por 2 reiteradamente.

Números no enteros

$$\begin{aligned}
 1563.25_{10} &= 11000011011.01_2 \\
 0.7_{10} &= 0.\overline{10110}_2 \quad (\text{periódico en binario}).
 \end{aligned}$$

Otras bases usuales: 8, 16.

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,
- $0.d_1d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^n d_i\beta^{-i}$, $d_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_i < \beta$ (mantisa).

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,
- $0.d_1d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^n d_i\beta^{-i}$, $d_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_i < \beta$ (mantisa).

Normalización: $d_1 > 0$.

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,
- $0.d_1d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^n d_i\beta^{-i}$, $d_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_i < \beta$ (mantisa).

Normalización: $d_1 > 0$.

β , n y Ω son características de la máquina.

Representación de números

Notación científica (Representación en punto flotante)

$$z = \sigma(0.d_1d_2 \dots d_n)\beta^e.$$

donde

- $\sigma = \pm 1$ (signo),
- $\beta \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (base),
- $e \in \Omega \subset \mathbb{Z}$,
- $0.d_1d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^n d_i\beta^{-i}$, $d_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_i < \beta$ (mantisa).

Normalización: $d_1 > 0$.

β , n y Ω son características de la máquina.

La **precisión** depende de n y de β .

Representación de números

Ejemplo 2

Sea una máquina con $\beta = 2$, $n = 4$, $e \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Representación de números

Ejemplo 2

Sea una máquina con $\beta = 2$, $n = 4$, $e \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Los números representables serían:

mantisa	exponentes							
	$e = -3$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$
0.1000_2	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
0.1001_2	0.0703125	0.140625	0.28125	0.5625	1.125	2.25	4.5	9
0.1010_2	0.078125	0.15625	0.3125	0.625	1.25	2.5	5	10
0.1011_2	0.0859375	5.5	11
0.1100_2	12
0.1101_2	13
0.1110_2	14
0.1111_2	0.1171875	0.234375	0.46875	0.9375	1.875	3.75	7.5	15

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Se define el **error absoluto** de tal representación como

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Se define el **error absoluto** de tal representación como

$$e_a = |x - x^*|$$

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Se define el **error absoluto** de tal representación como

$$e_a = |x - x^*|$$

y el **error relativo** como

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Se define el **error absoluto** de tal representación como

$$e_a = |x - x^*|$$

y el **error relativo** como

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|}.$$

Tipos de errores

Definición 1

Sea x^* la representación de $x \in \mathbb{R}$ en una máquina dada.

Se define el **error absoluto** de tal representación como

$$e_a = |x - x^*|$$

y el **error relativo** como

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|}.$$

El error relativo es más intuitivo y da mejor idea de la precisión.

Tipos de errores

Definición 2

Métodos de representación/operación:

Tipos de errores

Definición 2

Métodos de representación/operación:

- El **error de truncatura** aparece cuando se prescinde de las cifras de la mantisa a partir de una dada.

Tipos de errores

Definición 2

Métodos de representación/operación:

- El **error de truncatura** aparece cuando se prescinde de las cifras de la mantisa a partir de una dada.

$$(0.d_1 \dots d_n d_{n+1} \dots)^* = 0.d_1 \dots d_n.$$

Tipos de errores

Definición 2

Métodos de representación/operación:

- El **error de truncatura** aparece cuando se prescinde de las cifras de la mantisa a partir de una dada.

$$(0.d_1 \dots d_n d_{n+1} \dots)^* = 0.d_1 \dots d_n.$$

- El **error de redondeo** aparece cuando se corta la sucesión de decimales de la mantisa mediante el redondeo de la última cifra:

Tipos de errores

Definición 2

Métodos de representación/operación:

- El **error de truncatura** aparece cuando se prescinde de las cifras de la mantisa a partir de una dada.

$$(0.d_1 \dots d_n d_{n+1} \dots)^* = 0.d_1 \dots d_n.$$

- El **error de redondeo** aparece cuando se corta la sucesión de decimales de la mantisa mediante el redondeo de la última cifra:

$$(0.d_1 \dots d_n d_{n+1} \dots)^* = \begin{cases} 0.d_1 \dots d_n & \text{si } d_{n+1} < \frac{\beta}{2}, \\ 0.d_1 \dots d_n + \beta^{-n} & \text{si } d_{n+1} \geq \frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

- por truncatura:

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,
- por redondeo:

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de representación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,
- por redondeo: por $\frac{\beta^{-n+1}}{2}$.

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,
- por redondeo: por $\frac{\beta^{-n+1}}{2}$.

Ejemplo 3

Con $\beta = 10$ y $n = 5$,

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de repretación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,
- por redondeo: por $\frac{\beta^{-n+1}}{2}$.

Ejemplo 3

Con $\beta = 10$ y $n = 5$,

- $\left(\frac{\pi}{10}\right)^*$ = 0.31415 mediante truncatura, con error < 0.0001 ,

Tipos de errores

Propiedad 1

El error relativo de representación está acotado

- por truncatura: por β^{-n+1} ,
- por redondeo: por $\frac{\beta^{-n+1}}{2}$.

Ejemplo 3

Con $\beta = 10$ y $n = 5$,

- $\left(\frac{\pi}{10}\right)^*$ = 0.31415 mediante truncatura, con error < 0.0001 ,
- $\left(\frac{\pi}{10}\right)^*$ = 0.31416 mediante redondeo, con error < 0.00005 .

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}$$

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}$$

se dice que x^* aproxima a x con d **dígitos significativos**.

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}$$

se dice que x^* aproxima a x con d **dígitos significativos**.

Ejemplos

1. $\beta = 10$, $x = 3.141592$, $x^* = 3.14$,

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}$$

se dice que x^* aproxima a x con d **dígitos significativos**.

Ejemplos

1. $\beta = 10$, $x = 3.141592$, $x^* = 3.14$,

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000507 < \frac{10^{-2}}{2}$$

Tipos de errores

Definición 3

Si d es el mayor entero para el cual

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{\beta^{-d+1}}{2}$$

se dice que x^* aproxima a x con d **dígitos significativos**.

Ejemplos

1. $\beta = 10$, $x = 3.141592$, $x^* = 3.14$,

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000507 < \frac{10^{-2}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 3 dígitos significativos.

Tipos de errores

2. $\beta = 10, x = 10^6, x^* = 999996,$

Tipos de errores

2. $\beta = 10, x = 10^6, x^* = 999996,$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$

Tipos de errores

2. $\beta = 10, x = 10^6, x^* = 999996,$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 6 dígitos significativos.

Tipos de errores

2. $\beta = 10, x = 10^6, x^* = 999996,$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 6 dígitos significativos.

3. $\beta = 10, x = 0.000012, x^* = 0.000009,$

Tipos de errores

2. $\beta = 10$, $x = 10^6$, $x^* = 999996$,

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 6 dígitos significativos.

3. $\beta = 10$, $x = 0.000012$, $x^* = 0.000009$,

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.25 < \frac{10^{-0}}{2}$$

Tipos de errores

2. $\beta = 10, x = 10^6, x^* = 999996,$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.000004 < \frac{10^{-5}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 6 dígitos significativos.

3. $\beta = 10, x = 0.000012, x^* = 0.000009,$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \approx 0.25 < \frac{10^{-0}}{2}$$

luego x^* aproxima a x con 1 dígito significativo.

Tipos de errores

Definición 4

Si d es el mayor entero para el cual $|x - x^*| < \frac{\beta^{-d}}{2}$ se dice que x^* aproxima a x con d decimales.

Tipos de errores

Definición 4

Si d es el mayor entero para el cual $|x - x^*| < \frac{\beta^{-d}}{2}$ se dice que x^* aproxima a x con d decimales.

¿Con cuántos decimales se realizan las aproximaciones de los ejemplos anteriores?

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura.

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

$$a^2 - b^2 \approx 1002000 - 1000000 = 2000,$$

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

$$a^2 - b^2 \approx 1002000 - 1000000 = 2000,$$

con error $\frac{2001 - 2000}{20001} \approx 5 \times 10^{-4}$.

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

$$a^2 - b^2 \approx 1002000 - 1000000 = 2000,$$

con error $\frac{2001 - 2000}{20001} \approx 5 \times 10^{-4}$.

Pero

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = a + b = 2001,$$

con error 0.

Propagación del error

Consideremos una máquina en la que $\beta = 10$, $n = 6$, mediante error de truncatura. Por tanto, el error relativo característico de representación es de $10^{-6+1} = 10^{-5}$.

Sean $a = 1001$ y $b = 1000$. Entonces

$$a^2 - b^2 \approx 1002000 - 1000000 = 2000,$$

con error $\frac{2001 - 2000}{20001} \approx 5 \times 10^{-4}$.

Pero

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = a + b = 2001,$$

con error 0.

Luego procesos matemáticos equivalentes pueden no ser computacionalmente equivalentes.

Propagación del error

Otro ejemplo:

Propagación del error

Otro ejemplo:

Si $a = 1$, $b = 10^8$ y $c = -10^8$, entonces

Propagación del error

Otro ejemplo:

Si $a = 1$, $b = 10^8$ y $c = -10^8$, entonces

- $a + (b + c) = 1,$

Propagación del error

Otro ejemplo:

Si $a = 1$, $b = 10^8$ y $c = -10^8$, entonces

- $a + (b + c) = 1$,
- $(a + b) + c = 0$.

Propagación del error

Otro ejemplo:

Si $a = 1$, $b = 10^8$ y $c = -10^8$, entonces

- $a + (b + c) = 1$,
- $(a + b) + c = 0$.

Por otro lado $a + b = b$, luego ¿es $a = 0$?

Propagación del error

Ejercicio

Se desea obtener $\sum_{i=1}^n a_i$ con n muy grande (miles de millones).

Propagación del error

Ejercicio

Se desea obtener $\sum_{i=1}^n a_i$ con n muy grande (miles de millones).
¿Cuál es la mejor forma de ordenar los cálculos?

Propagación del error

Ejercicio

Se desea obtener $\sum_{i=1}^n a_i$ con n muy grande (miles de millones).

¿Cuál es la mejor forma de ordenar los calculos?

1. Si los a_i son todos del mismo signo y magnitudes parecidas,
2. Si los a_i son todos del mismo signo y magnitudes muy diversas,
3. Si los a_i son de cualquier signo y magnitudes parecidas,
4. Si los a_i son de cualquier signo y magnitudes muy diversas?

Propagación del error

Advertencia

Las operaciones de sumar (absoluta), multiplicar y dividir introducen error relativo de magnitud igual al de representación, pero la resta (absoluta) puede introducir un error relativo gigantesco.

Condicionamiento y Estabilidad

Definición 5

Un proceso está **bien condicionado** si pequeñas variaciones en sus datos de entrada provocan pequeñas variaciones en la solución, y mal condicionado si las mismas condiciones provocan grandes variaciones en la solución.

Condicionamiento y Estabilidad

Definición 5

Un proceso está **bien condicionado** si pequeñas variaciones en sus datos de entrada provocan pequeñas variaciones en la solución, y mal condicionado si las mismas condiciones provocan grandes variaciones en la solución.

Un proceso de cálculo es **estable** si los errores de representación y redondeo introducidos tanto a la entrada como durante las operaciones intermedias no provocan perturbación importante en los resultados; e **inestable** en caso contrario.

Condicionamiento y Estabilidad

Definición 5

Un proceso está **bien condicionado** si pequeñas variaciones en sus datos de entrada provocan pequeñas variaciones en la solución, y mal condicionado si las mismas condiciones provocan grandes variaciones en la solución.

Un proceso de cálculo es **estable** si los errores de representación y redondeo introducidos tanto a la entrada como durante las operaciones intermedias no provocan perturbación importante en los resultados; e **inestable** en caso contrario.

Sólo si se tiene un problema bien condicionado y se resuelve con un proceso estable se puede tener garantía de precisión en el resultado.

Condicionamiento y Estabilidad

Por ejemplo, es fácil demostrar por inducción que la sucesión de valores $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \geq 0}$ puede generarse indistintamente a partir de los siguientes algoritmos:

Condicionamiento y Estabilidad

Por ejemplo, es fácil demostrar por inducción que la sucesión de valores $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \geq 0}$ puede generarse indistintamente a partir de los siguientes algoritmos:

$$(I) \quad s_0 = 1, \quad s_n = \frac{1}{2}s_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$(II) \quad s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_n = \frac{23}{2}s_{n-1} - \frac{11}{2}s_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Condicionamiento y Estabilidad

Por ejemplo, es fácil demostrar por inducción que la sucesión de valores $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \geq 0}$ puede generarse indistintamente a partir de los siguientes algoritmos:

$$(I) \quad s_0 = 1, \quad s_n = \frac{1}{2}s_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$(II) \quad s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_n = \frac{23}{2}s_{n-1} - \frac{11}{2}s_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Sin embargo, con el segundo (operando con 6 cifras de precisión) el decimosexto término es $s_{15} = -113$, frente al valor $\frac{1}{2^{15}} \simeq 0.00031$.

Condicionamiento y Estabilidad

Por ejemplo, es fácil demostrar por inducción que la sucesión de valores $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \geq 0}$ puede generarse indistintamente a partir de los siguientes algoritmos:

$$(I) \quad s_0 = 1, \quad s_n = \frac{1}{2}s_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$(II) \quad s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_n = \frac{23}{2}s_{n-1} - \frac{11}{2}s_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Sin embargo, con el segundo (operando con 6 cifras de precisión) el decimosexto término es $s_{15} = -113$, frente al valor $\frac{1}{2^{15}} \simeq 0.00031$.

Análogamente, la sucesión $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n \geq 0}$ puede generarse a partir del algoritmo

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{3}, \quad s_n = \frac{10}{3}s_{n-1} - s_{n-2},$$

$n > 2$, que también es inestable.

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.
- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.
- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.
- Para procesos iterativos de aproximaciones sucesivas, se detendrá el proceso cuando se repitan:

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.
- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.
- Para procesos iterativos de aproximaciones sucesivas, se detendrá el proceso cuando se repitan:
 - Tantas cifras como la precisión requerida, si el proceso tiene asegurada una convergencia rápida (velocidad superior a la lineal, que ya se verá).

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.
- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.
- Para procesos iterativos de aproximaciones sucesivas, se detendrá el proceso cuando se repitan:
 - Tantas cifras como la precisión requerida, si el proceso tiene asegurada una convergencia rápida (velocidad superior a la lineal, que ya se verá).
 - Tantas cifras como la precisión requerida MAS DOS, si el proceso converge lentamente (velocidad lineal).

Normas de computación para el curso

- Salvo indicación contraria, se debe trabajar con todas las cifras de la calculadora, incluso si se pide poca precisión.
- En particular, si se pide un resultado con 5 cifras decimales de precisión, NO se deben redondear los cálculos intermedios a 5 decimales.
- Para procesos iterativos de aproximaciones sucesivas, se detendrá el proceso cuando se repitan:
 - Tantas cifras como la precisión requerida, si el proceso tiene asegurada una convergencia rápida (velocidad superior a la lineal, que ya se verá).
 - Tantas cifras como la precisión requerida MAS DOS, si el proceso converge lentamente (velocidad lineal).
- Ojo a las funciones trigonométricas: hay que poner siempre la calculadora en modo radianes.