UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

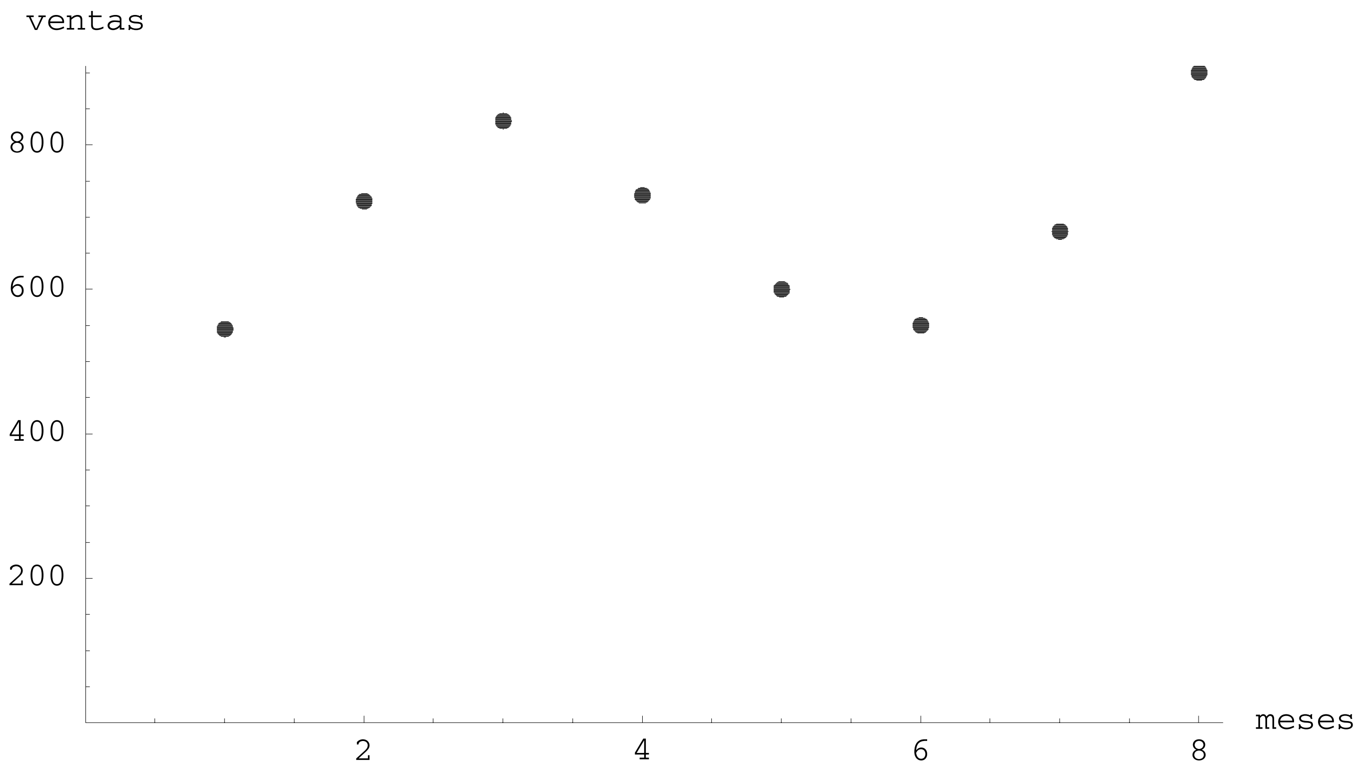
www.ugr.es/local/mateapli

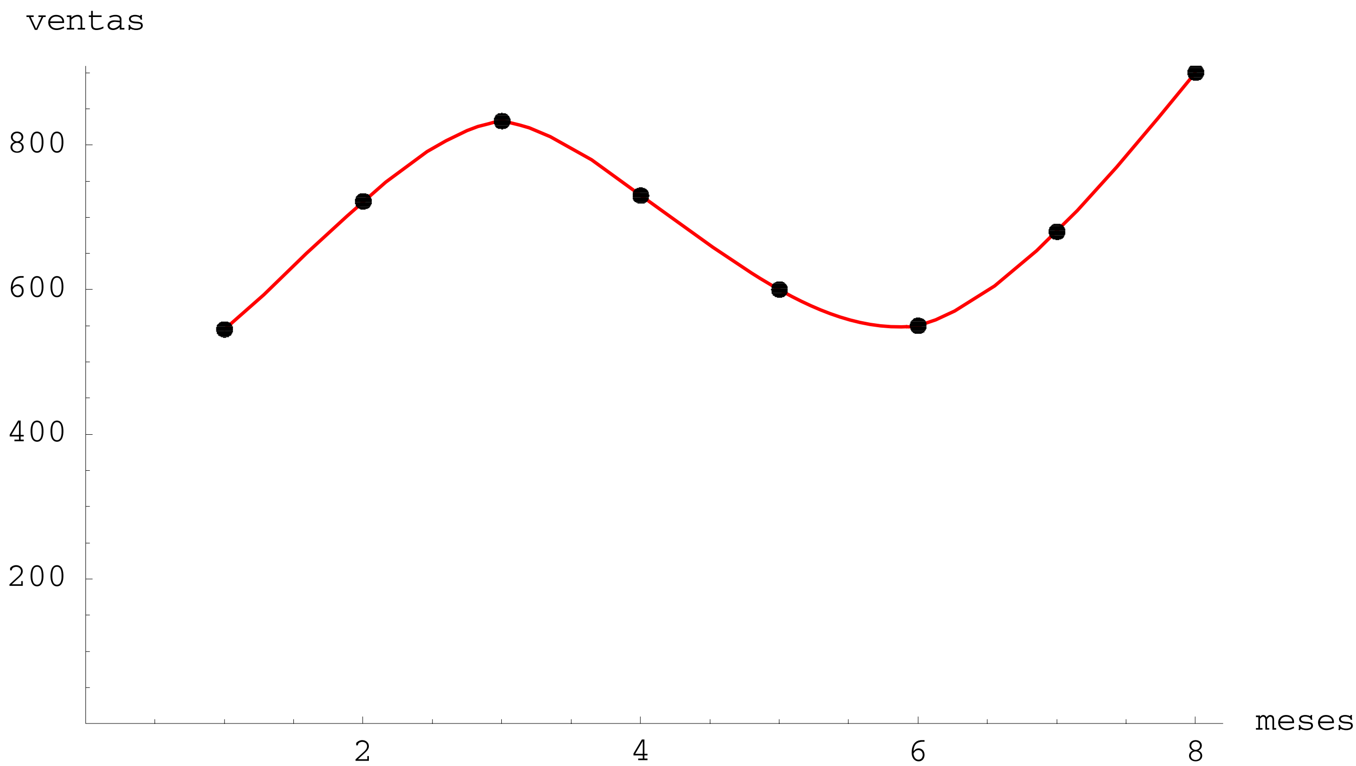
INTERPOLACIÓN

2006-2007 *José Martínez Aroza*

Introducción

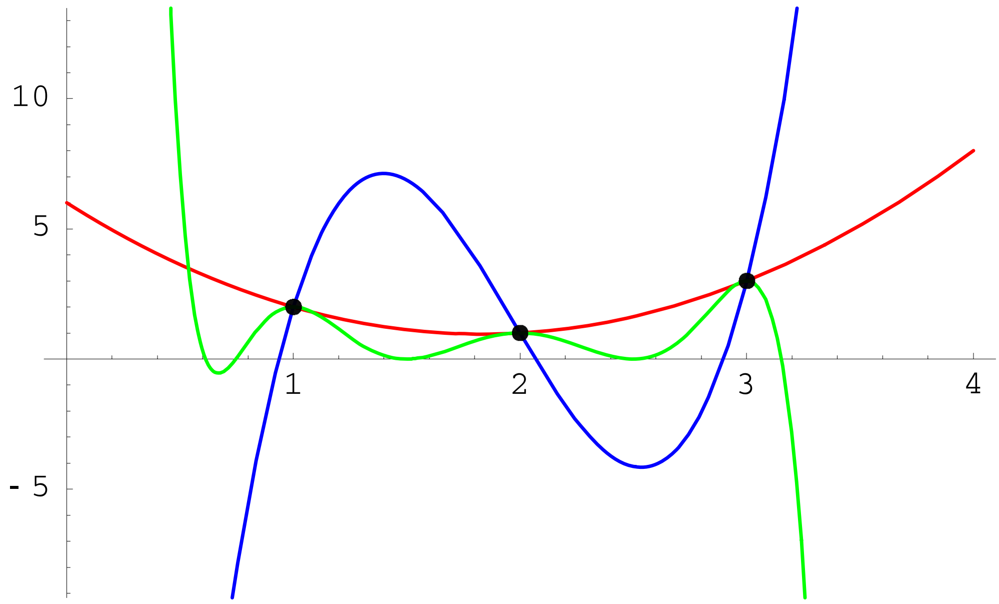
Interpolar (D.R.A.E.)**:** *Averiguar el valor aproximado de una magnitud en un intervalo cuando se conocen algunos de los valores que toma a uno y otro lado de dicho intervalo, y no se conoce la ley de variación de la magnitud.*


ventas
800
600
400
200
2
4
6
8
meses


ventas
800
600
400
200
2
4
6
8
meses

Problema de Interpolación Lagrangiana (versión previa):

"Dados los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y sus valores respectivos $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, obténgase una función $p(x)$ "sencilla" que verifique $p(x_i) = y_i,\, i = 0,1,\ldots,n$."



p: función interpoladora o interpolante

"Sencilla" = hay que fijar un espacio de funciones F.
Problema bien planteado $\Leftrightarrow \dim F = n+1 =$ nº de datos.

Problema de Interpolación Lagrangiana (P.I.L.):

"Dados los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y sus valores respectivos $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, y dado (o fijado) un espacio de funciones F con $\dim F = n+1$, obténgase una función $p \in F$ que verifique $p(x_i) = y_i,\, i = 0,1,\ldots,n$."

Problema de Interpolación Polinomial Lagrangiana (P.I.P.L.):

"Dados los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y sus valores respectivos $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, obténgase un polinomio $p \in \mathscr{P}_n$ tal que $p(x_i) = y_i,\, i = 0,1,\ldots,n$."

Resolución del P.I.L.:

Se escoge una base $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de F y se busca $p = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j$ que cumpla las condiciones de interpolación

$$\left.\begin{array}{l} p(x_0) = y_0 \Leftrightarrow a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1) = y_1 \\ p(x_n) = y_0 \Leftrightarrow a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) = y_n \end{array}\right\}$$

(Sistema lineal $(n+1)\times(n+1)$ con incógnitas a_j.)

El P.I.L. es unisolvente (solución única) $\Leftrightarrow$ el sistema es C.D.

Solución = coeficientes de la función interpoladora.

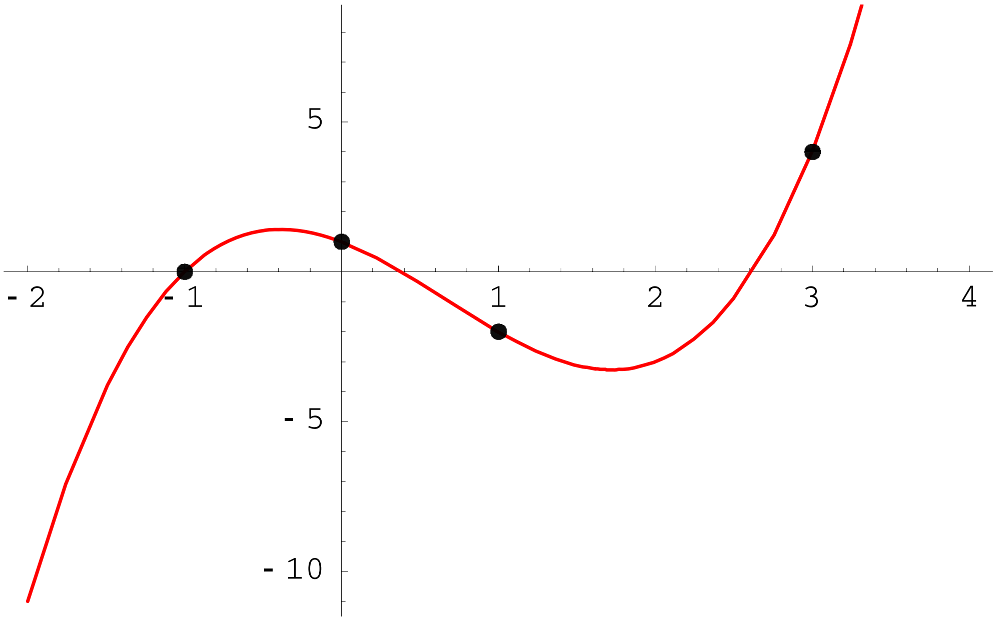
Ejemplo: $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$, $F = \mathscr{P}_3 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$.

Polinomio buscado: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

Sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_0 & - & a_1 & + & a_2 & - & a_3 & = & 0 \\ a_0 & & & & & & & = & 1 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & -2 \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & + & 27a_3 & = & 4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$



Unisolvencia del P.I.P.L.: Usando la base $\{1, x, \ldots, x^n\}$, el determinante de la matriz de coeficientes es el det. de Vandermonde

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j);$$

$\det \neq 0 \Leftrightarrow$ las abscisas x_i no se repiten (no hay dos iguales).

Demostración: restando a cada columna la anterior $\times x_0$,

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0).$$

Para no tener que resolver s.e.l. se emplean fórmulas de interpolación, que dan directamente el polinomio de interpolación.

Fórmulas clásicas: la Fórmula de Lagrange y la Fórmula de Newton.
Diferentes expresiones, pero el mismo objetivo: el polinomio de interpolación.

FÓRMULA DE LAGRANGE

Dados los nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, los polinomios fundamentales de Lagrange $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n \in \mathscr{P}_n$ son aquellos que verifican

$$\left.\begin{array}{llll} \ell_0(x_0)=1, & \ell_0(x_1)=0, & \dots & \ell_0(x_n)=0 \\ \ell_1(x_0)=0, & \ell_1(x_1)=1, & \dots & \ell_1(x_n)=0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_n(x_0)=0, & \ell_n(x_1)=0, & \dots & \ell_n(x_n)=1 \end{array}\right\}, \text{ es decir, } \ell_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

(delta de Kronecker). Una vez obtenidos, la solución del P.I.P.L. es la

Fórmula de Lagrange

$$p(x)=y_0\ell_0(x)+y_1\ell_1(x)+\dots+y_n\ell_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j\ell_j(x).$$

En efecto, $p(x_i)=\sum_{j=0}^{n} y_j\ell_j(x_i)=\sum_{j=0}^{n} y_j\delta_{ij}=y_i.$

Construcción de los polinomios fundamentales de Lagrange:

ℓ_0 se anula en $x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ es divisible por $(x-x_1), (x-x_2), \dots, (x-x_n)$

$\Rightarrow \ell_0 = K(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, con K = cte.

Se escoge K para que $\ell_0(x_0)=1 \Rightarrow K=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$,

por tanto $\ell_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdots\dfrac{x-x_n}{x_0-x_n}=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{x-x_i}{x_0-x_i}.$

En general $\ell_j(x)=\prod_{i=0}^{n}\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}$ (hay un error).

Ejercicio: demostrar que $\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\}$ es una base de $\mathscr{P}_n$.

Ejemplo: $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$, unisolvente en $\mathscr{P}_3$.

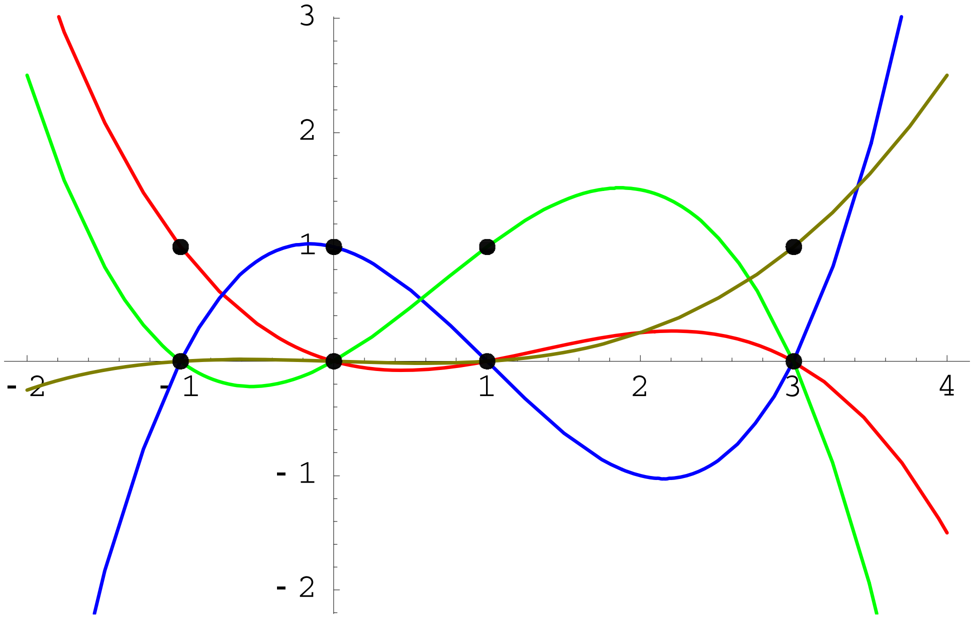
$$\ell_0 = \frac{x-0}{-1-0}\cdot\frac{x-1}{-1-1}\cdot\frac{x-3}{-1-3} \qquad = -\frac{1}{8}(x^3-4x^2+3x)$$

$$\ell_1 = \frac{x+1}{0+1}\cdot\frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-3}{0-3} \qquad = \frac{1}{3}(x^3-2x^2-x+4)$$

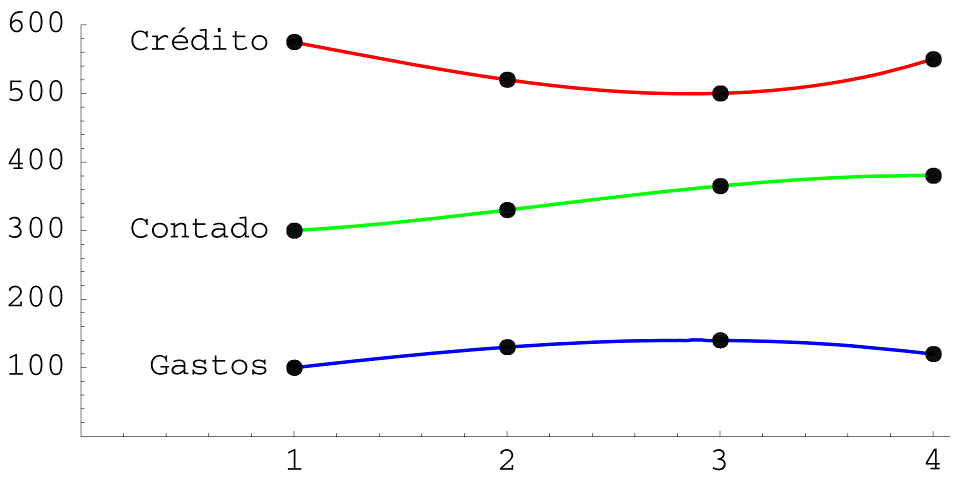
$$\ell_2 = \frac{x+1}{1+1}\cdot\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-3}{1-3} \qquad = -\frac{1}{4}(x^3-2x^2-3x)$$

$$\ell_3 = \frac{x+1}{3+1}\cdot\frac{x-0}{3+0}\cdot\frac{x-1}{3-1} \qquad = \frac{1}{24}(x^3-x)$$

$$p = 0\ell_0 + 1\ell_1 - 2\ell_2 + 4\ell_3 \qquad = x^3-2x^2-2x+1$$



Ventaja de la fórmula de Lagrange: Los polinomios fundamentales sólo dependen de los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$; varios P.I.P.L. con el mismo conjunto de abscisas comparten los mismos polinomios fundamentales.



Inconveniente de la fórmula de Lagrange: Si se añade nueva información (un nuevo punto), hay que reconstruir casi todo.

FÓRMULA DE NEWTON

Objetivo: construir el pol. de interp. $p(x)$ gradualmente, partiendo de un solo dato (x_0, y_0) e ir añadiendo datos progresivamente.

$p_0 \in \mathscr{P}_0$: polin. que interpola en $\{x_0\}$,

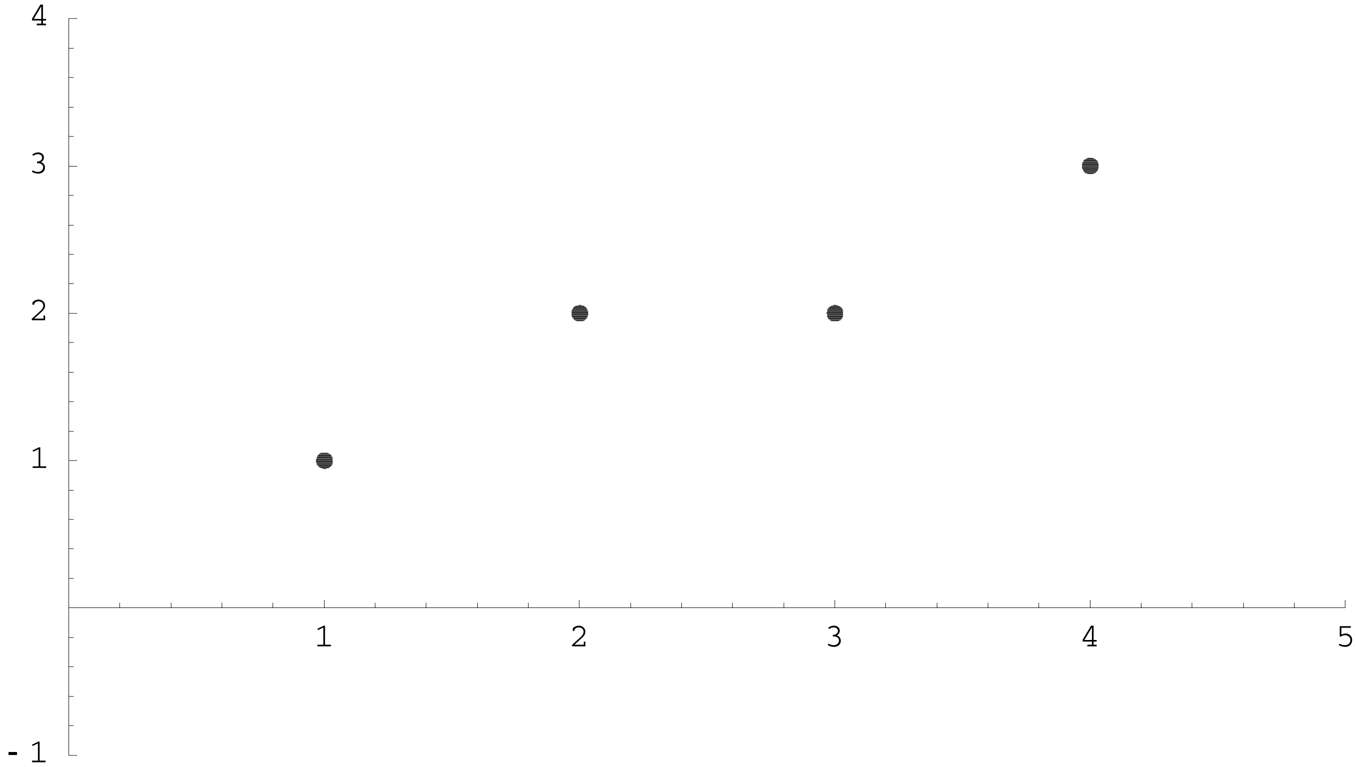
$p_1 \in \mathscr{P}_1$: polin. que interpola en $\{x_0, x_1\}$,

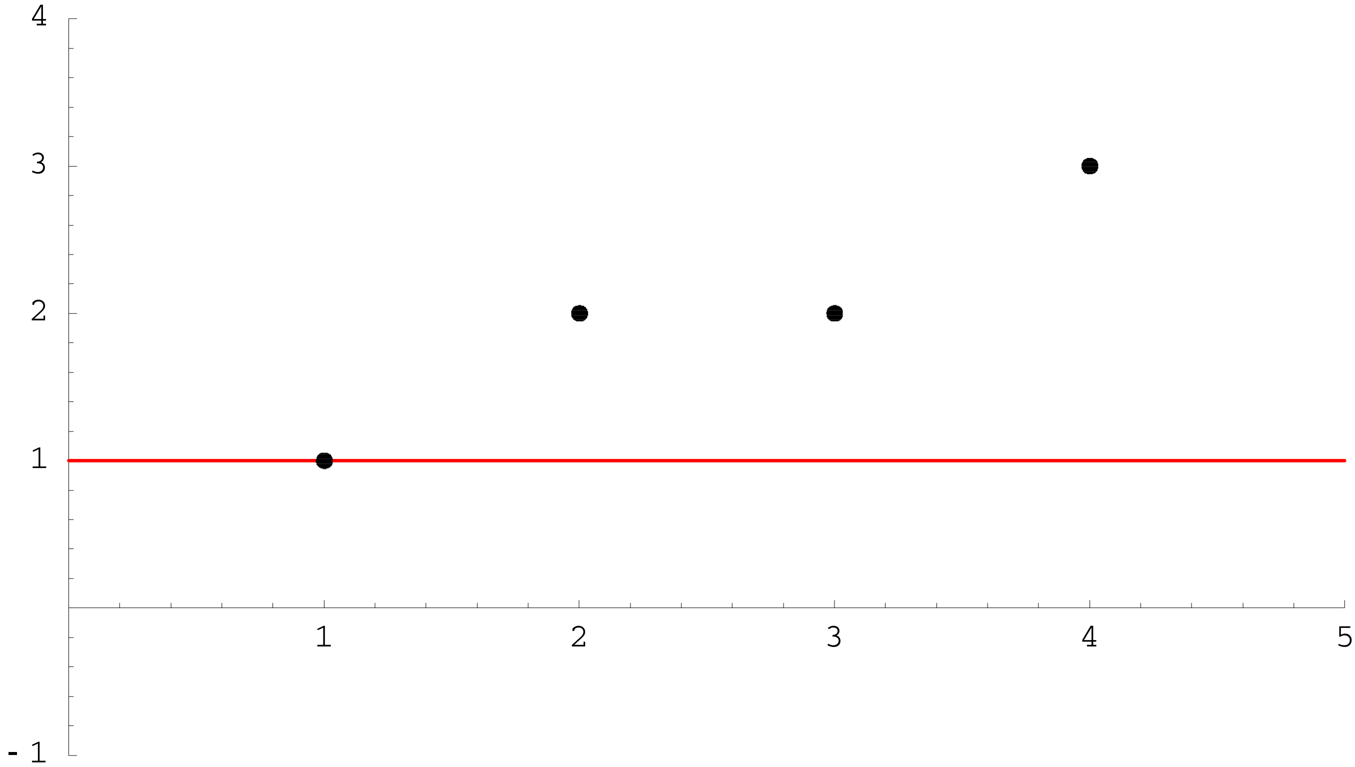
$p_2 \in \mathscr{P}_2$: polin. que interpola en $\{x_0, x_1, x_2\}$,

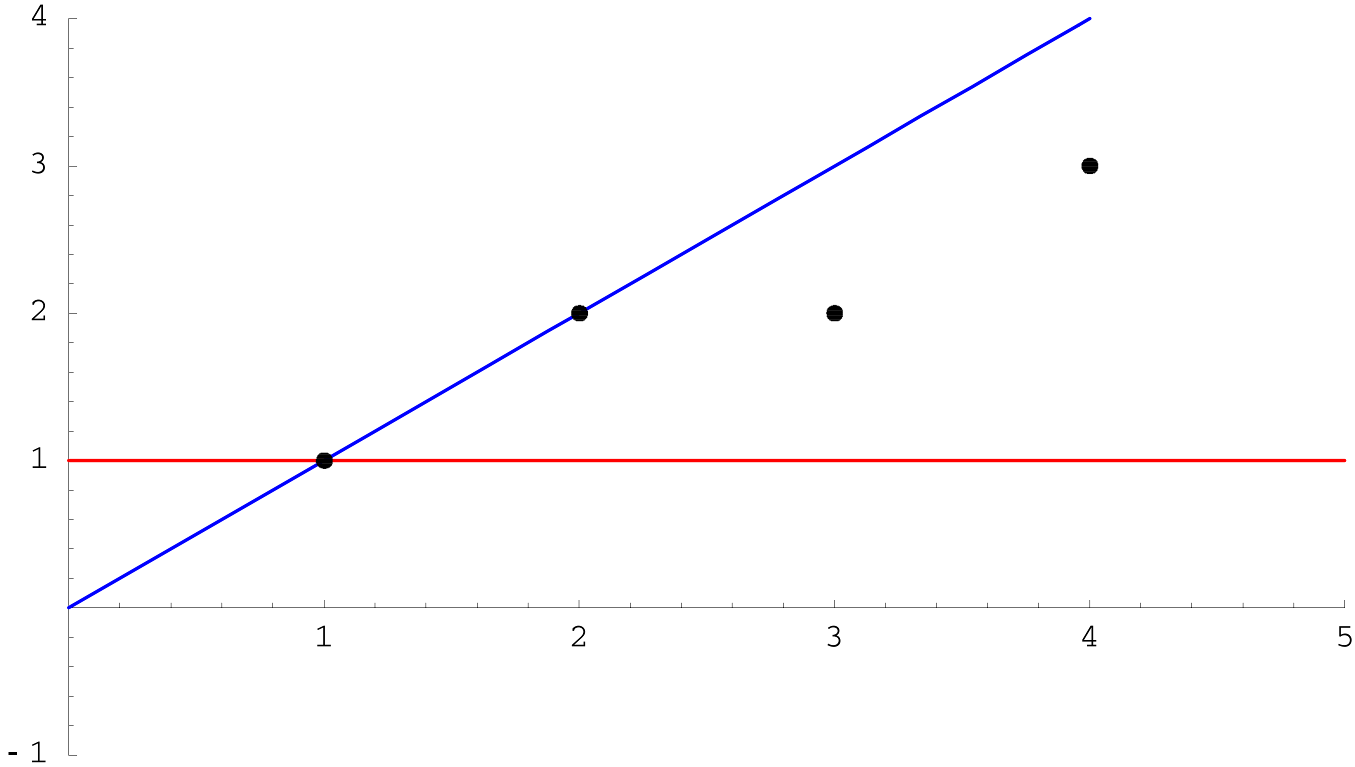
$\vdots$

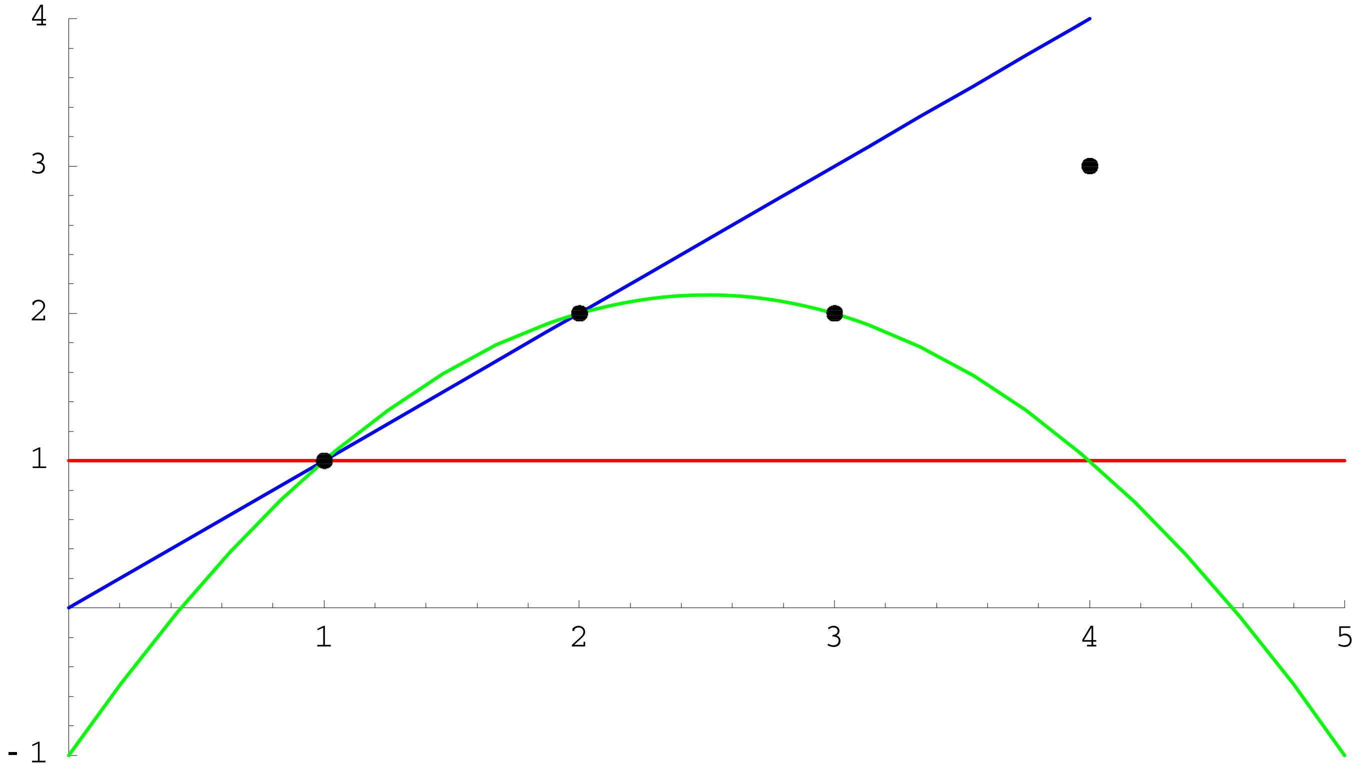
$p_n = p \in \mathscr{P}_n$: polin. que interpola en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

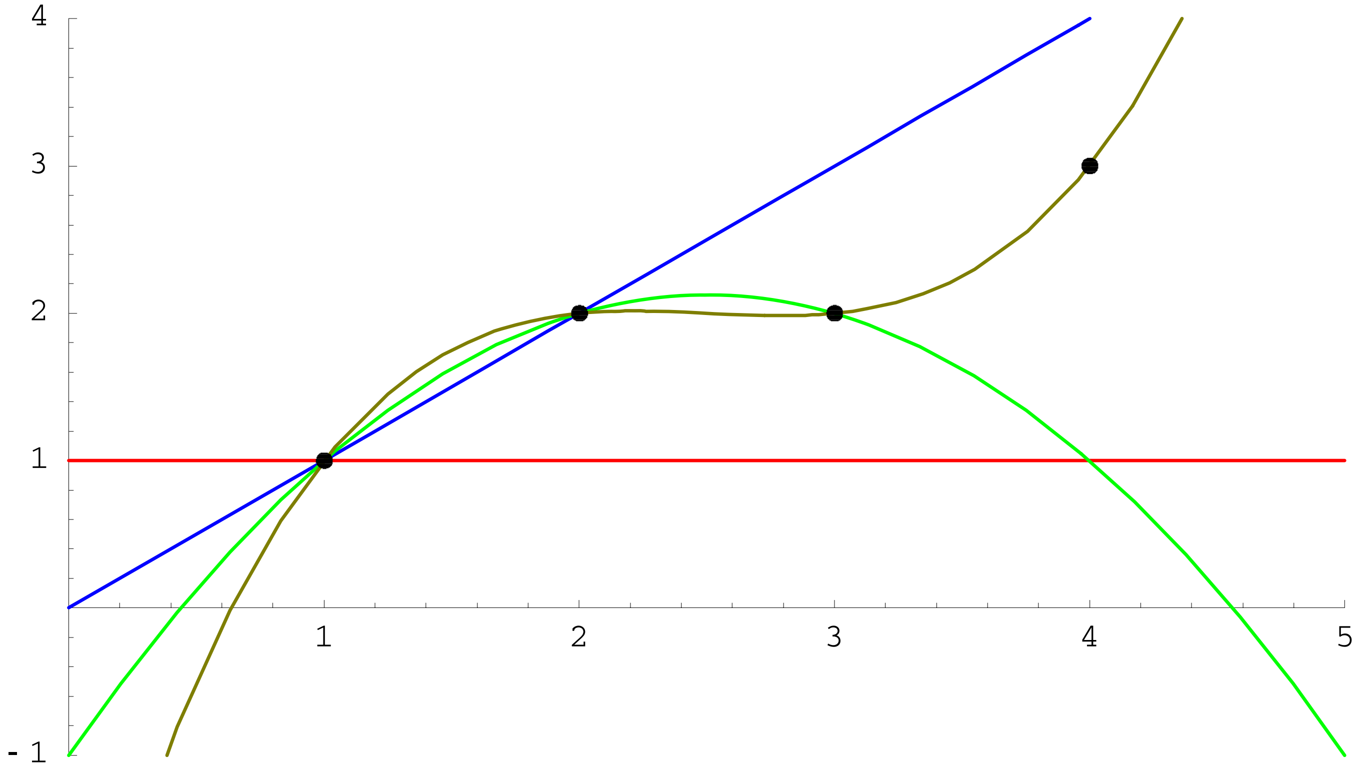
Se trata de obtener p_k conocido p_{k-1}, $k = 1, \ldots, n$.




4
3
2
1
- 1
1
2
3
4
5


4
3
2
1
- 1
1
2
3
4
5


4
3
2
1
- 1
1
2
3
4
5


4
3
2
1
- 1
1
2
3
4
5

Construcción progresiva

- $p_0(x) = y_0 \in \mathscr{P}_0$ interpola en x_0 (cumple $p_0(x_0) = y_0$).
- $p_1(x) \in \mathscr{P}_1$ interpola en $\{x_0, x_1\}$; $q_1 = p_1 - p_0 \in \mathscr{P}_1$ se anula en x_0
  $\Rightarrow q_1(x) = A_1(x - x_0)$, con A_1 adecuado para que
  $$p_1(x_1) = p_0(x_1) + q_1(x_1) = y_1 \Rightarrow A_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0}.$$
- $p_2 = p_1 + q_2 \in \mathscr{P}_2$ interpola en x_0, x_1, x_2; $q_2 \in \mathscr{P}_2$ se anula en x_0 y x_1
  $\Rightarrow q_2(x) = A_2(x - x_0)(x - x_1)$ con A_2 adecuado para que
  $$p_2(x_2) = p_1(x_2) + q_2(x_2) = y_2 \Rightarrow A_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$
- en general $p_k = p_{k-1} + q_k \in \mathscr{P}_k$, q_k se anula en $x_0, \ldots, x_{k-1}$
  $\Rightarrow q_k(x) = A_k(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$ con $A_k = \dfrac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})}.$

Conviniendo $A_0 = y_0$ se tiene

$$\begin{aligned} p(x) = p_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) \\ + \cdots + A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

es decir

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i),$$

que es la fórmula de Newton (preliminar).

Ejemplo: $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$; $A_0 = y_0 = 0 \Rightarrow p_0(x) = 0;$

$$A_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{0+1} = 1 \Rightarrow p_1(x) = 0 + 1(x+1) = x+1;$$

$$A_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{-2-2}{(1+1)(1-0)} = -2 \Rightarrow$$

$$p_2(x) = p_1(x) - 2(x+1)(x-0) = (x+1) - 2(x+1)x;$$

$$A_3 = \frac{y_3 - p_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{4+20}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1 \Rightarrow$$

$$p_3(x) = p_2(x) + 1(x+1)x(x-1)$$

$$= x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Notación: $A_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ diferencia dividida de f en $x_0, \ldots, x_k$.

Fórmula de Newton: (definitiva)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

Propiedad de las diferencias divididas:

$$f[x_0,\dots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}.$$

Consecuencia: $f[x_0,\dots,x_n]$ es simétrica respecto de $x_0,\dots,x_n$.

Demostración: identificando coef. de gr. n en las fórmulas de Lagrange y Newton:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}f[x_0,\dots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)=\sum_{j=0}^{n}y_j\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}.$$

Propiedad de las diferencias divididas:

$$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}.$$

Demostración: identificando coef. de gr. $n-1$ en las fórmulas de Newton directa e inversa de gr. n:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}f[x_0,\dots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)=\sum_{k=0}^{n}f[x_n,\dots,x_{n-k}]\prod_{i=k+1}^{n}(x-x_i)$$

$$f[x_0,\dots,x_{n-1}]-f[x_0,\dots,x_n]\sum_{i=0}^{n-1}x_i=f[x_n,\dots,x_1]-f[x_0,\dots,x_n]\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & f[x_0]=y_0 & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1]=y_1 & & f[x_0,x_1,x_2] & \ddots & \\
 & & f[x_1,x_2] & & & \\
x_2 & f[x_2]=y_2 & & \vdots & & f[x_0,\ldots,x_n] \\
 & & \vdots & & \iddots & \\
\vdots & \vdots & & \iddots & & \\
 & & f[x_{n-1},x_n] & & & \\
x_n & f[x_n]=y_n & & & &
\end{array}$$

Ejemplo: $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$;

$$\begin{array}{c|cccc}
-1 & 0 & & & \\
 & & 1 & & \\
0 & 1 & & -2 & \\
 & & -3 & & 1 \\
1 & -2 & & 2 & \\
 & & 3 & & \\
3 & 4 & & &
\end{array}$$

$$p(x)=0+1(x+1)-2(x+1)x+1(x+1)x(x-1).$$

EL ERROR DE INTERPOLACIÓN EN EL P.I.P.L.

Sean $z_i = f(x_i)$ los datos de un P.I.P.L., provenientes de una función $f(x)$.

Definición: Error de interpolación $E(x) = f(x) - p(x)$.

Teorema: $E(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi(x)$, donde $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Demostración: Ampliando la fórmula de Newton con x_{n+1} se tiene

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{y_{n+1} - p(x_{n+1})}{\prod_{i=0}^{n}(x_{n+1} - x_i)} \Rightarrow f[x_0, \ldots, x_{n+1}]\Pi(x_{n+1}) = E(x_{n+1}),$$

válido $\forall x_{n+1}$.

Teorema: Sea $f \in \mathscr{C}^n[a,b]$ y $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$. Entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que

$$f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Demostración: $E(x) \in \mathscr{C}^n[a,b]$ y se anula en $x_0,\ldots,x_n \to n+1$ veces;

aplicando el T. de Rolle $E'(x) \in \mathscr{C}^{n-1}[a,b]$ se anula n veces;

$$\vdots$$

$\Rightarrow E^{(n)}(x) \in \mathscr{C}^0[a,b]$ se anula 1 vez.

Consecuencia: Si $f \in \mathscr{C}^{n+1}[a,b]$ entonces

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x).$$

INTERPOLACIÓN POR RECURRENCIA

Interpolación por recurrencia:

$\forall C \subset \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, sea $p_C(x)$ el interpolante en los puntos de C.

Teorema (Lema de Aitken): Sean $x_i, x_j \notin C$. Entonces

$$p_{C \cup \{x_i, x_j\}}(x) = \frac{(x - x_j)\, p_{C \cup \{x_i\}}(x) - (x - x_i)\, p_{C \cup \{x_j\}}(x)}{x_i - x_j}.$$

Demostración: basta comprobar.

Principal aplicación: evaluación del interpolante sin construirlo.

Método de Neville:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x - x_0 & p_{\{x_0\}}(x) = y_0 & & & & \\
 & & p_{\{x_0, x_1\}}(x) & & & \\
x - x_1 & p_{\{x_1\}}(x) = y_1 & & p_{\{x_0, x_1, x_2\}}(x) & & \\
 & & p_{\{x_1, x_2\}}(x) & & \ddots & \\
x - x_2 & p_{\{x_2\}}(x) = y_2 & & \vdots & & p_{\{x_0, \ldots, x_n\}}(x) \\
 & & \vdots & & \iddots & \\
\vdots & \vdots & & \iddots & & \\
 & & p_{\{x_{n-1}, x_n\}}(x) & & & \\
x - x_n & p_{\{x_n\}}(x) = y_n & & & &
\end{array}$$

Ejemplo del método de Neville:

x	-1	0	1	3
y	0	1	-2	4

en $x=2$

$$\begin{array}{r|ccccc}
3 & 0 & & & & \\
 & & 3 & & & \\
2 & 1 & & -9 & & \\
 & & -5 & & -3 & \Rightarrow p(2)=-3 \\
1 & -2 & & -1 & & \\
 & & 1 & & & \\
-1 & 4 & & & &
\end{array}$$

Método de Aitken:

$$\begin{array}{c|lllll}
x-x_0 & p_{\{x_0\}}(x)=y_0 & & & & \\
x-x_1 & p_{\{x_1\}}(x)=y_1 & p_{\{x_0,x_1\}}(x) & & & \\
x-x_2 & p_{\{x_2\}}(x)=y_2 & p_{\{x_0,x_2\}}(x) & p_{\{x_0,x_1,x_2\}}(x) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
x-x_n & p_{\{x_n\}}(x)=y_n & p_{\{x_0,x_n\}}(x) & p_{\{x_0,x_1,x_n\}}(x) & \cdots & p_{\{x_0,\ldots,x_n\}}(x)
\end{array}$$

Ejemplo del método de Aitken:

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 0 & & & \\
2 & 1 & 3 & & \\
1 & -2 & -3 & -9 & \\
-1 & 4 & 3 & 3 & -3
\end{array} \quad \Rightarrow p(2)=-3$$

RESUMEN DE SOLUCIONES PARA EL P.I.P.L.

Con la base **canónica** $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

Solución: (sistema de ecuaciones lineales) $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

Con la base de **Lagrange** $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$

Solución: fórmula de Lagrange $p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x)$

Con base de **Newton** $\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$

Solución: fórmula de Newton

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

EVALUACIÓN DE POLINOMIOS

Para evaluar $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se requieren:

$\frac{n(n-1)}{2}$ multiplicaciones para potencias

n multiplicaciones por coeficientes

n sumas de monomios

$\frac{n^2+3n}{2}$ operaciones

...y los errores de redondeo se amplifican.

Expresión equivalente:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\cdots(a_{n-1} + x(a_n)\cdots))).$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p(x)$ en el punto $x = r$:

```
s = a[[n]];
For[i=n-1, i>=0, i--, s = s*r+a[[i]] ];
```

Algoritmo de Horner para la fórmula de Newton

$$p(x) = A_0 + (x - x_0)\big(A_1 + (x - x_1)\big(\cdots\big(A_{n-1} + (x - x_{n-1})\big(A_n\big)\cdots\big)\big)\big)$$

```
s = A[[n]];
For[i=n-1, i>=0, i--, s = s*(r-x[[i]]) + A[[i]] ];
```


OTROS PROBLEMAS DE INTERPOLACIÓN

Problema de Interpolación de Taylor

Obténgase $p \in \mathscr{P}_n$ conocidos los valores de $p(a), p'(a), p''(a), \ldots, p^{(n)}(a)$.

Solución 1: Con la base canónica $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ resulta el sistema triangular superior:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n & p(a) \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1} & p'(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! & p^{(n)}(a) \end{array}\right)$$

Solución 2: Con la base de Newton $\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ resulta el sistema diagonal:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0! & 0 & \cdots & 0 & p(a) \\ 0 & 1! & \cdots & 0 & p'(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n! & p^{(n)}(a) \end{array}\right)$$

Solución: el desarrollo polinomial de Taylor.

Problema de Interpolación de Hermite clásico

Obténgase $p \in \mathscr{P}_{2n+1}$ conocidos los valores de $p(x_0), p'(x_0), p(x_1), p'(x_1), \ldots, p(x_n), p'(x_n)$.

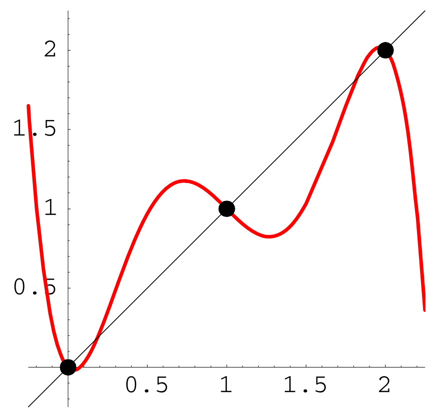
Solución: Con la base de Newton

$$\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, (x-x_0)^2(x-x_1), (x-x_0)^2(x-x_1)^2, \ldots$$
$$\ldots, (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)\}$$

Ejemplo:

x	1	2	3
y	1	2	3
y'	-1	-1	-1

unisolvente en $\mathscr{P}_5$.



Enfoque de Langrange en el caso polinomial con datos tipo Hermite clásico:

Datos: $z_0, z_1, \ldots, z_n, z'_0, z'_1, \ldots, z'_n$; espacio interpolador: $V = \mathscr{P}_{2n+1}$.

Base de Lagrange: $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ cumpliendo

$$\begin{aligned} A_j(x_i) &= \delta_{ij}, \quad & A'_j(x_i) &= 0, \\ B_j(x_i) &= 0, \quad & B'_j(x_i) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Sean $\ell_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_j - x_k}$ los polinomios fundamentales del problema clásico;

$$\begin{aligned} A_j &= \left(1 - 2(x - x_j)\ell'_j(x_j)\right)\ell_j^2(x), \\ B_j &= (x - x_j)\ell_j^2(x). \end{aligned}$$

Fórmula de Lagrange: $p(x) = \sum_j z_j A_j(x) + \sum_j z'_j B_j(x)$.

Ejercicio: comprobar.

Diferencia dividida generalizada: sup. $f \in \mathscr{C}^n[a,b]$ y $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$;

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{si } x_0 < x_n \\ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) & \text{si } x_0 = x_n \end{cases}$$

Enfoque de Newton: cada serie $f(x_i), f'(x_i), \ldots, f^{(k)}(x_i)$ genera el fragmento

$$\begin{array}{c|lllll}
x_i & f[x_i] = f(x_i) & & & & \\
 & & f[x_i, x_i] = f'(x_i) & & & \\
x_i & f[x_i] = f(x_i) & & f[x_i, x_i, x_i] = \frac{1}{2!} f''(x_i) & \ddots & \\
 & & f[x_i, x_i] = f'(x_i) & & & \\
x_i & f[x_i] = f(x_i) & & \vdots & & \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_i) \\
 & & \vdots & & \iddots & \\
\vdots & \vdots & & \iddots & & \\
 & & f[x_i, x_i] = f'(x_i) & & & \\
x_i & f[x_i] = f(x_i) & & & &
\end{array}$$

Ejemplo:

x	1	2	3
y	1	2	3
y'	-1	-1	-1

unisolvente en $\mathscr{P}_5$.

Base: $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^2(x-2),(x-1)^2(x-2)^2,(x-1)^2(x-2)^2(x-3)\}$

Tabla de diferencias divididas generalizadas:

1	1					
		-1				
1	1		2			
		1		-4		
2	2		-2		3	
		-1		2		-3
2	2		2		-3	
		1		-4		
3	3		-2			
		-1				
3	3					

EL PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACIÓN

Definición: Dado V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, una forma lineal sobre V es $L : V \mapsto \mathbb{R}$ verificando

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in V.$$

Ejemplos: (V = espacio de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
L_1(f) &= f(7), \\
L_2(f) &= f(x_0), \\
L_3(f) &= f'(-2), \\
L_4(f) &= \int_a^b f(x)\,dx, \\
L_5(f) &= f'''(0).
\end{aligned}$$

Problema General de Interpolación (P.G.I.):

"Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. Dadas las formas lineales $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ sobre V y los valores reales $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, obténgase $p \in V$ que verifique $L_i(p) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$."

Teorema: "Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. El P.G.I. es unisolvente si y sólo si el determinante de Gram

$$\det(L_i(v_j))$$

es no nulo."

Demostración: Si $p = \sum_j a_j v_j$, entonces $\sum_j a_j L_i(v_j) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ es un sistema de ecuaciones lineales cuyo determinante es el de Gram.

Casos particulares usuales:

$V = \mathscr{P}_n \rightarrow$ interpolación polinomial
$V = \langle 1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots \rangle \rightarrow$ interpolación trigonométrica

$L_i(f) = f(x_i) \rightarrow$ datos lagrangianos
$L_{2i}(f) = f(x_i),\ L_{2i-1}(f) = f'(x_i) \rightarrow$ datos tipo Hermite clásico
$L_i(f) = f^{(i)}(x_0) \rightarrow$ datos tipo Taylor

Características del P.G.I.:

- el nº de datos es finito
- las condiciones de interpolación son lineales
- la dimensión del espacio interpolador es igual al nº de datos.

Construcción de la solución del P.G.I.

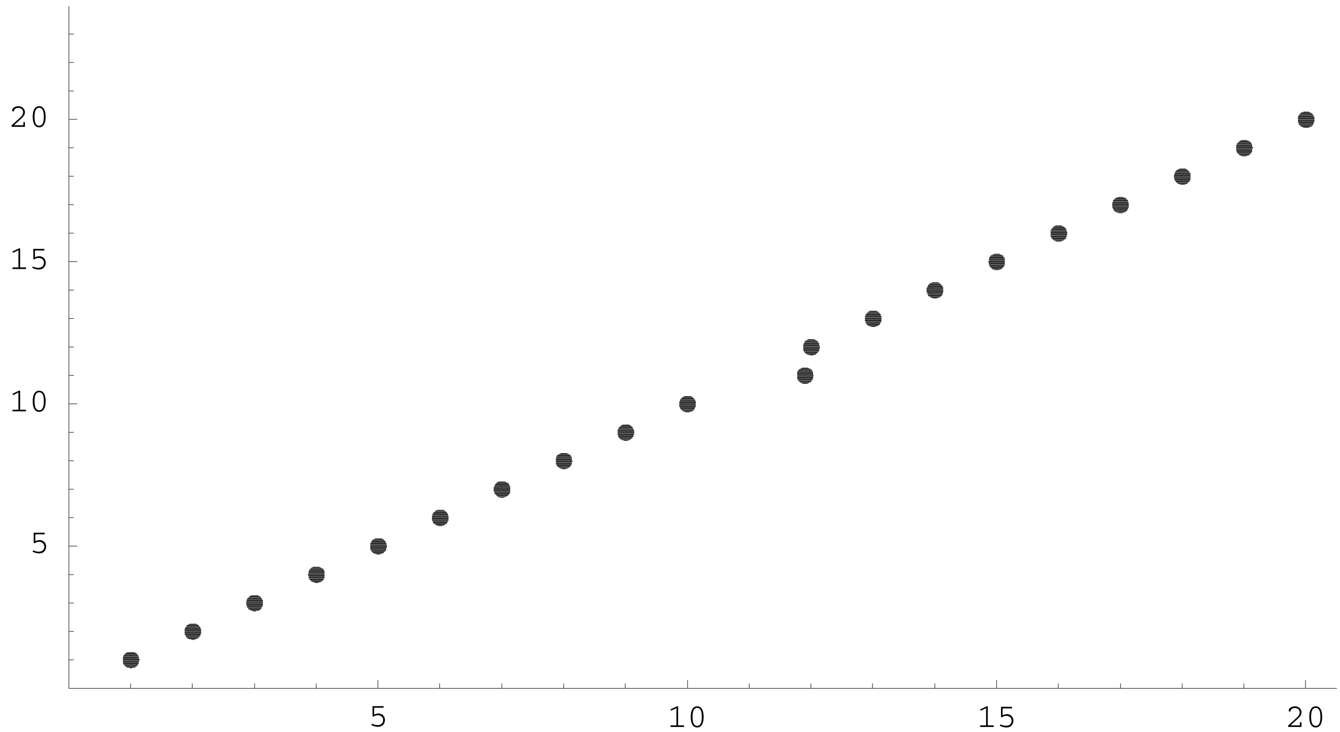
- **Enfoque directo:** con el sistema de Gram $\sum_j a_j L_i(v_j) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- **Enfoque de Lagrange:** sea una base $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ de V tal que $L_i(\ell_j) = \delta_{ij}$; entonces $p = \sum_j z_j \ell_j$ (fórmula de Lagrange).
- **Enfoque de Newton:** sea una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de V con $L_i(w_j) = 0\ \forall i < j$ y $L_j(w_j) \neq 0\ \forall j$; entonces $p = \sum_j a_j w_j$ (fórmula de Newton), donde

$$a_1 = \frac{z_1}{L_1(w_1)},\ \ a_k = \frac{z_k - L_k\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j w_j\right)}{L_k(w_k)},\ \ k = 2, \ldots, n.$$

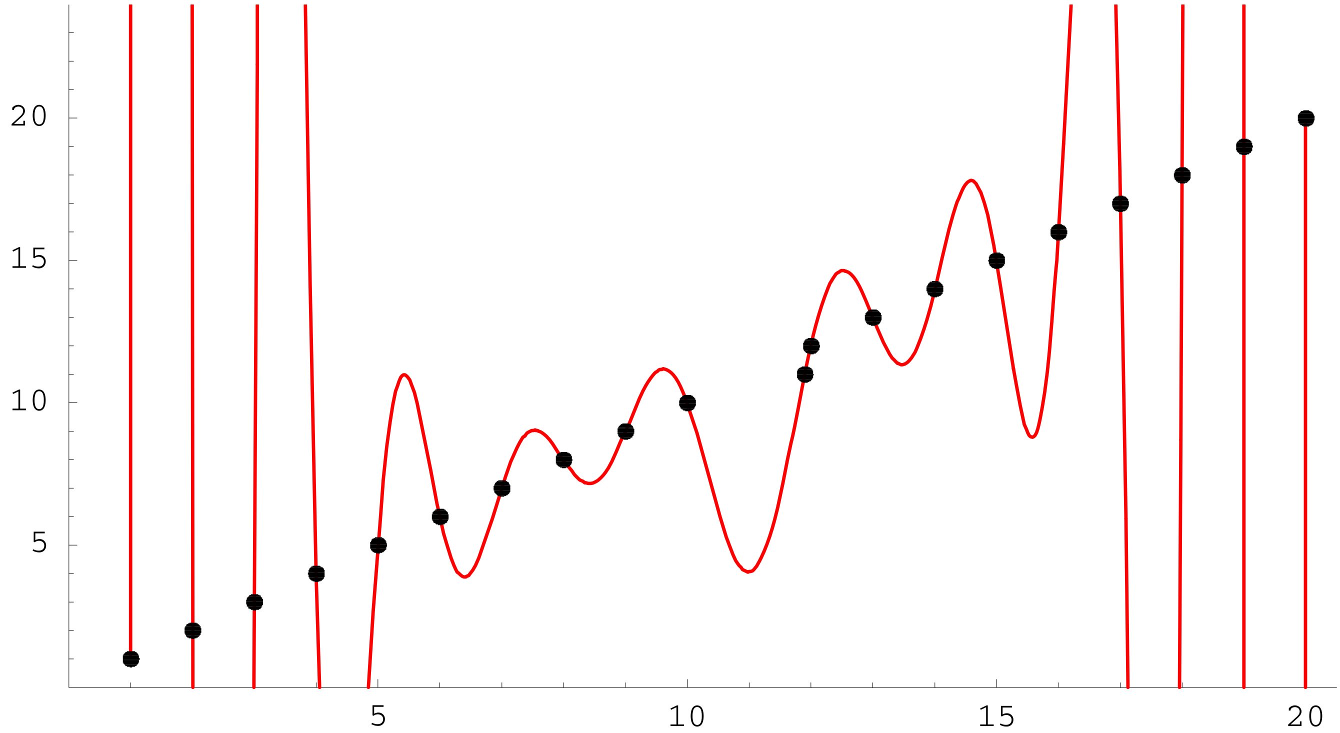
Ejercicio: Comprobar todo.

INTERPOLACIÓN MEDIANTE FUNCIONES SPLINE

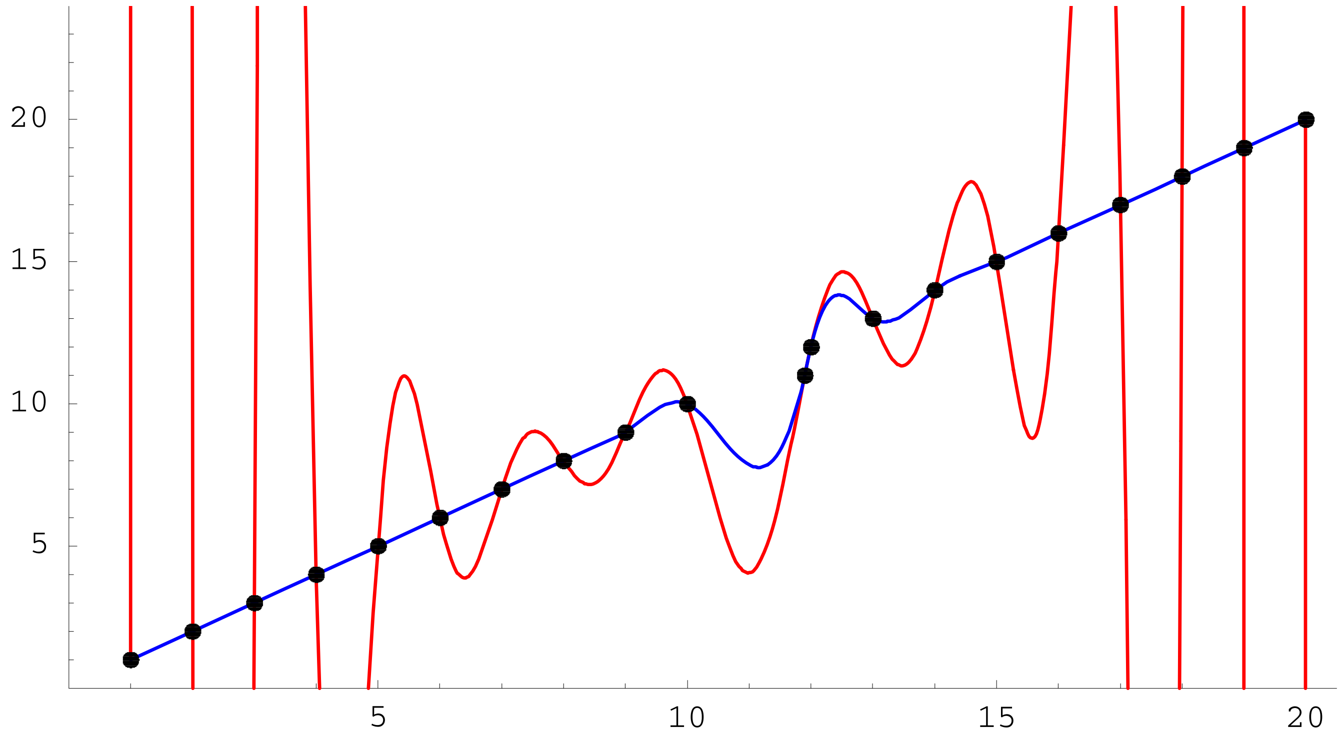
Los polinomios de alto grado interpolación adoptan comportamientos anómalos.



Los polinomios de alto grado interpolación adoptan comportamientos anómalos.



Los polinomios de alto grado interpolación adoptan comportamientos anómalos.



Definición: Un spline de grado n y clase m con nodos $\{x_0,\ldots,x_N\}$ es una función $s(x)$ definida en $[a,b]=[x_0,x_N]$ verificando:

1. $s_i = s\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ es un polinomio de grado $\leq n$ $(i=1,2,\ldots,N)$
2. $s \in C^m[a,b]$.

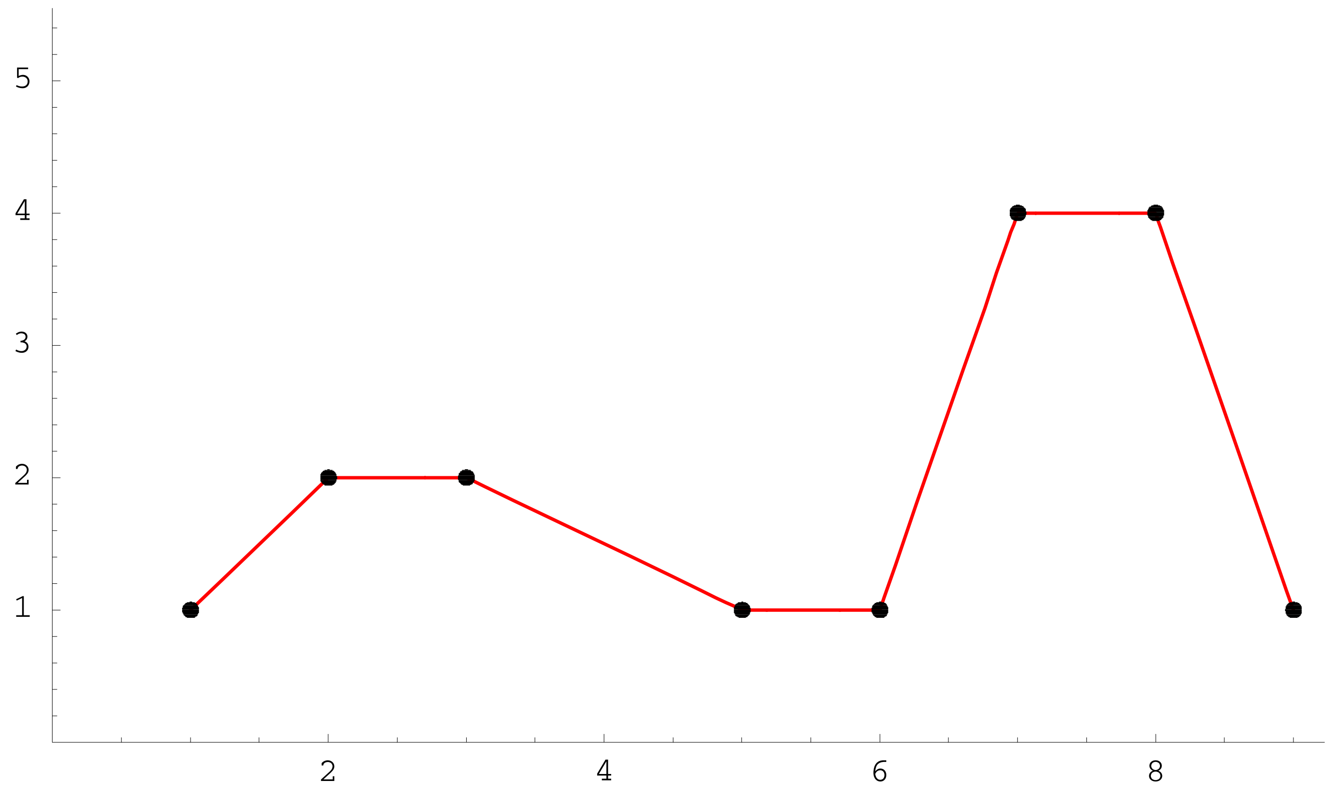
Convenio: salvo indicación expresa, se sobreentiende $m=n-1$.

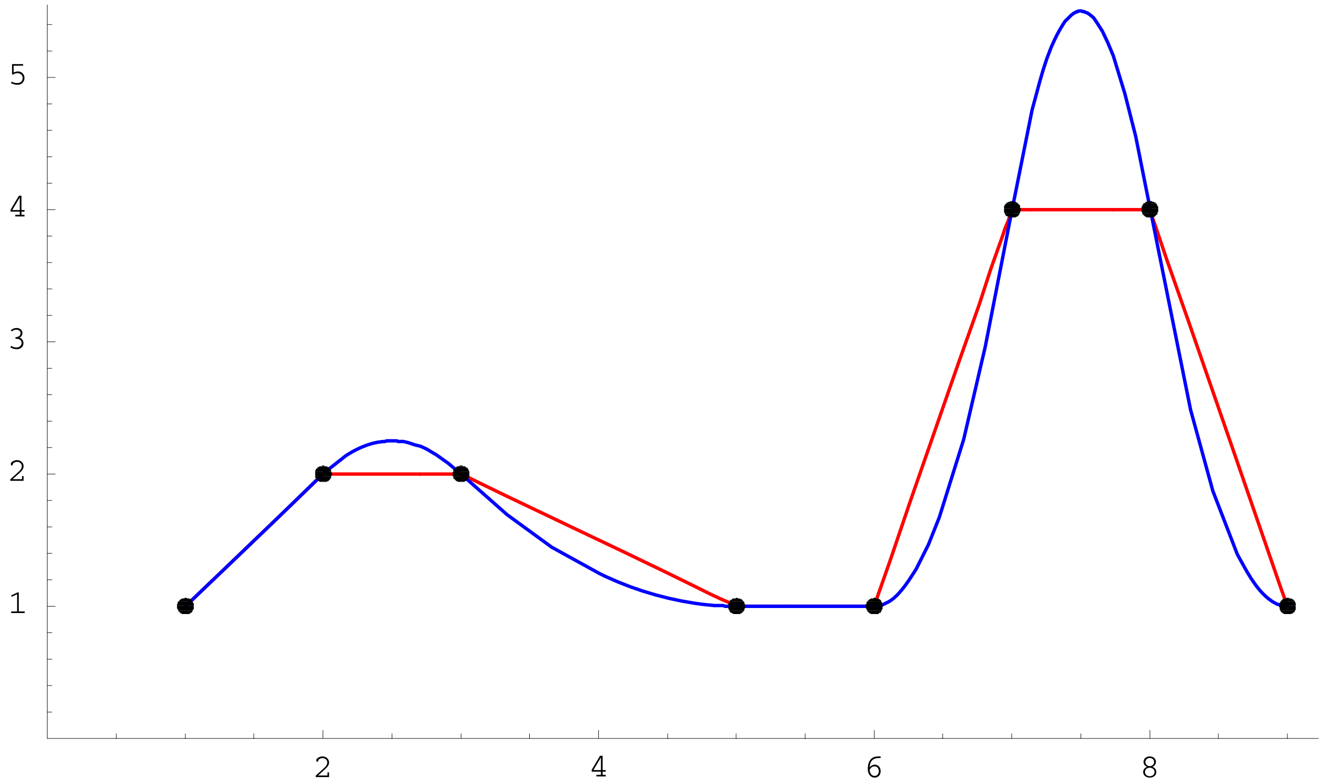
Espacios de splines en los nodos $\{x_0,\ldots,x_N\}$

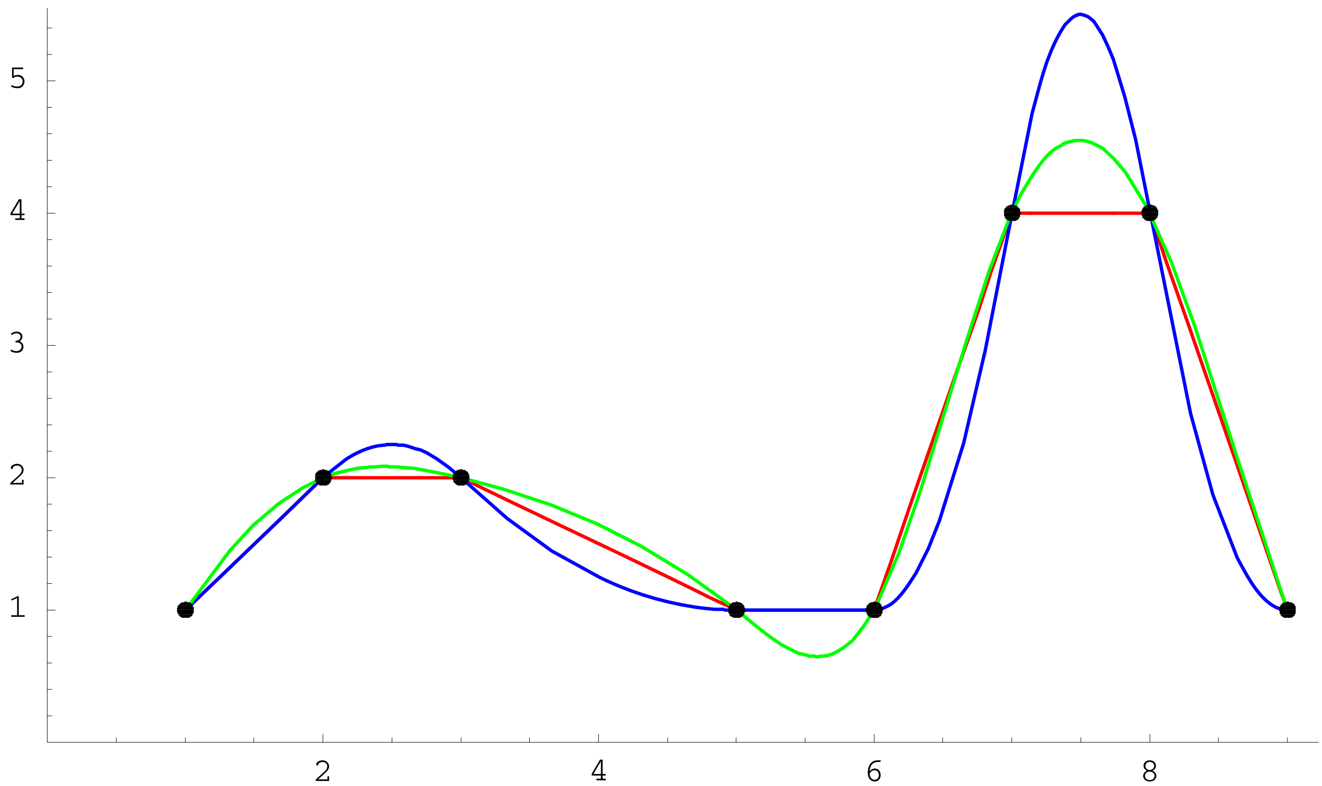
- de grado n y clase m: $\mathscr{S}_n^m(x_0,\ldots,x_N)$.
- de grado n (y clase $m=n-1$): $\mathscr{S}_n(x_0,\ldots,x_N)$.

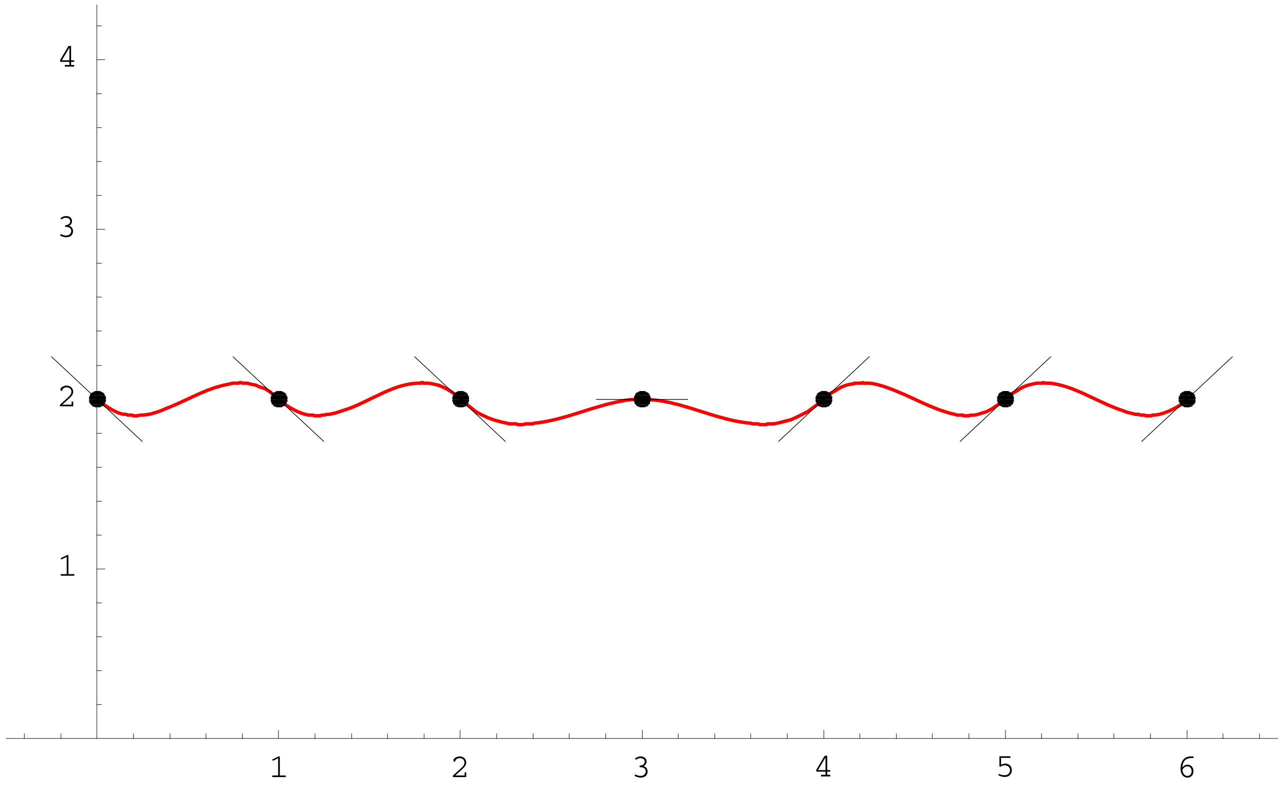
Casos usuales:

$n=1$: grado 1 (clase 0 = continua) $\rightarrow$poligonal spline lineal
$n=2$: grado 2 (clase 1 = derivable) spline cuadrático
$n=3$: grado 3 (clase 2 = derivable 2 veces) spline cúbico
$n=3, m=1$: spline cúbico de clase 1 (caso especial).




5
4
3
2
1
2
4
6
8


5
4
3
2
1
2
4
6
8



CONSTRUCCIÓN DE SPLINES POR TROZOS

Expresión a trozos:

$$s(x)=\begin{cases} s_1(x)\in\mathscr{P}_n & \text{si } x\in[x_0,x_1] \\ s_2(x)\in\mathscr{P}_n & \text{si } x\in[x_1,x_2] \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ s_N(x)\in\mathscr{P}_n & \text{si } x\in[x_{N-1},x_N] \end{cases}$$

Restricciones de suavidad:

$$s_i^{(k)}(x_i)=s_{i+1}^{(k)}(x_i)\quad i=1,\ldots,N-1,\ \ k=0,\ldots,m$$

por tanto

$$\begin{aligned}\dim\mathscr{S}_n^m(x_0,\ldots,x_N)&=(n+1)N-(m+1)(N-1)\\&=N(n-m)+m+1\end{aligned}$$

Caso lineal ($n=1$): Cada trozo $s_i(x)=a_ix+b_i$ aporta dos incógnitas;
dos ecuaciones: $s_i(x_{i-1})=y_{i-1}$ (extremo izdo.) y $s_i(x_i)=y_i$ (extremo dcho.)
$\rightarrow$ subproblema 2×2.

Construcción directa:

$$s_i(x)=y_i\frac{x-x_{i-l}}{h_i}+y_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i},\quad i=1,\ldots,N$$

con $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\ldots,N$.

<u>**Ejemplo:**</u>

x	-1	0	1	3
y	0	1	-2	4

$$\begin{array}{lll} s_1(-1)=\ \ 0, & s_1(0)=\ \ 1 & \Rightarrow s_1(x)=\ \ x+1 \\ s_2(\ \ 0)=\ \ 1, & s_2(1)=-2 & \Rightarrow s_2(x)=-3x+1 \\ s_3(\ \ 1)=-2, & s_3(3)=\ \ 4 & \Rightarrow s_3(x)=\ \ 3x-5 \end{array}$$

Caso cuadrático ($n=2$): Cada trozo $s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ aporta tres incógnitas $\to$ total $3N$;

Ecuaciones:

- Interpolación (clase 0): 2 por trozo (extremos izdo. y dcho.)
- Clase 1: $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ $\; i = 1,\ldots,N-1$ son $N-1$ ecuaciones.

$\to$ total $2N + N - 1 = 3N - 1$ ecuaciones $\to$ ¡falta una ecuación!.

$\to$ Se añade una ecuación adicional para cuadrar el problema.

Construcción directa con $s'(x_0) = d_0$:

$$s_i(x) = y_{i-1} + d_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{w_i - d_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1})^2, \quad i = 1,\ldots,N$$

con $w_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$, $d_i = 2w_i - d_{i-1}$, $i = 1,\ldots,N$, $d_0 = y_0'$.

Caso cúbico ($n=3$): Cada trozo $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ aporta cuatro incógnitas $\to$ total $4N$;

Ecuaciones:

- Interpolación (clase 0): 2 por trozo (extremos izdo. y dcho.)
- Clase 1: $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ $\; i = 1,\ldots,N-1$ son $N-1$ ecuaciones.
- Clase 2: $s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ $\; i = 1,\ldots,N-1$ son $N-1$ ecuaciones.

$\to$ total $2N + 2(N-1) = 4N - 2$ ecuaciones $\to$ ¡faltan dos ecuaciones!.

Ecuaciones adicionales típicas:

- $s''(a) = s''(b) = 0$ — spline natural
  prolongable mediante rectas $\to$ de clase 2 en todo R.
- $s'(a) = y_0'$, $s'(b) = y_N'$ — spline de extremo sujeto
  pendientes fijas de entrada y salida.
- $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$ — spline periódico
  prolongable por periodicidad $\to$ de clase 2 en todo R.

Construcción directa del spline cúbico natural o sujeto:

$$s_i(x) = y_{i-1} + d_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{w_i - d_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1})^2 + \frac{d_{i-1} + d_i - 2w_i}{h_i^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

siendo d_i la solución del s.e.l. tridiagonal simétrico

$$\frac{1}{h_i} d_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) d_i + \frac{1}{h_{i+1}} d_{i+1} = 3\left(\frac{w_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{w_i}{h_i}\right), \quad i = 1, \ldots, N-1$$

con las ecuaciones adicionales

- natural: $d_0 = y_0'$, $d_N = y_N'$;
- sujeto: $2d_0 + d_1 = 3w_1$, $d_{N-1} + 2d_N = 3w_N$.

Caso especial:

$n = 3, m = 1$ para datos tipo Hermite clásico (valor y derivada en cada punto).
Para cada trozo $s_i(x)$ se tienen 4 incógnitas y 4 ecuaciones
(2 valores y 2 derivadas), formando un subproblema 4×4.

Caso general (P.I.L. en $\mathscr{S}_n^m(x_0, \ldots, x_N)$): Hay $N(n+1)$ incógnitas;

Ecuaciones:
- Interpolación+continuidad: $2N$ ($= N+1$ interpolación $+$ $N-1$ clase 0).
- Suavidad de clase 1: $N-1$
- Suavidad de clase 2: $N-1$

  $\vdots$
- Suavidad de clase m: $N-1$

Total ecuaciones: $2N + m(N-1) = (m+2)N - m$;

si $m = n-1$ entonces siempre faltan m ecuaciones adicionales.

Se obtiene un sistema $N(n+1) \times N(n+1)$.

Teoremas de unisolvencia:

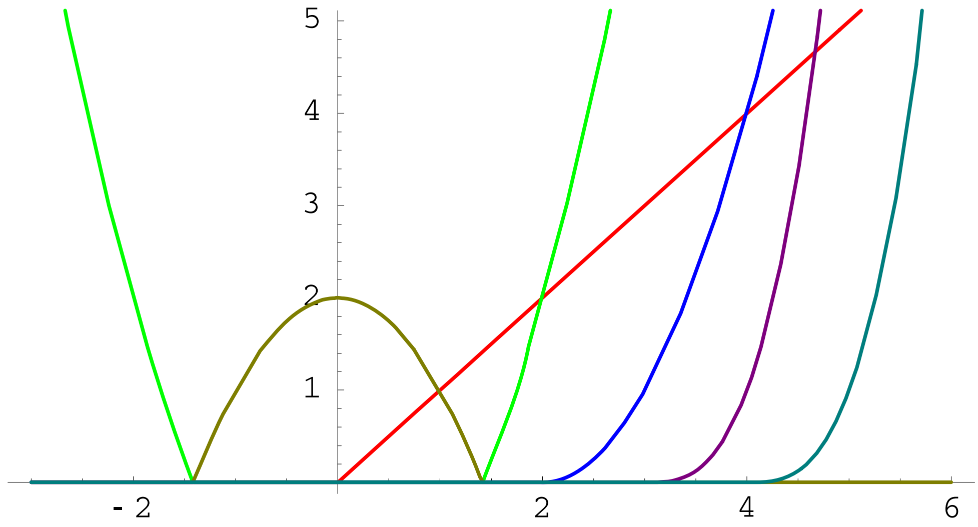
- P.I.L. en $\mathscr{S}_1(x_0,\ldots,x_N)$
- P.I.L. en $\mathscr{S}_2(x_0,\ldots,x_N)$ con $s'(x_i) = d_i$ para algún $i \in \{0,1,\ldots,N\}$
- P.I.L. en $\mathscr{S}_3(x_0,\ldots,x_N)$ natural
- P.I.L. en $\mathscr{S}_3(x_0,\ldots,x_N)$ sujeto
- P.I.L. en $\mathscr{S}_3(x_0,\ldots,x_N)$ periódico
- Hermite clásico en $\mathscr{S}_3^1(x_0,\ldots,x_N)$

CONSTRUCCIÓN DE SPLINES POR POTENCIAS TRUNCADAS

Potencia truncada

$$(x)_+^n = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $(x)_+,\ (x-2)_+^2,\ (x^2-2)_+,\ (2-x^2)_+,\ (x-3)_+^3,\ (x-4)_+^3$



Ejercicios: $|x| = (x)_+ + (-x)_+,\ x = (x)_+ - (-x)_+.$

Propiedad: $(x-r)_+^n$ es un spline de grado n con un nodo en r.

Bases de splines:

$$\mathscr{S}_1(x_0,\ldots,x_N) = \langle 1, x, (x-x_1)_+, (x-x_2)_+, \ldots, (x-x_{N-1})_+ \rangle$$
$$\mathscr{S}_2(x_0,\ldots,x_N) = \langle 1, x, x^2, (x-x_1)_+^2, (x-x_2)_+^2, \ldots, (x-x_{N-1})_+^2 \rangle$$
$$\mathscr{S}_3(x_0,\ldots,x_N) = \langle 1, x, x^2, x^3, (x-x_1)_+^3, (x-x_2)_+^3, \ldots, (x-x_{N-1})_+^3 \rangle$$
$$\mathscr{S}_n(x_0,\ldots,x_N) = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n, (x-x_1)_+^n, (x-x_2)_+^n, \ldots, (x-x_{N-1})_+^n \rangle$$

$$\mathscr{S}_3^1(x_0,\ldots,x_N) = \langle 1, x, x^2, x^3, (x-x_1)_+^2, (x-x_2)_+^2, \ldots, (x-x_{N-1})_+^2, (x-x_1)_+^3, (x-x_2)_+^3, \ldots, (x-x_{N-1})_+^3 \rangle$$

Ejemplo: Spline cúbico natural para

x	-1	0	1	3
y	0	1	-2	4

$$s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + A(x)_+^3 + B(x-1)_+^3$$

sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 27 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 18 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Solución: $s(x) = \dfrac{1}{23}\left(23 - 37x - 90x^2 - 30x^3 + 88(x)_+^3 - 72(x-1)_+^3\right)$

Ejemplo: Spline cúbico sujeto horizontal para

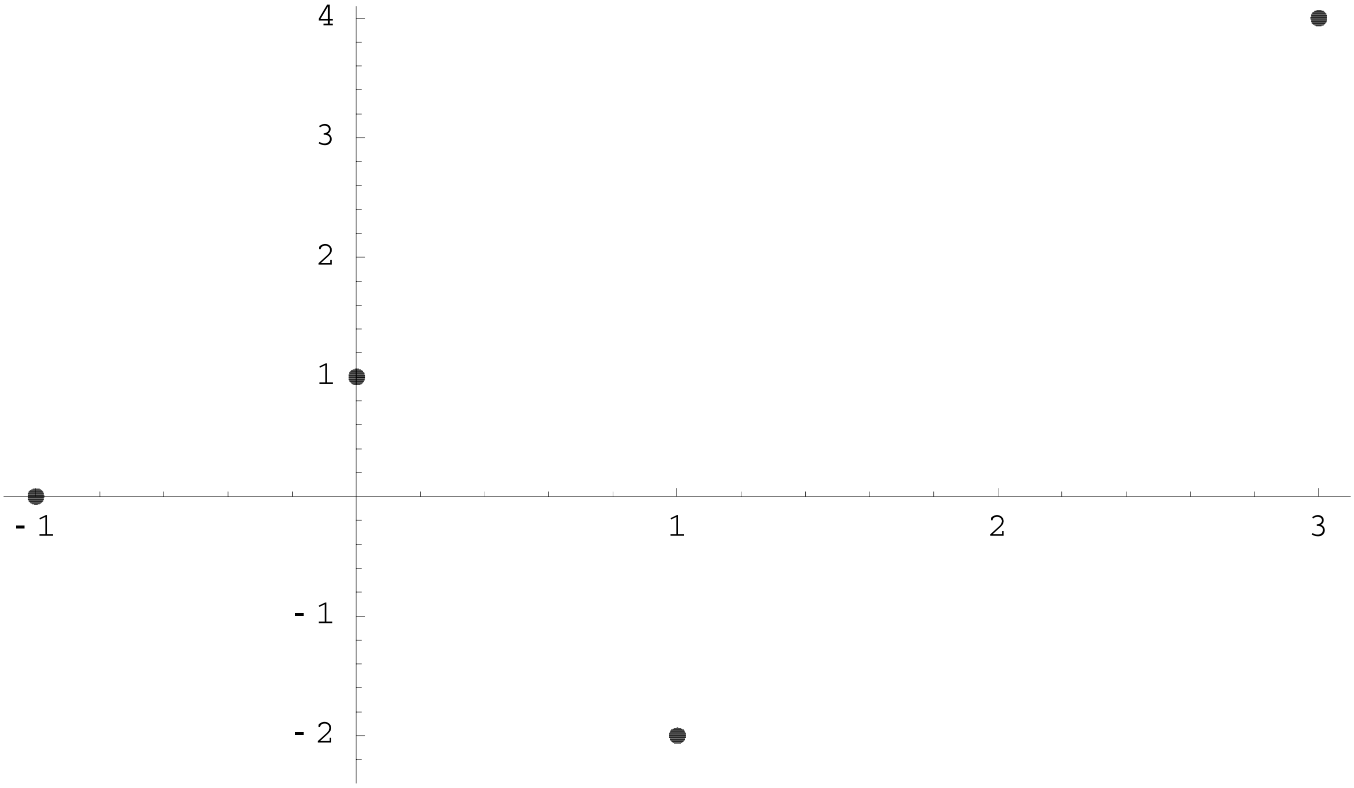
x	-1	0	1	3
y	0	1	-2	4

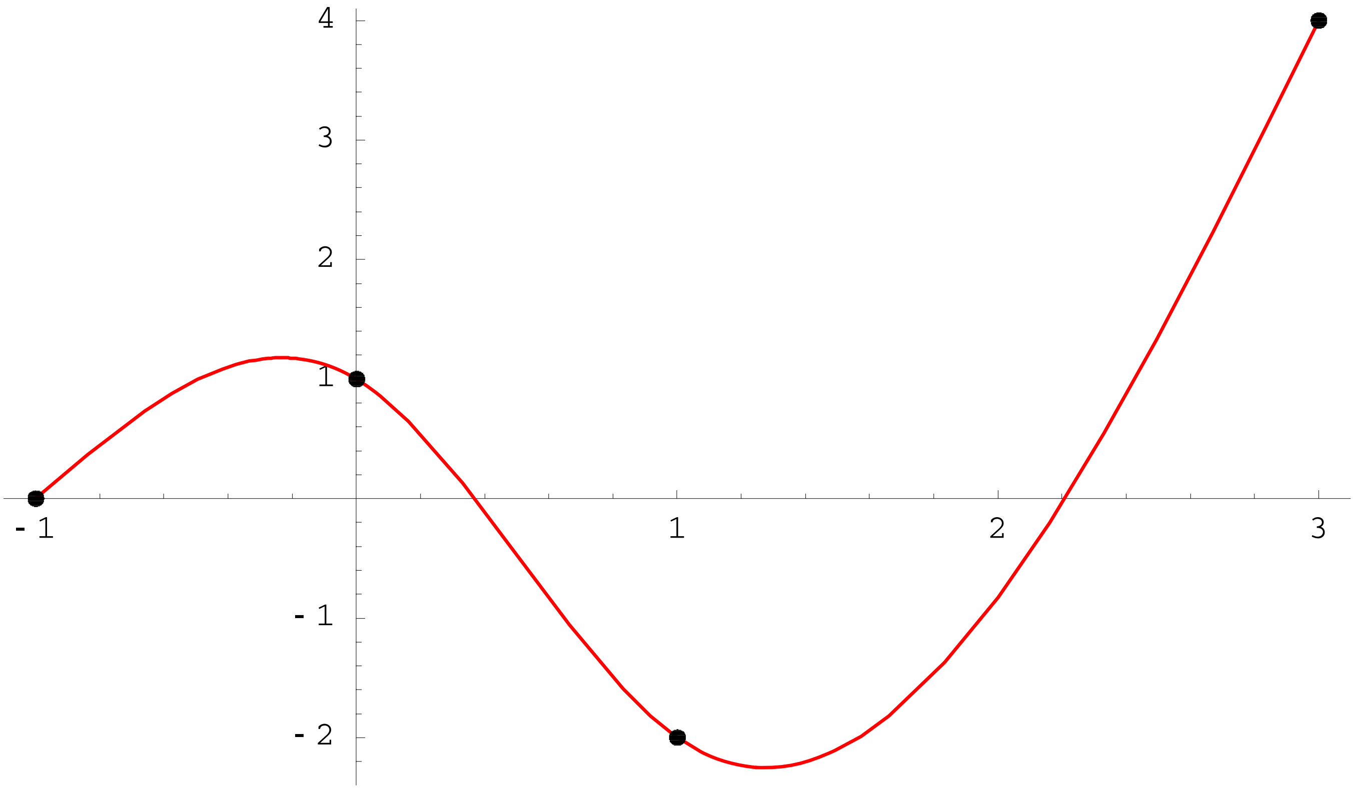
$$s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + A(x)_+^3 + B(x-1)_+^3$$

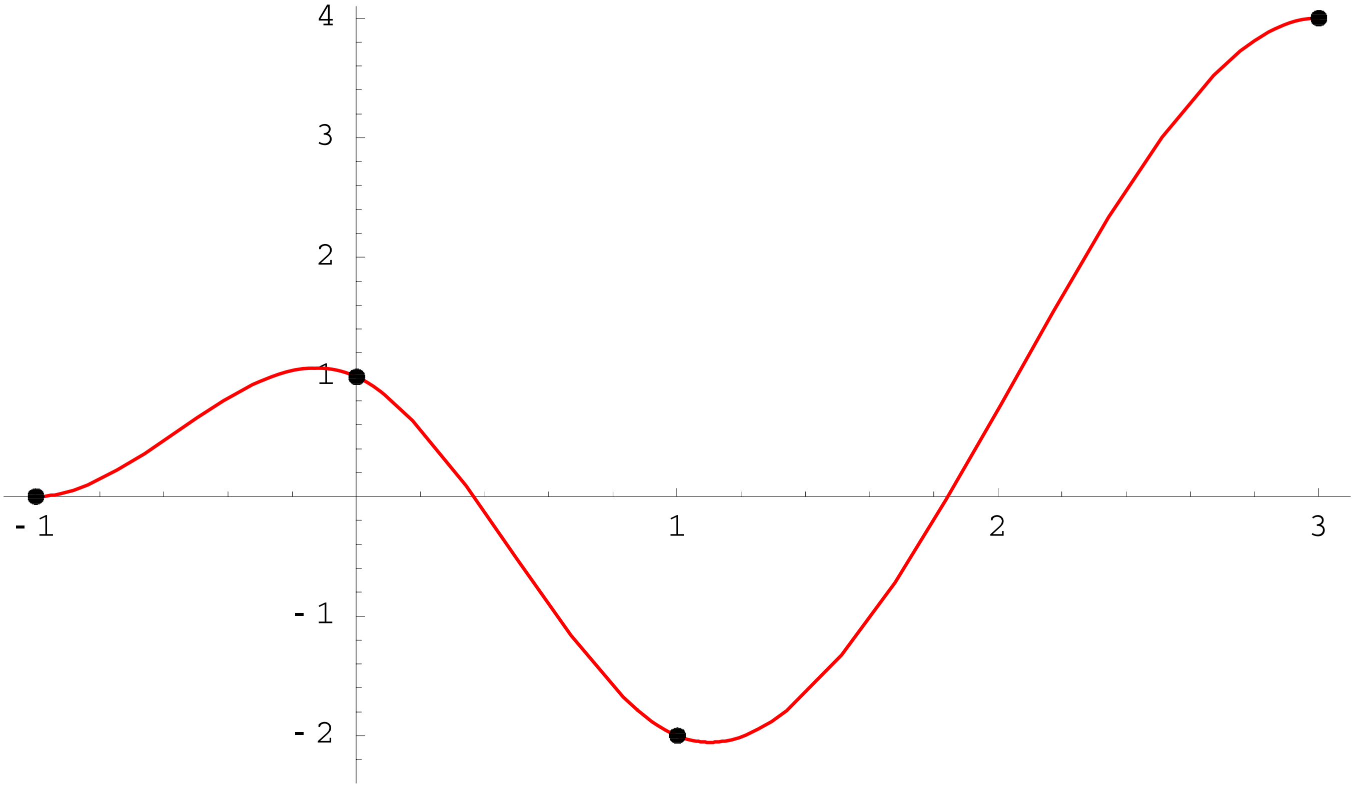
sistema lineal

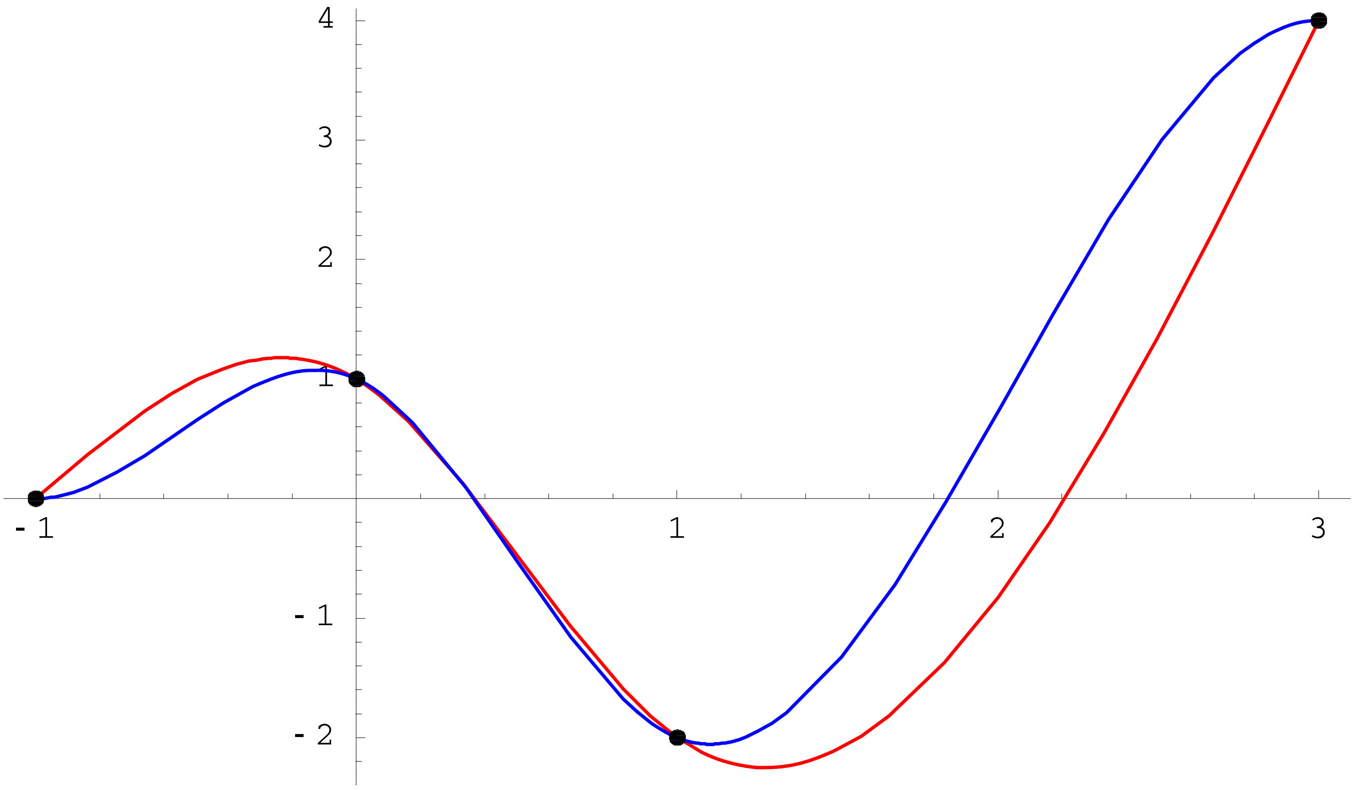
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 27 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 27 & 27 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Solución: $s(x) = \dfrac{1}{22}\left(22 - 27x - 120x^2 - 71x^3 + 152(x)_+^3 - 120(x-1)_+^3\right)$


4
3
2
1
- 1
1
2
3
- 1
- 2


4
3
2
1
- 1
1
2
3
- 1
- 2


4
3
2
1
- 1
- 2
- 1
1
2
3

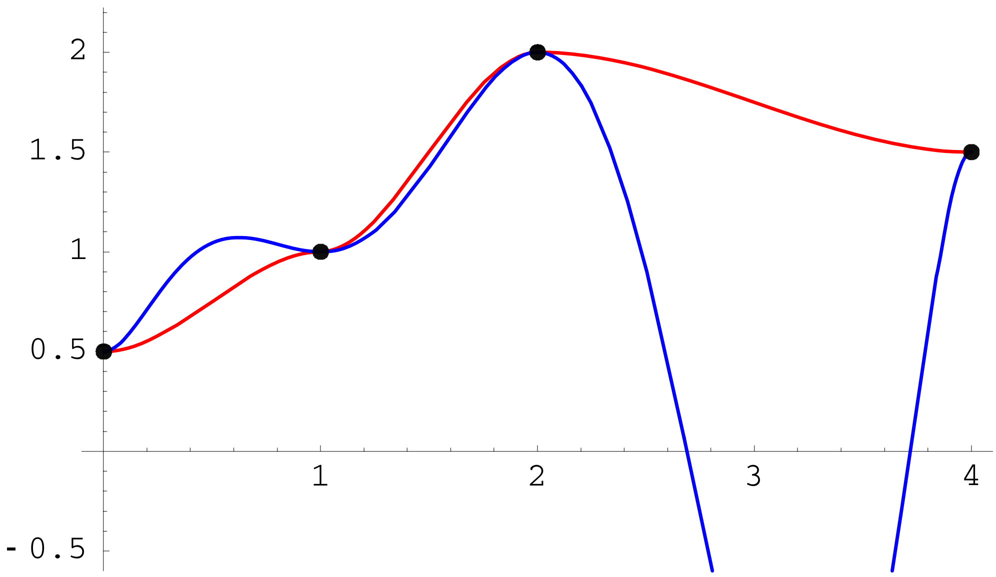

4
3
2
1
- 1
- 2
- 1
1
2
3

INTERPOLACIÓN DE HERMITE CON SPLINES

Ejemplo:

x	0	1	2	4
y	0.5	1	2	1.5
y'	0	0	0	0

en $\mathcal{S}_3^1(0,1,2,4)$



PROPIEDADES EXTREMALES DE LOS SPLINES CÚBICOS

Condiciones comunes:

"Sean los nodos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Sea $s(x)$ el spline cúbico natural o sujeto que interpola los nodos con datos $y_0, \ldots, y_N$, y adicionales $s''(a) = s''(b) = 0$ o bien $s'(a) = y'_0, s'(b) = y'_N$.
Sea $f \in \mathscr{C}^2[a,b]$ cualquier otra función que interpole los mismos datos, incluyendo los adicionales. Sea $E(x) = f(x) - s(x)$."

Lema:

$$\int_a^b s''(x)E''(x)dx = 0.$$

Demostración:

$$\int_a^b s''(x)E''(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)E''(x)dx = \left[\begin{array}{c}\text{(por partes)}\\ u = s'', dv = E''dx\end{array}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(s''(x)E'(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''(x)E'(x)dx \right)$$

$$= s''(b)E'(b) - s''(a)E'(a) - \sum_{i=1}^{N} K_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} E'(x)dx$$

si es natural: $s''(a) = s''(b) = 0$, si es sujeto: $E'(a) = E'(b) = 0$, y además

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} E'(x)dx = E(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0.$$

Teorema (propiedad extremal):

$$\int_a^b s''(x)^2 dx \le \int_a^b f''(x)^2 dx.$$

Demostración:

$$\int_a^b f''(x)^2 dx = \int_a^b \left(E''(x) + s''(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_a^b E''(x)^2 dx + \int_a^b s''(x)^2 dx + 0$$

$$\ge \int_a^b s''(x)^2 dx.$$

Teorema (estudio del error):

$$|E(x)| \le h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \ \forall x \in [a,b],$$

donde $h = \max_{1 \le i \le N} (x_i - x_{i-1})$ es el diámetro de la partición.

Demostración:

$$E(x_i) = 0 \ \forall i \Rightarrow \exists c_i \in [x_{i-1}, x_i] \ / \ E'(c_i) = 0, \ i = 1, \ldots, N,$$

luego

$$\int_{c_i}^x E''(t) dt = E'(x) \ \forall x \in [a,b].$$

Por otro lado (abreviando) se tiene

$$\int_{c_i}^x E''^2 \le \int_a^b E''^2 = \int_a^b (f'' - s'')^2 = \int_a^b f''^2 - \int_a^b s''^2 - 2\int_a^b s'' E'' \le \int_a^b f''^2;$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \|v\| \to \left| \int fg \right| \le \sqrt{\int f^2 \int g^2}$

$$|E'(x)| \le \sqrt{\int_{c_i}^x E''(t)^2 dt \cdot \int_{c_i}^x 1^2 dt} \le \sqrt{h \int_{x_i}^x E''(t)^2 dt} \le \sqrt{h \int_a^b f''(t)^2 dt}$$

y como $\int_{x_{i-1}}^x E'(t) dt = E(x) - E(x_{i-1}) = E(x)$, entonces se tiene

$$|E(x)| = \left| \int_{x_{i-1}}^x E'(t) dt \right| \le \int_{x_{i-1}}^x |E'(t)| dt \le h^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f''(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} (x - x_{i-1})$$

$$\le h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$